

红外无损探测中多宗量多热源反演问题的研究

张立广 屈惠明

Multiple heat sources with multi-parameter inversion of nondestructive infrared detection

Zhang Li-Guang Qu Hui-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 108104 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.108104

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.108104>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I10>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于块稀疏贝叶斯学习的多任务压缩感知重构算法

[A recovery algorithm for multitask compressive sensing based on block sparse Bayesian learning](#)

物理学报.2015, 64(7): 070201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070201>

带有分数阶热流条件的分数阶热波方程及其参数估计问题

[Parameters estimation for a one-dimensional time fractional thermal wave equation with fractional heat flux conditions](#)

物理学报.2014, 63(14): 140202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.140202>

构造 Birkhoff 表示的广义 Hojman 方法

[General Hojman's method for the construction of Birkhoffian representation](#)

物理学报.2013, 62(9): 090205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.090205>

相位差图像复原技术研究

[Phase diversity image restoration](#)

物理学报.2012, 61(23): 230203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.230203>

基于双带宽高斯滤波器的磁共振弹性图局域频率估算算法研究与实现

[Study and realization of local frequency estimation algorithm in magnetic resonance elasto-graphy based on dual-bandwidth Gaussian filters](#)

物理学报.2011, 60(9): 090204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.090204>

# 红外无损探测中多宗量多热源反演问题的研究\*

张立广 屈惠明†

(南京理工大学电子工程与光电技术学院, 南京 210094)

(2014年7月18日收到; 2014年12月18日收到修改稿)

为研究红外无损探测稳态多热源反演逆问题, 建立不同形状的均质与非均质稳态热传导模型, 其中内热源个数、位置、强度、面积均为未知项. 基于数值算法中有限元算法对模型进行离散分析, 化简有限元矩阵方程, 最终转化为对  $Ax = b$  高度欠定方程的求解. 首次利用分段多项式谱截断奇异值分解法处理内热源逆问题, 并对算法进行改进, 有效改善了该算法在处理多热源反演时存在的严重的热源叠加效应. 根据反演出的内热源信息, 利用有限元算法计算重构出整个模型内所有节点的温度分布. 运用数值仿真 Comsol 软件和具体实物实验对算法进行有效性评估, 并验证算法在不同热传导模型中的表现. 结果表明, 算法能够准确反演出多热源各参量信息, 在非均质材料模型中仍能准确地反演出热源项, 并有效重构出模型内温度场. 该算法可应用于材料无损检测及人体红外医学成像等领域.

**关键词:** 无损探测, 多内热源反演, 分段多项式谱截断奇异值分解法, 有限元

**PACS:** 81.70.Fy, 02.30.Zz, 44.10.+i, 47.11.Fg

**DOI:** 10.7498/aps.64.108104

## 1 引言

传热学反问题的研究包含两类: 一是对于内部温度可测、边界条件未知的热辐射系统, 待求量往往为模型的边界条件、初始条件或模型热导系数; 二是对于边界条件已知、热源项未知的系统, 这类问题被称为内热源逆问题, 待求量为热源项或是希望通过边界温度重构出整个模型的温度场. 热源逆问题属于高度的不适定 (ill-posed) 问题<sup>[1,2]</sup>, 即解的惟一性和解的稳定性都不满足. 过去几十年内, 一维热传导逆问题的研究逐渐成熟, 进而延伸至多维领域. 最近, 热源逆问题的研究已有报道. 如 Kolodziej 等<sup>[3]</sup>, Yan 等<sup>[4]</sup> 利用基本解方法 (the method of fundamental solutions, MFS) 研究二维稳态热源项反演问题, 但该方法求解的前提是需要探测一部分内部点的温度信息; Hazanee 等<sup>[5]</sup> 利用边界元法结合 Tikhonov 正则化方法研究二维瞬态热源项反演问题; 还有些学者用其他方法研究

该类问题, 如变异迭代算法<sup>[6]</sup>、逐次逼近算法<sup>[7]</sup>、直接数值方法<sup>[8]</sup>、有限差分法等<sup>[9]</sup>. 涉及的热源逆问题主要有对空间依赖<sup>[10,11]</sup>、随时间变化的热源项反演问题<sup>[5,12,13]</sup>. 总体来看, 最近的研究多集中在通过数值算法求解热源逆问题, 求解的稳定性和准确度都能达到预期, 但一些方法的局限性仍需要探测少数内部点的温度信息, 多数研究方法也并没有进行实验验证, 而基于无损检测的多热源稳态非均质条件下的热源反演问题的研究尚未见报道. 本文主要研究稳态均质及非均质条件下的多热源反演问题, 且不需要以有损方式获得模型内部若干点的温度信息. 对该问题的研究意义在于: 仅通过无损探测模型边界的温度信息就可以重构出模型内温度场, 不需事先知道模型内热源的数目等先验信息, 模型内部除热导率已知外其他条件均未知, 热源也不需等效为点热源. 无损重构稳态多热源逆问题的研究难点在于以下几个方面: 热源数目未知, 多热源的位置、强度、面积参量会导致边界温度分布形状复杂多变, 系统病态性成倍增强. 多热源叠

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61171164) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [huimingqu@163.com](mailto:huimingqu@163.com)

加效应使得热源数目难以准确判定. 另外, 热源强度和热源面积对模型边界温度分布形状的作用效果比热源位置小, 同时两者的作用又比较相似<sup>[14]</sup>. 如果存在多个强度不同大小不一的热源, 反演的难度会进一步增大, 特别是对于距离比较近的热源, 很容易出现将多个热源等效为一个大的热源的情况. 也容易出现一个热源的强度比真实值小, 而面积比真实值大, 或者一个热源的强度转移到另外一个热源上. 上述问题对反演算法的要求进一步加大. 人体红外无损探测的研究需要解决多热源非均质热源反演问题, 本文所要研究的模型也非常符合这种情况. 对于这种复杂的热传导系统, 本文采用有限元算法对模型进行离散分析, 化简离散后的传热方程, 转化为基础的  $Ax = b$  欠定方程求解. 通过采集边界温度, 简化传热方程, 化简出求解方程组, 由于方程组高度欠定, 这里采用改进的分段多项式谱截断奇异值分解法 (piecewise polynomial truncated singular value decomposition methods, PPTSVD) 方法求解该方程组, 并采用 Comsol 软件仿真和实验来验证算法的可行性与准确性.

## 2 有限元算法求解二维热传导模型

利用有限元算法求解稳态热传导问题时, 稳态过程不需要考虑物体的初始温度场情况, 而只需考虑边界换热条件. 有限元算法通过将二维模型剖

分成有限单元后, 依据所研究模型的形状对应的形函数求解出模型各个单元结点的温度信息. 采用 Galerkin 法建立单元稳态温度场的有限元列式, 针对图 1 中的二维热传导模型及其对应的边界换热条件, 各剖分单元的积分公式为

$$\int_{\Omega}^e \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial [N]}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \right] \{T\}^n d\Omega - \int_{\Gamma_1}^e N_i Q d\Gamma + \int_{\Gamma_2}^e N_i h T_a d\Gamma - \int_{\Gamma_2}^e N_i h [N] \{T\}^e d\Gamma = 0, \quad (1)$$

其中,  $N$  为有限元的形函数矩阵,  $N_i$  代表形函数. 可将 (1) 式简化为

$$[K^{l \times l}]^e [T^{l \times 1}]^e = [F^{l \times 1}]^e, \quad (2)$$

其中  $l$  为所剖分网格每个小单元的顶点数目,  $[K^{l \times l}]^e$  代表二维热传导模型单元热传导矩阵,  $[T^{l \times 1}]^e$  为待求解各剖分单元节点温度组成的向量,  $[F^{l \times 1}]^e$  为单元热载荷矩阵.

这里我们采用具有代表性的形状进行分析, 以圆形和长方形为例, 图 1 给出了这两种形状的剖分方案.

这里采用三节点的三角形单元, 可使最终得出的相邻节点温度过渡比较自然. 将各个单元组成结构整体进行分析. 导出整个结构节点位移与节点温度之间的关系, 建立整个结构的刚度方程.

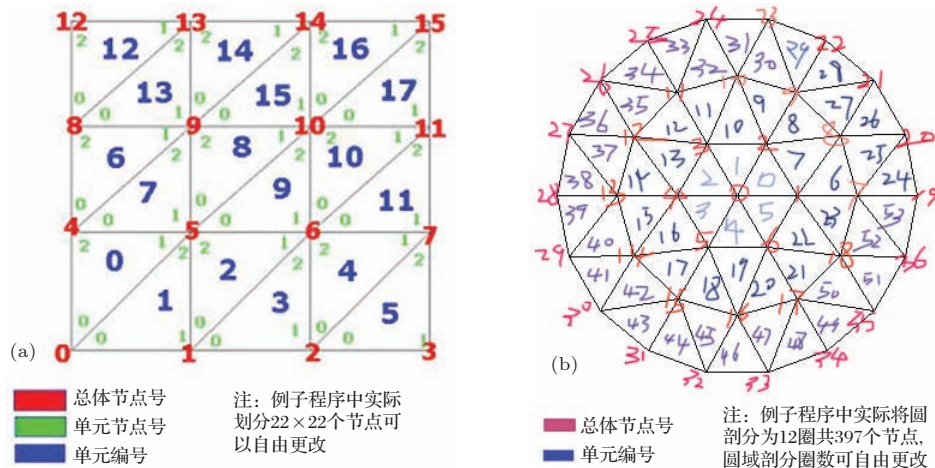


图 1 (网刊彩色) 不同形状的热传导模型有限元剖分示意图 (a) 二维矩形热传导模型有限元剖分示意图; (b) 二维圆域热传导模型有限元剖分示意图

Fig. 1. (color online) Finite element grid division schematic diagram of heat conduction model which has different shapes: (a) finite element subdivision schemes of 2-D rectangular domain heat conduction model; (b) finite element subdivision schemes of 2-D circular domain heat conduction model.

分析步骤: 首先按一定的集成规则, 将各单元刚度矩阵集成总的结构整体刚度矩阵, 引入边界换热条件, 并将单元等效结点荷载集成整体等效结点荷载列阵. 化简分析总传热方程:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{n \times n} \mathbf{T}^{n \times 1} = \mathbf{F}^{n \times 1}, \\ \mathbf{T}^{n \times 1} = \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} \mathbf{F}^{n \times 1}, \\ \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{T}^{n \times 1} = \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} \mathbf{F}^{n \times 1}, \\ \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{T}^{n \times 1} \\ = \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} (\mathbf{F}_q^{n \times 1} + \mathbf{F}_a^{n \times 1}), \\ \mathbf{T}_s^{m \times 1} = \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} (\mathbf{F}_q^{n \times 1} + \mathbf{F}_a^{n \times 1}), \\ \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} \mathbf{F}_q^{n \times 1} \\ = \mathbf{T}_s^{m \times 1} - \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} \mathbf{F}_a^{n \times 1}, \\ \mathbf{A}^{m \times n} \mathbf{x}^{n \times 1} = \mathbf{b}^{m \times 1}, \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{A}^{m \times n} \mathbf{x}^{n \times 1} = \mathbf{b}^{m \times 1}, \quad (4)$$

其中,  $m$  为边界上的节点总数,  $n$  为模型边界和内部所有节点总数;  $\mathbf{F}$  总热荷载矩阵由环境温度荷载和内热源荷载量组成, 而环境温度荷载总是作用在边界节点上, 内部节点处的环境温度荷载总是零; 而边界节点上的内热源温度荷载也总是零;  $\mathbf{F}_q$  代表内热源温度荷载, 为待求量;  $\mathbf{F}_a$  代表环境温度荷载为已知量. 在有限元算法中, 二维平面各节点顺序按照一定的排布顺序进行排列, 我们可根据排列规律求出边界节点的位置坐标系数矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得  $\mathbf{CT} = \mathbf{T}_s$ .

当给定内热源和边界条件时, 由于  $\mathbf{K}$  是正定矩阵, 逆矩阵一定存在, 节点温度向量可由下式求出:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{n \times 1} &= \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} \mathbf{F}^{n \times 1} \\ &= \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} (\mathbf{F}_q^{n \times 1} + \mathbf{F}_a^{n \times 1}) \\ &= \mathbf{T}_a^{n \times 1} + \mathbf{T}_q^{n \times 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

待求温度场是由内热源温度荷载和环境温度荷载产生的温度场叠加.

问题转化为求解 (4) 式线性方程组中的未知量  $\mathbf{x}$ , 其中  $\mathbf{A} = \mathbf{CK}^{-1}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{T}_s - \mathbf{CK}^{-1}\mathbf{F}_a$ .  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{T}_s$ ,  $\mathbf{F}_a$  均为已知量.

### 3 欠定方程的 PPTSVD 解

由待求方程组 (4) 可知, 未知数个数远大于方程组个数, 待测量为边界节点温度, 待求量为平面内所有节点的内热源温度荷载, 方程高度欠定, 方

程解不惟一. 解决这类方程的途径通常有正则化、最小范数解等. 正则化方法可分为直接解法和迭代解法. 传统的直接解法有 Tikhonov 正则化法<sup>[15]</sup>和谱截断奇异值分解法 (truncated singular value decomposition, TSVD)<sup>[16]</sup>、广义谱截断奇异值分解法 (truncated generalized singular value decomposition, TGSVD 等<sup>[17]</sup>), 迭代法有最速下降法<sup>[18]</sup>、遗传算法<sup>[19]</sup>、共轭梯度算法等<sup>[20]</sup>. 欠定方程稀疏解的求解方法由于图像领域压缩感知的研究日益受到关注, 解决这类问题主要是利用最小范数解. 然而本文中所涉及的问题与压缩感知问题又有非常大的区别, 具体表现在采点的空间分布上. 在通过大量仿真验证后, 传统的正则化方法和最小范数解往往不能得到合理的解, 均表现在求出的内热源荷载分布太过分散以及内热源分量过于趋于模型边界的情况. 求解结果滤波特性非常平滑和连续, 不适于解具有阶跃不连续性的热源载荷的特征信息. 在经过大量的方法探索以及认真对该热源反演逆问题进行分析后, PPTSVD 正则化方法进入了我们的视野.

PPTSVD 是由 TSVD 和  $L_1$  最小范数解构成. 在 TSVD 方法通过截断阈值抑制掉一些多余的大的峰值谱和噪声, 而  $L_1$  范数解过程求解出信号量并排除掉另一部分噪声. 相较于传统的 TSVD 方法, PPTSVD 利用了关于解的部分先验信息, 可求阶跃不连续热源特征的热源反演问题, 求解结果符合预期.

### 3.1 奇异值分解 (singular value decomposition, SVD)

系数  $\mathbf{A}$  矩阵代表边界节点坐标系数矩阵与热传导矩阵的逆矩阵. 对  $\mathbf{A}$  矩阵进行奇异值分解:

$$\mathbf{A}^{m \times n} = \mathbf{U}^{m \times m} \mathbf{\Sigma}^{m \times n} \mathbf{V}^{n \times n}, \quad (6)$$

$m \times m$  维矩阵  $\mathbf{U}$  的列为  $\mathbf{AA}^T$  的正交特征向量;  $n \times n$  维矩阵  $\mathbf{V}$  的列为  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  的正交特征向量;  $\mathbf{AA}^T$  和  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  存在相同的特征值, 为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i (i \leq m)$ ;  $m \times n$  矩阵  $\mathbf{\Sigma}$  的对角元素  $\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}$ , 且呈降序排列.

离散不适定问题的特征在于具有一个奇异值衰减到零的系数矩阵  $\mathbf{A}$ .  $\mathbf{V}$  矩阵代表热传导强度修正谱,  $\mathbf{\Sigma}$  代表修正量级,  $\mathbf{U}$  代表重整后的热传导强度谱. 调整  $\mathbf{\Sigma}$  可起到滤除无关信号量和部分



相关噪声的作用. 由此, 引出截断奇异值谱的方法 TSVD.

### 3.1.1 TSVD 正则化方法

简言之, TSVD 方法就是截断所有由噪声引起的小的奇异值  $\sigma_i$ , 大的奇异值得到保留.

$$\mathbf{A}_k^{m \times n} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i^{m \times 1} \sigma_i \mathbf{v}_i^{\top 1 \times n} \quad k < m, \quad (7)$$

$$\begin{cases} \min \|\mathbf{x}^{n \times 1}\|_2 \\ \min \|\mathbf{A}^{m \times n} \mathbf{x}^{n \times 1} - \mathbf{b}^{n \times 1}\|_2, \end{cases} \quad (8)$$

(7) 式中的  $\mathbf{u}_i^{m \times 1}$  为  $\mathbf{U}$  矩阵的第  $i$  列的列向量;  $\mathbf{v}_i^{\top 1 \times n}$  为  $\mathbf{V}$  矩阵的第  $i$  列的列向量的转置. 用  $\mathbf{A}_k$  代替原来的  $\mathbf{A}$  系数矩阵, 求解结果为

$$\mathbf{x}_k^{n \times 1} = \sum_{i=1}^k \frac{\mathbf{u}_i^{\top 1 \times m} \mathbf{b}^{m \times 1}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i^{n \times 1} \quad k < m, \quad (9)$$

上式中  $\mathbf{b} = \mathbf{T}_s - \mathbf{C}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_a$ , 其中的  $\mathbf{T}_s$  为理想条件下采集到的边界温度值,  $k$  为人为选定的阈值系数.

TSVD 求出的内热源能量往往是平滑、连续的, 且倾向于呈现出最小的能量谱并表现出趋向模型边界的情况. 一方面, TSVD 解并没有利用关于内热源能量解的先验信息, 另一方面, 对小的奇异值进行截断的结果在抑制掉噪声的同时势必损失大量有效的相关信号量. 这两方面都是由于 TSVD 强行截断了小的奇异值谱, 造成小的奇异值谱中有效的相关信号量也被排除掉了. 如果能有效地求出被截断的小奇异值谱中的相关信号量, 同时抑制掉无关噪声, 并将该能量谱叠加到原来的 TSVD 解中, 求解结果或可达到预期.

### 3.1.2 PPTSVD 正则化方法

PPTSVD 的思想正是在 TSVD 解中叠加小奇异值谱中的相关成分. 如何提取小奇异值谱中的相关信号量成为求解的关键.

PPTSVD 方法通过替换 TSVD 中的  $\|\mathbf{x}\|_2$  为  $\|\mathbf{L}\mathbf{x}\|_1$ , 求解约束方程如下:

$$\begin{aligned} & \min \|\mathbf{L}^{p \times n} \mathbf{x}^{n \times 1}\|_1 \quad (p \leq n), \\ & \text{subjected to } \min \|\mathbf{A}_k^{m \times n} \mathbf{x}^{n \times 1} - \mathbf{b}^{m \times 1}\|_2. \end{aligned} \quad (10)$$

由 (9) 式求出  $\mathbf{x}_k$  后, 被截断掉的小奇异值谱中的  $\mathbf{V}$  子矩阵  $\mathbf{V}_{kn}$  中包含有内热源强度谱的有效相关信号.  $\mathbf{V}_{kn}$  矩阵是由  $\mathbf{V}_{k+1}, \dots, \mathbf{V}_N$  列向量构成, 由下式表示:

$$\mathbf{V}_{kn}^{n \times (n-k)} = [\mathbf{V}_{k+1}^{n \times 1}, \mathbf{V}_{k+2}^{n \times 1}, \dots, \mathbf{V}_N^{n \times 1}]. \quad (11)$$

从被截断的强度谱中提取修正项, 对原来的 TSVD 解进行校正, 可从下面的线性方程中求出修正项  $\mathbf{V}_{kn}w$ :

$$\begin{aligned} & \min \left\| (\mathbf{L}^{p \times n} \mathbf{V}_{kn}^{n-k}) w^{(n-k) \times 1} - \mathbf{L}^{p \times n} \mathbf{x}_k^{n \times 1} \right\|_1 \\ & p \leq n, \end{aligned} \quad (12)$$

$\mathbf{V}_{kn}w$  项存在于  $\mathbf{A}_k$  的零空间中, 实际上 (12) 式就是在求 (10) 式, 目的是在满足 TSVD 解的同时使  $\mathbf{L}\mathbf{x}$  的一范数最小.  $w$  至少满足线性方程组  $\mathbf{L}\mathbf{V}_{kn}w = \mathbf{L}\mathbf{x}_k$  中的  $n-k$  个方程. 从被截断的  $\mathbf{V}_{kn}$  谱中提取出修正项, 需要求出修正系数  $w$ .  $\mathbf{V}_{kn}w$  作为内热源载荷场的修正项, 对 TSVD 解起到抑制噪声、增强信号谱的作用.

最终内热源项的解为

$$\mathbf{X}_{L,k}^{n \times 1} = \mathbf{x}_k^{n \times 1} - \mathbf{V}_{kn}^{n \times (n-k)} w^{(n-k) \times 1}. \quad (13)$$

在上述求解问题中  $\mathbf{L}$  矩阵是解题的关键.  $\mathbf{L}$  矩阵被称为正则化算子矩阵, 传统的 PPTSVD 算法中  $\mathbf{L}$  矩阵往往取为一阶或多阶微分算子逼近矩阵,  $\mathbf{L}\mathbf{x}$  项意味着提取那些具有突变、变化率比较大的相关信号量. PPTSVD 方法最初用于地质勘测反演问题的研究中, 其后被用在核磁共振、压缩图像恢复等领域 [21,22]. 但该热源逆问题与之前其适用的研究问题之间还是存在明显的差距, 其中最重要的一点是已知信息即方程右端已知项全分布在模型边界上, 而之前的问题是已知点均匀地分布在模型内部. 如果仍然按原来的思路选取  $\mathbf{L}$  矩阵, 仍会存在求解的最终热源载荷场趋向于边界的情况.

$\mathbf{L}$  矩阵应包含有求解具体问题的与信号成分相关的先验信息. 对于本文所研究的问题来说, 更合理的  $\mathbf{L}$  矩阵可以使求出的内热源载荷集中, 并对求解时存在的热源场趋于边界的效应进行改善. 通过传热正问题的研究, 我们知道最终的温度分布与内热源载荷的分布模式息息相关. 由于系数矩阵  $\mathbf{A}$  中含有平面所有节点的坐标信息, 各个节点与边界的距离不同, 将该差异应用于  $\mathbf{L}$  矩阵上,  $\mathbf{L}$  阵可取为

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}^{m \times n} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n) \\ & i \leq n, \end{aligned} \quad (14)$$

该种正则化算子的矩阵选择方案最早见于文献 [23],  $A_i$  为  $\mathbf{A}$  矩阵第  $i$  列向量的模, 对角阵  $\mathbf{L}$  可逆, 对内热源小的奇异值谱起到归一化的作用. 该矩阵包含有内热源载荷场节点坐标的先验信息, 起

到区域加权作用. 对于(12)式中的  $Lx_k$ , 其效果是对处在边界上的节点热源载荷量的加权激励系数较大, 对处于内部节点的热源载荷量的加权激励系数较小. 在(13)式的最终解中, 修正项的符号和原TSVD解的符号相反, 能够改善最终正则解趋于边界的效应. 该修正项最终起到抑制边界信息并将能量谱集聚于模型内部的作用.

在实际求解过程中, 线性  $L1$  问题求解属于线

性规划问题. 线性规划问题的求解通常有图解法、单纯形法、椭球法及投影尺度法等. 这里采用最常用、最广泛的单纯形法进行求解. 单纯形法需从最初解开始进行反复迭代, 直到求出最优解. 实际求解中, 采用优化的大  $M$  单纯形法优化迭代次数 [24].

截断系数  $k$  的大小并不是确定的, PPTSVD 通过迭代试探出使最终解的残差达到最小时的最佳截断系数.

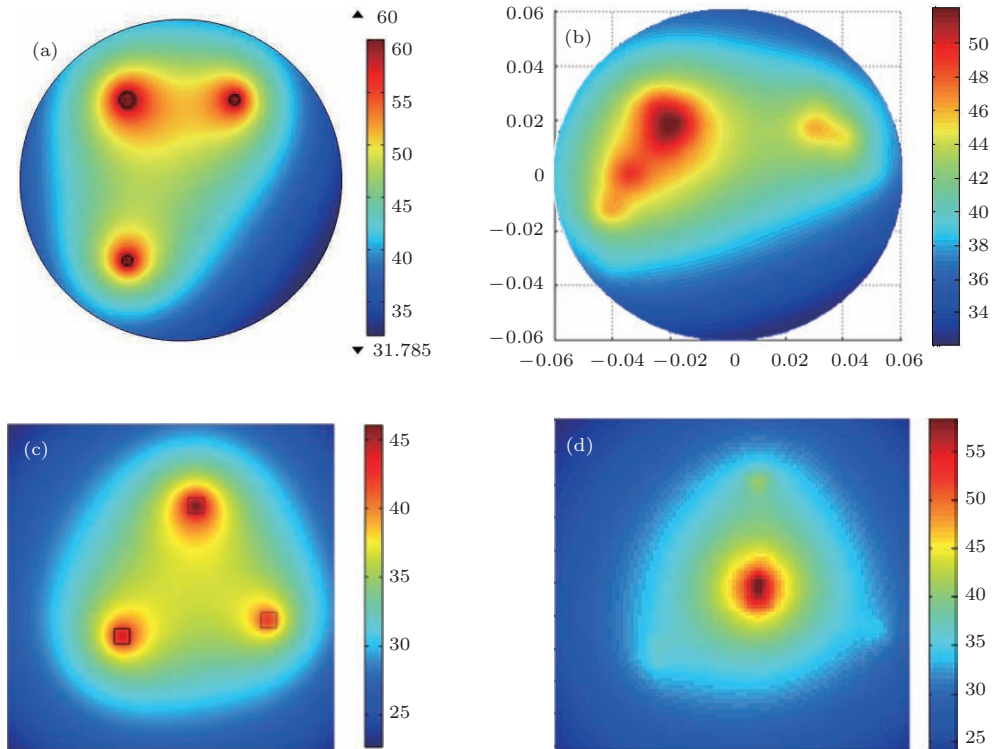


图2 (网刊彩色) 未经改进的PPTSVD算法重构模型内温度与仿真温度对比 (a) 稳态三热源圆域平面内热源分布仿真; (b) 未经改进的PPTSVD反演重构出的温度分布图; (c) 仿真得到的稳态三热源矩形域平面内热源分布; (d) 未经改进的PPTSVD反演重构出的温度分布图

Fig. 2. (color online) Contrast between temperature filed in model obtained by PPTSVD solution before improved and simulation: (a) the temperature distribution obtained by simulation in circular model with three heat sources; (b) the temperature distribution domain obtained by PPTSVD solution before improving in the same conditions; (c) the temperature distribution obtained by simulation in circular model with three heat sources; (d) the temperature distribution obtained by PPTSVD solution before improving in the same conditions.

多热源情形时, 方程(10)右侧  $b$  矢量的高斯性增强, 更难准确地估计出所有源的分布. 在实际求解中, 也往往会遇到将多个小热源等效成处于这几个小热源所组成多边形质心位置的一个实际不存在的大的热源. 图2列举了几种算法严重估计错误的情况. 从图中可以看出, 多热源的等效作用使得算法估计结果与实际模型内的温度分布存在较大

偏差. 反演结果只能显示出内热源的大致分布走向, 在求解多热源问题时难以得到准确的解, 计算出的热源数目可能增加也可能减少. 当热源较多时, 必须对PPTSVD算法进行改进.

修正思想如下: 修改单次PPTSVD求解中的迭代容差和最大迭代次数, 使最终迭代解表现出一定的差异度. 修改单次迭代容差及最大迭代次数的

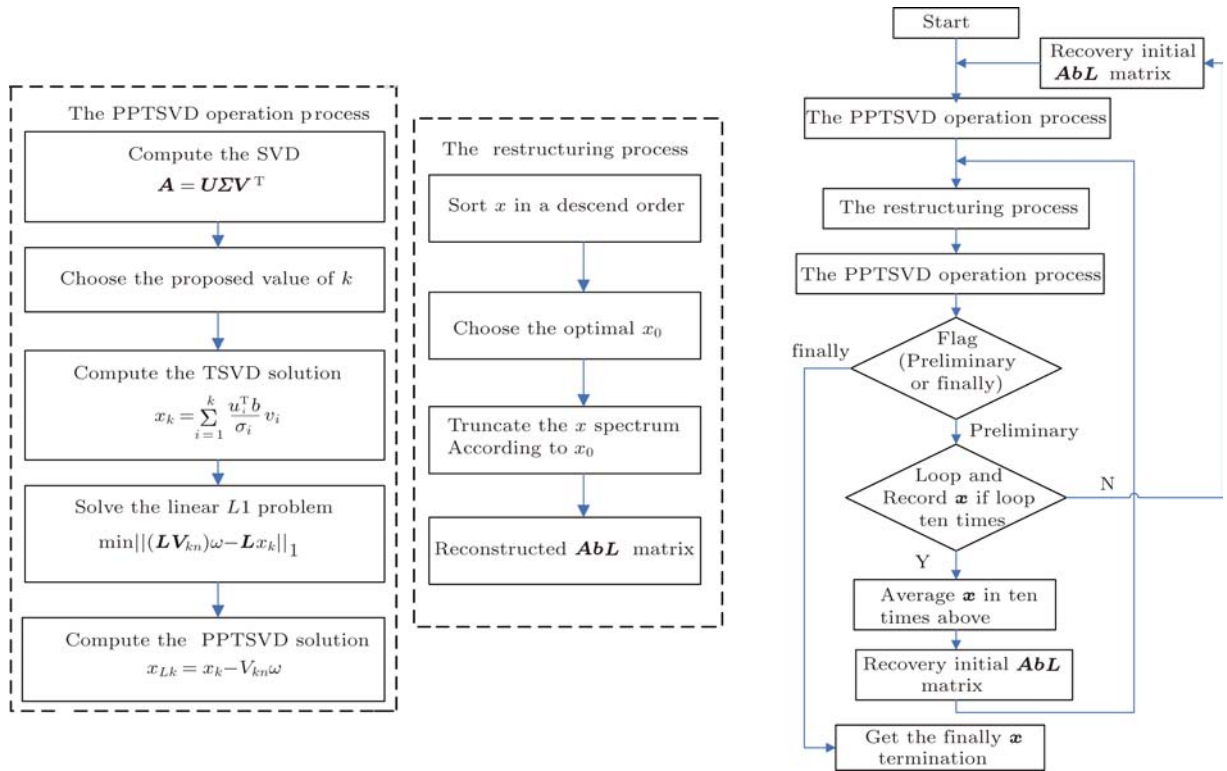


图3 针对多热源等效问题 PPTSVD 算法修正流程图

Fig. 3. The flow chart of PPTSVD improvement towards multiple heat sources equivalent effect.

效果表现为源项的大小和位置围绕真实值附近的杂散分布. 对该结果继续进行迭代排除, 迭代排除过程类似于对数据做聚类分析, 并使得能量集聚于组团块的几何中心. 估计热源不可能存在的区域, 对初步求解出的热源项  $\mathbf{x}$  进行降序排序, 根据经验选取阈值. 阈值限下的点的位置坐标存入  $\mathbf{D}$  矩阵中, 并重组  $\mathbf{Ab}$  矩阵.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} \mathbf{F}_q^{n \times 1} \\ = \mathbf{T}_s^{m \times 1} - \mathbf{C}^{m \times n} \mathbf{K}^{n \times n^{-1}} \mathbf{F}_a^{n \times 1} \\ \mathbf{D}^{s \times n} \mathbf{F}_q^{n \times 1} = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \mathbf{A}_0^{m \times n} \mathbf{F}_q^{n \times 1} = \mathbf{b}_0^{m \times 1} \\ \mathbf{D}^{s \times n} \mathbf{F}_q^{n \times 1} = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0^{m \times n} \\ \mathbf{D}^{s \times n} \end{bmatrix} \mathbf{F}_0^{n \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^{m \times 1} \\ \mathbf{0}^{s \times 1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \mathbf{A}^{(m+s) \times n} \mathbf{x}^{n \times 1} = \mathbf{b}^{(m+s) \times 1}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $s$  为通过经验从初解中选取的阈值下的节点个数, 把这些内热源载荷量非常小的节点近似为 0, 即当作已知量看待;  $\mathbf{D}$  矩阵为坐标系数矩阵,  $\mathbf{DF}_q$  项代表从初解中选出内热源载荷量非常小的节点, 在下一步求解中将这节点看作已知量;  $\mathbf{A}_0 \mathbf{b}_0$  矩阵

是从未重组前的初始矩阵, 对矩阵重组增加矩阵行数意味着增加线性方程组的数量. 排除掉这些近似认为不可能存在热源载荷量的节点, 使得  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  方程中的未知数数目减小.

修正后的反演多热源信息的 PPTSVD 算法流程如图 3 所示.

在图 3 所示的 PPTSVD 算法求解过程中, 我们发现最终的截断参数  $k$  往往落在  $m/2$  (边界总结点个数的  $1/2$ ) 处附近, 且反演结果随  $k$  值变化并不明显. 为减小迭代次数, 缩短程序运行时间, 我们在改进的算法中直接取推荐的  $k$  值, 即  $k = m/2$ . 每次运算包含两步, 利用 PPTSVD 求解初始的  $\mathbf{x}$  和对  $\mathbf{x}$  估计排除掉近似不可能的热源坐标后重组  $\mathbf{Ab}$  矩阵再次求解  $\mathbf{x}$ . 将多次求解的结果求平均, 可以得到热源项可能分布区域的初步结果. 对该平均值重新进行排除热源重组  $\mathbf{Ab}$  过程, 再次求解  $\mathbf{x}$ , 得到最终的热载荷场. 该过程相当于将分散的热源重新进行聚集.

#### 4 算法有效性仿真和实验验证

对于上述算法进行验证, 即算法是否能够比较



准确地估计多热源信息.

### 4.1 算法仿真验证

首先利用 Comsol 仿真软件模拟不同热源条件在二维平面内稳态情况下的温度分布. 给定一定数目的热源, 热源位置、强度、面积均为已知项, 通过已知的热源条件, 利用 Comsol 仿真软件计算出模型的温度分布. 采集模型边界的温度分布情况作为输入条件, 通过改进的 PPTSVD 算法反演热源分布情况, 利用反演出来的热源项, 通过 (5) 式求出整个二维有界平面内的温度分布情况. 对 Comsol 计算出来的模型的温度场与利用算法反演重构出的温度场进行对比分析并比较给定的热源与反演出的热源的各项参数.

#### 4.1.1 二维均质三热源模型

二维热传导模型边界与外界发生自然对流. 外界设定为空气, 环境温度为  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , 边界半径  $r_0 = 6\text{ cm}$ . 将内热源当作恒温热源来处理, 此时内热源部分的热传导系数可以忽略; 内热源半径为  $r_1$ , 温度为  $T$  位置为  $(x, y)$  [以圆心为基准, 圆心坐标为  $(0, 0)$ ].

热传导模型内部传热方式以热传导方式为主, 热传导参数为  $0.5\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$ , 辐射换热在模型各部分之间温差不大的情况下可以忽略不计. 模型与环境间考虑自然热对流情况, 换热系数与边界温度有关, 这里模型达到稳态时边界温度在  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  左右, 这里换热系数取为  $10\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot^{\circ}\text{C}^{-1}$  [25].

表1 内热源反演结果与真实值对比

Table 1. Internal heat source inversion results compared with the real value.

		坐标 $x$ /cm	坐标 $y$ /cm	内热源温度 $T/^{\circ}\text{C}$	面积 $a$ /cm <sup>2</sup>
热源1	实际值	2.03	3.00	60	12.56
	计算值	2.25	2.64	58.5	7.07
	误差	1.83%	3%	2.5%	43.71%
热源2	实际值	-1.97	3.00	60	28.27
	计算值	-1.63	2.97	60.7	15.90
	误差	2.83%	0.25%	1.17%	43.76%
热源3	实际值	-1.97	-3.00	60	12.56
	计算值	-1.23	-2.16	60.5	8.55
	误差	6.17%	7%	0.83%	31.93%

三热源模型可在一定程度上代表多种热源条件. 边界温度分布形状比较复杂, 随机性加强, 求

解方程组的病态性增大, 更难得到最佳的正则解. 传统算法在估计多热源情形时大都会遇到热源等效的问题, 这里主要验证改进后的 PPTSVD 算法的可行性. 采集模型边界温度分布如图 4 所示, 输入模型边界温度, 利用 PPTSVD 算法反演热源项, 重构出模型所有节点的温度分布, 仿真和反演情况对比如图 5 所示.

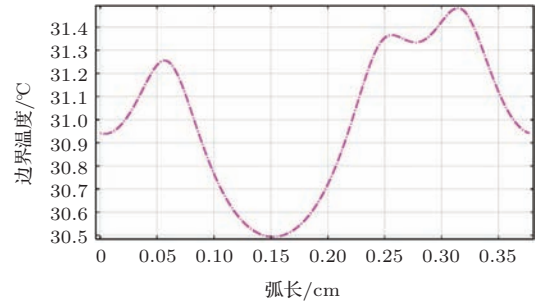


图4 稳态三热源仿真模型边界温度

Fig. 4. The boundary temperature distribution of three heat sources steady-state model obtained by simulation.

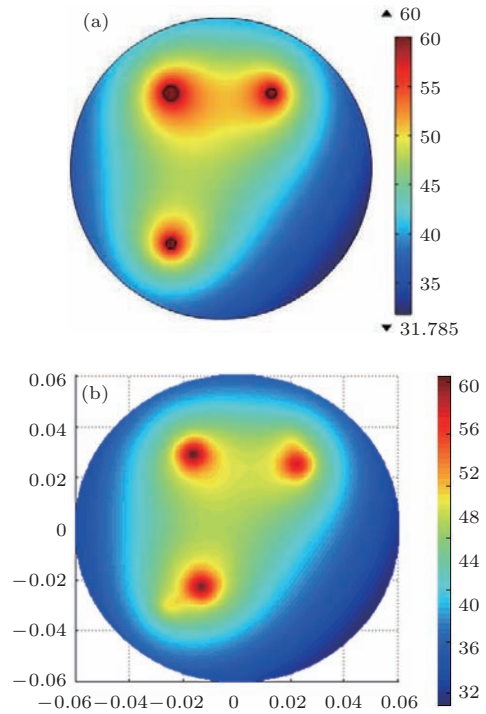


图5 (网刊彩色) 三热源稳态圆域仿真与反演温度分布情况对比 (a) 稳态三热源圆域平面内仿真温度分布; (b) 改进 PPTSVD 算法反演重构出的温度分布

Fig. 5. (color online) Contrast between temperature field of the three heat sources steady-state model obtained by simulation and algorithm: (a) the temperature distribution obtained by simulation in circular steady-state model with three heat sources; (b) the temperature distribution obtained by improved PPTSVD solution in the same conditions.



表 1 中热源项位置坐标误差的计算方式为给定值和反演值之差与模型大小的比值. 由于求解方程组高度欠定, 存在多解的情况, 加上欲匹配的未知数个数成倍增加, 求解真实解的难度进一步增大. 反演结果的精确度仍在可接受的范围内.

上述模型的三组热源的强度设定为一致的, 热源面积不同. 反演出的热源的强度与实际值稍有不同, 多个热源的强度可能会相互影响叠加, 造成其中一个热源的强度比实际的大、而另两个比实际小的情况. 我们发现热源面积与热源强度往往呈现出互补的效果, 即当反演出的热源强度大于给定值时, 热源面积往往表现得比较小, 此消彼长. 这样的结果也符合预期. 热源强度和面积对边界温度的影响作用是相似的. 在小范围内确实并不容易求出两者的精确值, 而对于反演出的热源位置则相对比较准确.

有限元法的优点就是可以适应多种形状, 针对

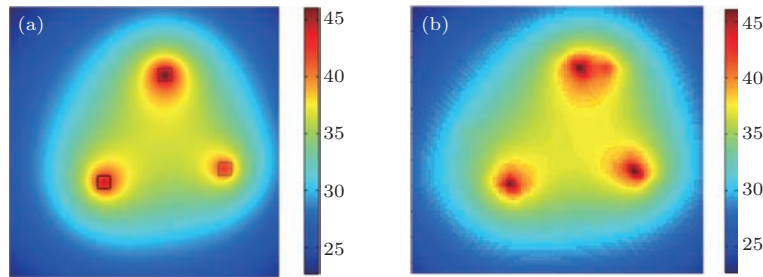


图 7 (网刊彩色) 稳态矩形域模型仿真与反演重构温度分布对比 (a) 矩形域稳态三热源仿真温度分布; (b) 矩形域稳态三热源反演重构温度分布

Fig. 7. (color online) Contrast between temperature field of steady-state rectangle model obtained by simulation and algorithm: (a) the temperature distribution obtained by simulation in rectangle steady-state model with three heat sources; (b) the temperature distribution obtained by improved PPTSVD solution in the same conditions.

表 2 内热源反演结果与给定值对比

Table 2. Contrast between real internal heat sources distribution and obtained by algorithm.

		坐标 $x$	坐标 $y$	内热源温度	面积 $a$
		/cm	/cm	$T/^\circ\text{C}$	/mm <sup>2</sup>
热源 1	实际值	11.6129	14.89	46	1
	计算值	11.3978	15.3191	45.5	0.81
	误差	1.08%	2.15%	1.09%	19%
热源 2	实际值	7.096	7.324	44	1
	计算值	6.8817	6.808	45	0.72
	误差	1.07%	2.58%	2.27%	28%
热源 3	实际值	15.9139	8.51	43	1
	计算值	15.2688	7.87234	45.3	1.20
	误差	3.23%	3.19%	5.35%	20%

矩形的二维有界平面, 我们也对其进行仿真验证. 这里仍然采用相同的边界条件、相同材料、相同的环境温度. 采用正方形平面, 边长为 20 cm. 对二维矩形平面施加三热源, 采集表面温度分布如图 6 所示, 输入模型边界温度, 利用 PPTSVD 算法反演平面内的温度分布, 反演结果与仿真结果比较如图 7 所示.

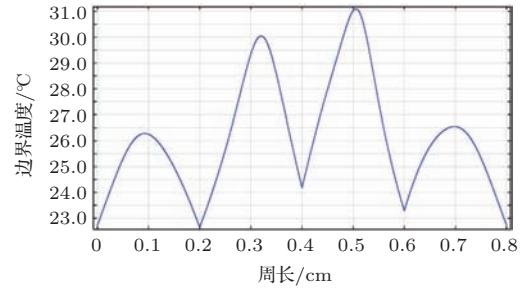


图 6 矩形域稳态三热源仿真得到的四个边界的温度分布  
Fig. 6. The boundary temperature distribution of three heat sources steady-state rectangle model obtained by simulation.

由表 2, 热源项各参数的误差水平表现令我们比较满意, 此处三个热源的真正强度是不同的, 反演出来的三个热源的强度比较相近, 和上一组试验对比分析, 算法的稳定性不足. 多热源情况叠加起来对边界温度产生影响, 根据边界温度进行反演时热源面积也会干扰热源强度项. 在热源强度相差不大时, 反演结果趋于将热源强度的效果转移为热源面积的作用.

#### 4.1.2 二维非均质三热源模型

上述两组实验均验证了均质稳态情况下算法的反演情况. 下面我们将给出一个简单的例子验证改进的 PPTSVD 算法反演非均质材料模型时的准

确性.

如图 8, 矩形域模型被分成 4 个热导率不同的区域, 其中 S1 区域热导率  $k = 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$ , S2 区域  $k = 0.1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$ , S3 区域  $k = 0.5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$ , S4 区域  $k = 2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$ . 同时给定三个不同位置、强度不同的热源进行加热. 环境温度为  $20 \text{ °C}$ , 边界换热系数  $h = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{°C}^{-1}$ , 模型为正方形, 边长为  $20 \text{ cm}$ , 仿真得到模型边界温度分布如图 9, 由仿真得到的模型内温度分布与算法反演重构出的模型内温度分布对比如图 10 所示.

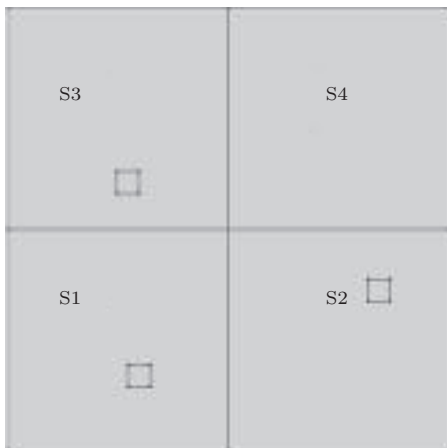


图 8 介质不均匀的三热源矩形域模型

Fig. 8. The three heat sources rectangle model with inhomogeneous thermal conductivity.

由图 9 可以看出, 非均匀介质模型稳态情况下边界的温度分布曲线形状更加复杂. 从表 3 中可以看出, 改进的 PPTSVD 算法仍然可以比较精确地求取出热源的位置参数. 而对热源强度和热源面积的估计仍然不足, 3 个热源均表现为反演热源面积

比实际值小, 而热源强度比实际值大. 该现象有可能与热导率的变化和算法本身的有限元剖分有关, 值得进一步探究. 改进的 PPTSVD 算法对于非均质稳态模型总体的反演结果比较令人满意, 克服了传统数学分析方法的弊端, 展现出数值算法可应对复杂模型方面的优势.

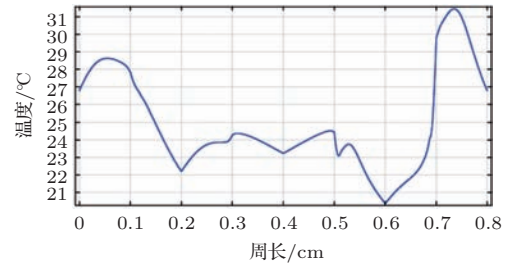


图 9 介质不均匀的三热源矩形域模型稳态下边界温度分布图

Fig. 9. The boundary temperature distribution of three heat sources rectangle steady-state model with inhomogeneous thermal conductivity.

表 3 内热源反演结果与真实值对比

Table 3. Contrast between real internal heat sources distribution and obtained by algorithm.

		坐标 $x$ /cm	坐标 $y$ /cm	内热源温度 $T/\text{°C}$	面积 $a$ /mm <sup>2</sup>
热源 1	给定值	5.4167	12.0987	37.7	1
	反演值	5.25	11.1111	38.1	0.49
	误差	0.83%	4.94%	1.06%	51%
热源 2	给定值	6.0833	3.4568	38.1	1
	反演值	6.0833	3.3745	38.5	0.85
	误差	0%	0.41%	1.05%	15%
热源 3	给定值	16.75	7.3251	40	1
	反演值	17.1667	7.1605	41.3	0.36
	误差	2.08%	0.82%	3.25%	64%

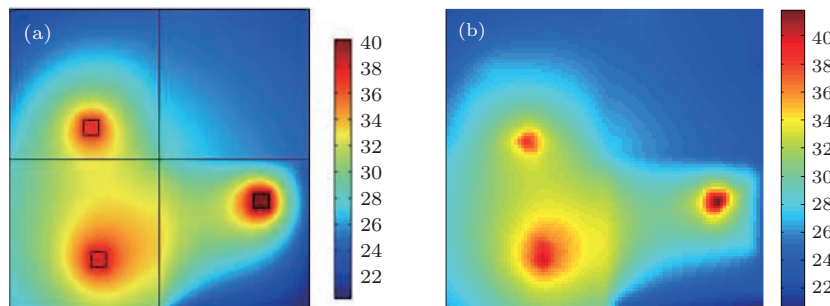


图 10 (网刊彩色) 非均质稳态矩形域模型仿真与反演重构温度分布对比 (a) 非均质矩形域稳态三热源仿真温度分布; (b) 非均质矩形域稳态三热源反演重构温度分布

Fig. 10. (color online) Contrast between temperature field of steady-state inhomogeneous model obtained by simulation and algorithm: (a) the temperature distribution obtained by simulation in rectangle steady-state model with three heat sources; (b) the temperature distribution obtained by improved PPTSVD solution in the same conditions.

### 4.2 实验验证有效性评估

由于本文是研究二维多热源反演问题, 在具体实验条件下, 理想的二维条件难以达到. 在这里, 我们考虑当物体长度远大于横截面半径时, 沿长度方向的物体导热可以近似忽略. 选取了形状比较规则的圆柱状石蜡, 石蜡的密度约  $0.9 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ , 热传导参数为  $0.558 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{°C}^{-1}$ , 比热容为  $3.2 \text{ J}\cdot\text{g}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

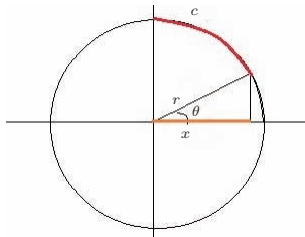


图 11 (网刊彩色) 圆柱截面弧度坐标与正视图坐标关系示意图

Fig. 11. (color online) The relationship of curve coordinate and front view coordinate in cylindrical profile.

石蜡具有良好的可塑性和均匀性. 圆柱形的石蜡的高度  $h$  为 15 cm, 半径  $r$  为 3.375 cm, 高度与半径的比为 4, 该情况可近似当作二维情形处理. 热源采用 3 mm 半径的加热棒, 加热棒垂直插入圆柱石蜡模型内. 利用温度控制器控制加热棒的温度. 环境温度为恒温  $25 \text{ °C}$ , 换热系数取为  $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{°C}^{-1}$ . 用温度控制器控制加热棒的温度. 当边界温度不再变化时, 认为模型达到稳态, 边界温度由红外热像仪获取. 实验示意图见图 13. 由于采用的实验模型为圆柱状石蜡, 采集的边界为圆柱曲面, 需解决圆柱侧表面曲面拼接的问题. 圆柱每旋转  $120^\circ$ , 用红外热像仪采集一幅圆柱的正视图(图 12(a)). 将每一幅圆柱侧表面的正视图按圆柱的曲面关系(如图 11 所示)展开, 即将圆柱的侧表面曲面平铺展开; 将三幅展开后的侧表面热像图拼接成完整的圆柱侧表面(如图 12(b) 所示). 利用

其中的一条边界, 计算出边界的温度. 这里以三热源情况时的实验条件为例, 说明圆柱侧表面正视热像图展开的过程.

$$\begin{cases} c = r(\pi/2 - \theta), \\ x = r \cos \theta. \end{cases} \quad (16)$$

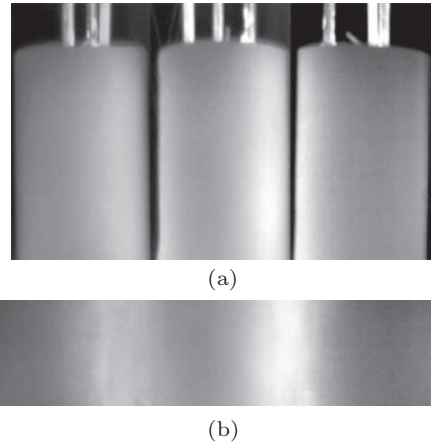


图 12 圆柱侧表面正视图及其经拼合后的完整侧面热像图 (a) 圆柱侧表面正视图; (b) 圆柱侧表面热像图  
Fig. 12. Cylindrical side surface front view and its complete side surface thermography through splicing: (a) cylindrical side surface front view; (b) cylindrical side surface thermography.

根据弧长  $c$  与采集到的正视图像素点所在坐标轴上的距离  $x$  的关系, 利用 (16) 式求出正视图上像素点对应的弧长坐标. 坐标全部映射完毕后, 即可将该正视图展开成其对应的侧表面热像图. 将 3 幅局部的侧表面热像图拼合成完整的侧表面热像图.

由于不能观察到圆柱石蜡模型中间横截面的温度分布情况, 只给出平行横截面圆柱顶层温度分布情况作为参考.

#### (a) 单热源情况

单热源石蜡采集的边界温度分布如图 14 所示, 模型上底面的温度分布与算法反演重构出的圆柱中间截面的温度分布见图 15.

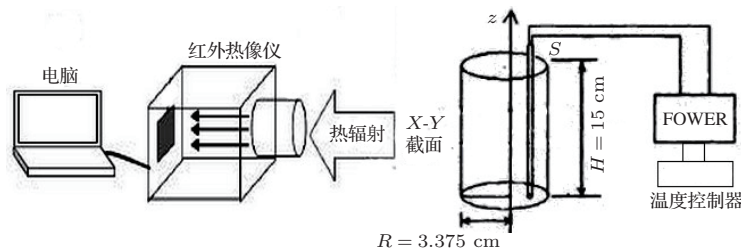


图 13 物理实验示意图

Fig. 13. Physics experiment schematic.

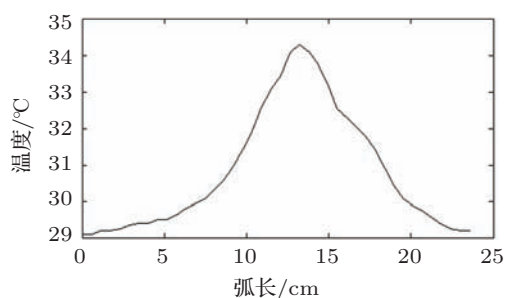


图 14 稳态单热源石蜡采集的边界温度分布图  
Fig. 14. The boundary temperature distribution of single heat source steady-state paraffin model.

虽然稳态时圆柱上底面的温度分布情况并不能代表圆柱中间截面的温度分布情况,但是两者之间的不同仅在于上底面的边界条件不同,由于加热棒是垂直插入圆柱体中,上底面的温度分布的等温线形状特征与中间截面是相近的.热源的各项参

数即加热棒的各项参数是已知的,这里给出上底面的温度分布情况仅在于定性比较算法反演重构出的温度场分布特征是否符合真实的实验情况.由图 15 和表 4 的数据可以看出,算法对于单热源模型还是可以精确地得到热源的位置,重构出的温度场分布特征也与上底面相近.

表 4 内热源反演结果与真实值对比

Table 4. Contrast between real internal heat sources distribution and obtained by algorithm.

	坐标 $x/cm$	坐标 $y/cm$	内热源温度 $T/°C$	面积 $a/mm^2$
实际值	-0.4	1.6	51	28.27
计算值	-0.3	1.7	51.6	19.63
误差	1.33%	1.33%	1.18%	30.56%

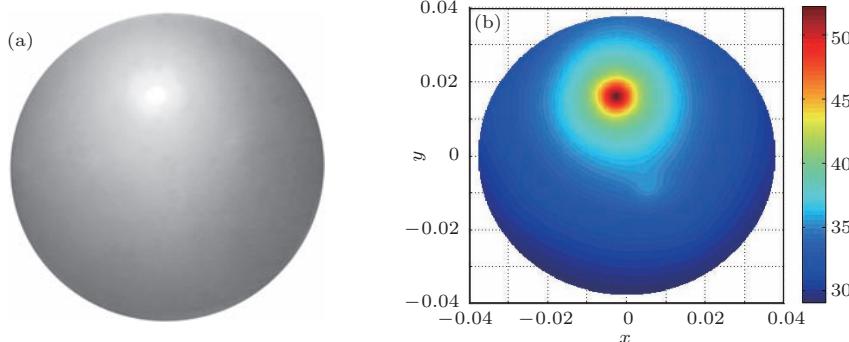


图 15 (网刊彩色) 稳态单热源圆柱实验模型上底面的温度分布与算法反演重构出的圆柱中间截面的温度分布情况对比 (a) 单热源圆柱石蜡稳态上底面温度分布; (b) 由边界温度反演重构出的模型截面温度分布  
Fig. 15. (color online) Contrast between temperature field in top side surface of cylindrical physics experiment steady-state model with single heat source and obtained by algorithm in the middle profile of cylindrical model: (a) the temperature distribution of top side surface in steady-state cylindrical with single line heat source; (b) the temperature distribution of middle profile obtained by improved PPTSVD solution from boundary temperature.

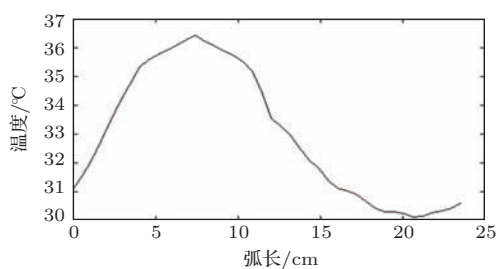


图 16 稳态双热源石蜡采集边界温度分布图  
Fig. 16. The boundary temperature distribution of two heat sources steady-state paraffin model.

(b) 双热源情况

双热源石蜡采集边界温度分布如图 16 所示,圆柱实验模型上底面的温度分布与算法反演重构出的圆柱中间截面的温度分布见图 17.

表 5 内热源反演结果与真实值对比

Table 5. Contrast between real internal heat sources distribution and obtained by algorithm.

		坐标 $x/cm$	坐标 $y/cm$	内热源温度 $T/°C$	面积 $a/mm^2$
热源 1	实际值	0.76	1.78	52	28.27
	计算值	0.75	1.41	51	24.86
	误差	0.15%	4.93%	1.92%	12%
热源 2	实际值	1.74	-0.15	54	28.27
	计算值	1.63	-0.09	55	15.90
	误差	1.47%	0.8%	1.85%	43.7%

双热源情况下,热源相比实际情况,有向内收的趋势,两个热源之间的距离变近了.由表 4 和表 5 可以看出,与单热源情况相比,热源的强度与



真实值之间的误差加大, 出现了热源叠加效应对算法的干扰, 但重构出的温度相对分布与上底面仍然是相近的.

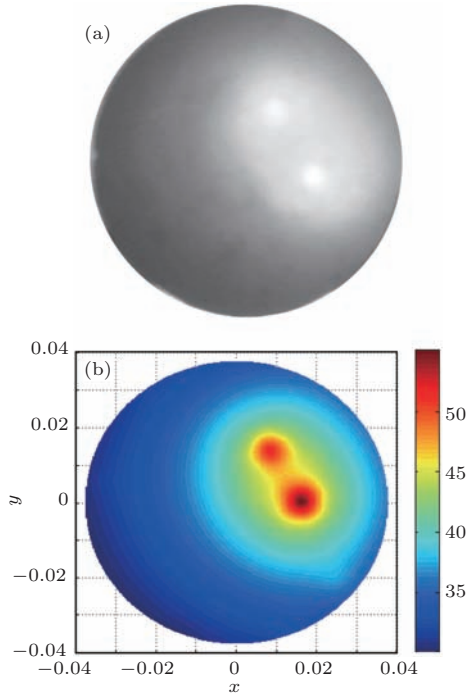


图 17 (网刊彩色) 稳态双热源圆柱实验模型上底面的温度分布与算法反演重构出的圆柱中间截面的温度分布情况对比 (a) 双热源圆柱石蜡稳态上底面温度分布; (b) 由边界温度反演重构出的模型截面温度分布

Fig. 17. (color online) Contrast between temperature field in top side surface of cylindrical physics experiment steady-state model with two heat sources and obtained by algorithm in the middle profile of cylindrical model: (a) the temperature distribution of top side surface in steady-state cylindrical with two line heat sources; (b) the temperature distribution of middle profile obtained by improved PPTSVD solution from boundary temperature.

(c) 三热源情况

三热源石蜡采集边界温度分布如图 18 所示, 圆柱实验模型上底面的温度分布与算法反演重构出的圆柱中间截面的温度分布见图 19.

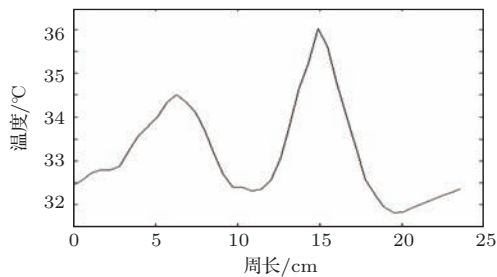


图 18 稳态三热源石蜡采集边界温度分布图

Fig. 18. The boundary temperature distribution of three heat sources steady-state paraffin model.

从表 6 可以看出, 与相应仿真部分对比, 算法反演精确度有所下降, 表现为热源有进一步往内收的趋势, 热源间的距离减小, 同时热源间的相互影

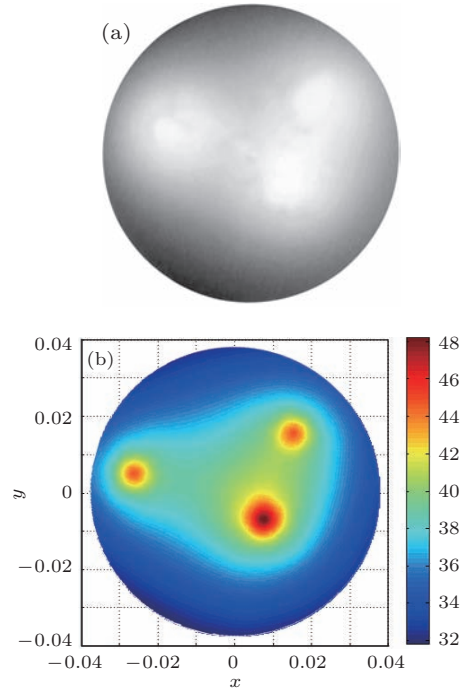


图 19 (网刊彩色) 稳态三热源圆柱实验模型上底面的温度分布与算法反演重构出的圆柱中间截面的温度分布情况对比 (a) 三热源圆柱石蜡稳态上底面温度分布; (b) 由边界温度反演重构出的模型截面温度分布

Fig. 19. (color online) Contrast between temperature field in top side surface of cylindrical physics experiment steady-state model with three heat sources and obtained by algorithm in the middle profile of cylindrical model: (a) the temperature distribution of top side surface in steady-state cylindrical with three line heat sources; (b) the temperature distribution of middle profile obtained by improved PPTSVD solution from boundary temperature.

表 6 内热源反演结果与真实值对比

Table 6. Contrast between real internal heat sources distribution and obtained by algorithm.

		坐标 $x$	坐标 $y$	内热源温度	面积 $a$
		/cm	/cm	$T/^\circ\text{C}$	$/\text{mm}^2$
热源 1	实际值	-2.11	0.69	43.6	28.27
	计算值	-2.59	0.41	44.3	22.89
	误差	6.4%	3.73%	1.606%	9.03%
热源 2	实际值	1.12	1.37	43.8	28.27
	计算值	1.43	1.37	44.6	21.23
	误差	4.13%	0%	1.826%	24.90%
热源 3	实际值	0.89	-0.79	46.2	28.27
	计算值	0.71	-0.79	48	12.57
	误差	2.4%	0%	3.896%	55.54%

响也进一步加强. 即便如此, 从上述实验反演结果来看, 对于分离的热源, 算法仍能较好地对热源进行定位和对模型内温度场重构. 与仿真不同, 实际实验时, 可能由于石蜡的热导率分布不均、环境温度的变化、忽略实验模型与外界发生辐射传导换热以及忽略 $Z$ 轴方向的传热等方面的原因会导致反演误差水平增大.

## 5 总 结

针对仿真和实验对PPTSVD算法有效性和准确性的验证评估结果, 可以看出对于均质和非均质材料模型, 算法都能够较为准确地估计出热源的各项参数, 并对热源进行成像重构出模型内的温度场. 在热源较多的情况下, 算法估计出的热源位置较为准确, 但对热源强度和热源面积的估计仍存在较大的偏差. 这是由于求解方程组高度欠定, 加上热源的强度和面积对边界的温度分布具有相同的作用导致的, 这一部分还值得后续进一步研究. 在对非均质材料进行仿真验证时, 发现热源面积相对实际情况有减小的趋势, 这可能与热导率材料的分布与算法本身的有限元剖分结构有关. 然而, 针对热源反演的大部分应用场合对热源场的强度的绝对值信息要求并不高, 他们更在乎的是整个模型温度场的相对分布. 在对算法进行实验验证时, 在热源较多的情况下容易出现热源间距离减小, 热源往模型内部收紧的现象. 在现有算法基础上, 后续的工作需进一步研究三维稳态多热源模型反演的情况.

边界温度分布的形状信息对热源的反演起着至关重要的作用. 我们利用红外热像仪采集边界的温度分布, 并解决了圆柱面的曲面拼接问题. 之所以采用圆柱状模型是因为它非常适合研究人体组织内热源反演方面的相关应用. 比较遗憾的是, 由于当前实验室条件有限, 并没有对非均质材料热源反演问题进行实验验证, 只进行了部分仿真验证.

## 参考文献

- [1] Beck J V, Blackwell B, Clair C R 1985 *Inverse Heat Conduction: Ill-posed Problems* (New York: Wiley) p119
- [2] Li H Q, Lei J, Liu Q B 2012 *Int. J. Heat Mass Trans.* **55** 4442
- [3] Kolodziej J A, Mierzwiczak M, Ciałkowski M 2010 *Int. Commun. Heat. Mass.* **37** 121
- [4] Yan L, Fu C L, Yang F L 2008 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **32** 216
- [5] Hazanee A, Ismailov M I, Lesnic D, Kerimov N B 2013 *Appl. Numer. Math.* **69** 13
- [6] Geng F, Lin Y 2009 *Comput. Math. Appl.* **58** 2098
- [7] Shi C, Wang C, Wei T 2014 *Appl. Math. Comput.* **244** 577
- [8] Xiong X, Yan Y, Wang J 2011 *J. Phys. : Conf. Ser.* **290** 012017
- [9] Li F L, Zhang H Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 100201
- [10] Nili Ahmadabadi M, Arab M, Maalek Ghaini F M 2009 *Eng. Anal. Bound. Elem.* **33** 1231
- [11] Yang F, Fu C L 2014 *J. Comput. Appl. Math.* **255** 555
- [12] Yang F, Fu C L 2010 *Comput. Math. Appl.* **60** 1228
- [13] Yang L, Dehghan M, Yu J N, Luo G W 2011 *Math. Comput. Simulat.* **81** 1656
- [14] Wu Z, Liu H H, Lebanowski L, Liu Z Q, Hor P H 2007 *Phys. Med. Biol.* **52** 5379
- [15] Jiang Z H, Huang S X, Du H D, Liu B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8968 (in Chinese) [姜祝辉, 黄思训, 杜华栋, 刘博 2010 物理学报 **59** 8968]
- [16] Huang Q X, Liu D, Wang F, Yan J H, Chi Y, Cen K F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6742 (in Chinese) [黄群星, 刘冬, 王飞, 严建华, 池涌, 岑可法 2007 物理学报 **56** 6742]
- [17] Dykes L, Reichel L 2014 *J. Comput. Appl. Math.* **255** 15
- [18] Alifanov 1994 *Inverse Heat Transfer Problems* (New York: Springer-Verlag) p150
- [19] Liu G R, Lee J H, Patera A T, Yang Z L, Lam K Y 2005 *J. Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **194** 3090
- [20] Lu T, Liu B, Jiang P X, Zhang Y W, Li H 2010 *Appl. Therm. Eng.* **30** 1574
- [21] Kim D, Lee H, Won Y, Kim D G, Lee Y, Won H 2003 *J. Bull. Korean Chem. Soc.* **24** 967
- [22] Hansen P C, Mosegaard K 1996 *J. Num. Lin. Alg. Appl.* **3** 513
- [23] Lwaki S, Ueno S 1998 *J. Appl. Phys.* **83** 6441
- [24] Xiao H F 2009 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: Central South University) (in Chinese) [肖宏峰 2009 博士学位论文(长沙: 中南大学)]
- [25] Zhou M H 2009 *Ph. D. Dissertation* (in Chinese) (Nanjing: Nanjing University of Science and Technology) [周敏华 2009 博士学位论文(南京: 南京理工大学)]

# Multiple heat sources with multi-parameter inversion of nondestructive infrared detection\*

Zhang Li-Guang Qu Hui-Ming<sup>†</sup>

(School of Electronic Engineering and Optoelectronics Technology, Nanjing University of Science and Technology,  
Nanjing 210094, China)

( Received 18 July 2014; revised manuscript received 18 December 2014 )

## Abstract

This study deals with the case of multiple internal heat source inversion problem of steady-state based on nondestructive infrared detection. We construct homogeneous and heterogeneous steady heat conduction models of different shapes. Neither the number of heat sources, nor their locations, nor their sizes nor their intensities are known. We use the finite element method (FEM) based on numerical algorithm to analyze the two-dimensional model discretely. The internal heat conduction process of model is analyzed. The resultant temperature field can be decomposed into the temperature field caused by the ambient temperature and those given by internal heat sources. We simplify the finite element matrix equation according to decomposition process above. Finally, the problem boils down to solving the highly underdetermined matrix equation of  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . The unknown  $x$  item corresponds to internal thermal heat source field. The piecewise polynomial spectral truncated singular value decomposition (PPTSVD) is applied for the first time to the inverse heat source problem. Its regular operator matrix is changed from the original more order differential operator matrix to regional node weighted matrix. After replacement this solution improves the effect of heat source field tending to the boundary. Results of the solution confirms a real heat source field when there are less heat sources or different heat sources are far from each other. But there also exists a serious superimposed effect between neighboring heat sources. We improve the algorithm to study this problem through using the iterative elimination process which complies with the idea of spreading heat source field and then gathering. The iteration tolerance and number of times belonging to one single PPTSVD solving process are reduced. Through iterating the multiple PPTSVD solving process and reconstructing matrixes  $\mathbf{A}$  and  $\mathbf{b}$  in each iteration, we obtain the scatter heat source field distribution surrounding real field. Finally, this scattered distribution solution is gathered again. According to the heat source parameter calculated by algorithm, the temperature field of whole model can be reconstructed using FEM. Comsol numerical simulation and real physical experiments are performed to verify the validity and accuracy of the algorithm in different heat conduction models. The results demonstrate that the algorithm can access each parameter of multiple heat sources. Even in the heterogeneous model, it can still obtain accurate results and reconstruct the temperature field of the two-dimensional model. The algorithm can be applied to non-destructive material detection and human infrared medical imaging fields.

**Keywords:** nondestructive detection, multiple internal heat sources inversion, piecewise polynomial truncated singular value decomposition methods, finite element method

**PACS:** 81.70.Fy, 02.30.Zz, 44.10.+i, 47.11.Fg

**DOI:** 10.7498/aps.64.108104

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61171164).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [huimingqu@163.com](mailto:huimingqu@163.com)