带反馈的分数阶耦合布朗马达的定向输运

秦天奇　王飞　杨博　罗懋康

Transport properties of fractional coupled Brownian motors in ratchet potential with feedback

Qin Tian-Qi　Wang Fei　Yang Bo　Luo Mao-Kang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 120501 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.120501
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120501
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I12

带反馈的分数阶耦合布朗马达的定向输运*

秦天奇 王飞 杨博 罗懋康†

(四川大学数学学院, 成都 610065)

(2014 年 12 月 22 日收到; 2015 年 1 月 25 日收到修改稿)

研究具有幂律记忆性的带反馈耦合布朗马达的定向输运现象, 引入分数阶理论, 建立了带反馈的分数阶耦合布朗马达模型, 利用分数阶差分法求得模型数值解并分析了模型参数对合作定向输运性质的影响. 仿真结果表明, 系统的记忆性通过影响带反馈的棘齿势的打开和闭合而影响粒子的定向输运, 即当系统的阶数在较小的范围内, 系统的记忆性会使带反馈的棘齿势的开关频率增加, 从而增大定向流速; 当系统其他参数 (势垒高度、噪声强度等) 固定时, 输运速度随着阶数的变化出现广义随机共振现象.

关键词: 反馈控制, 分数阶布朗马达, 广义随机共振, 定向输运

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj **DOI:** 10.7498/aps.64.120501

1 引 言

分子马达是一类广泛存在于细胞内部的酶蛋白大分子, 能够高效率地将化学能转化为机械能 [1], 几乎参与了所有的生命活动, 如 ATP 合成、肌肉收缩、细胞分裂、信号传导等. 按运动形式, 分子马达可分为线动分子马达和旋转分子马达. 其中线动分子马达的种类繁多, 目前人们对肌球蛋白、驱动蛋白和动力蛋白这三个传统线动马达蛋白的超家族进行了广泛的研究. 其中, 肌球蛋白 V、驱动蛋白和动力蛋白都是双头分子马达, 具有较高的在位比. 为了探寻分子马达动力学机理的合理解释, 人们提出各种模型, 其中最令人感兴趣的是: 把分子马达看作一个布朗粒子, 也称作布朗马达, 并用布朗马达来模拟分子马达的定向运动机理 [2,3].

近年来, 有关布朗马达的定向输运的研究受到广泛关注 [4−26]. 例如, Ai 等 [6] 在其研究中指出系统外界驱动力频率对马达链的运动方向有着重要影响; Dan 等 [7] 在其研究中指出耦合强度、粒子间的平衡位置以及跃迁率等参量都会影响棘轮系统的定向输运. 而在众多的布朗马达模型中, 闪烁棘齿模型是一种被研究得最为广泛的物理模型, 它可以用来解释分子马达或者蛋白质马达的运动 [8−12]. 但这些模型 [8−12] 通常对周期势的研究主要采用不考虑系统状态的开环控制策略. 然而, Cao 等 [13] 提出了更为实际的依赖于系统状态的闭环反馈控制策略, 并被广泛地应用在布朗马达 [14−20]. 研究发现闭环控制下的最优耦合强度可使布朗粒子的平均速度达到最大 [21,22]. 此外, 闭环控制策略不仅可以解释相关生物分子马达的步进机理及高效率 [23−25], 还可以改进棘轮的技术与应用 [26]. 鉴于闭环控制策略在布朗棘轮定向输运中的优越性能的表现, 本文将采用该控制方法.

同时, 迄今为止, 对分子马达的研究大都基于整数阶随机微分方程的数学模型, 而在现实中存在许许多多的复杂系统, 一些物理、生物过程以及黏弹性材料均具有“记忆性”, 而整数阶动力系统在刻画这些过程时具有突出的局限性; 特别地, 在一些远离平衡的复杂系统中, 弛豫为关于时间的幂律衰减, 朗之万方程中的阻尼速度不再适用. 大多数实验证明, 细胞内部的环境 (细胞质、细胞核等) 具有黏弹性 [27−29], 而一般考虑分子马达输运的模型中, 却忽略了对分子马达运动环境的考虑. 对上述问

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 和电子信息控制重点实验室基金 (批准号: 2013035) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

题的处理方法是引入分数阶微积分, 把轨道的历史贡献进来, 将通常的阻尼速度改为分数阶速度(即位置的分数阶导数[30]), 例如Widom[31]通过将分数阶微积分引入到Langevin方程, 从而得到广义Langevin方程并利用此方程求解了球形颗粒在黏性流体中的布朗运动. 由于分数阶微积分具有时间记忆性以及长程空间相关性, 近年来得到了迅速发展并广泛应用于黏弹性材料、反常扩散和输运机理的研究中[32,33]. 本文将分数阶微积分理论引入带反馈的耦合布朗马达合作输运, 建立带反馈的分数阶耦合粒子在非对称棘齿势场中的输运模型, 进而研究了在黏性介质中粒子链的定向输运现象, 并通过数值模拟分析了模型参数对粒子链平均位移和平均速度的影响. 发现系统阶数可以通过影响带反馈棘齿势的打开与闭合而影响粒子链输运速度, 在系统棘齿势峰值高度等参数固定时, 定向输运速度将随系统阶数变化出现广义随机共振现象. 所谓广义随机共振是指系统响应的某些函数随系统的特征参数非单调变化的现象[34], 即存在最佳参数使得函数值达到最大.

2 模 型

2.1 广义Langevin方程

在牛顿黏弹性介质中布朗粒子受到的阻尼力与历史速度有关, 其运动状态用广义Langevin方程描述:

$$m\ddot{x}+\int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(x,t)+\varepsilon(t). \tag{1}$$

由于布朗粒子的质量很小, 在过阻尼情况下, 方程(1)可近似为如下过阻尼广义Langevin方程:

$$\int_0^t \gamma(t-\tau)\dot{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(x,t)+\varepsilon(t), \tag{2}$$

其中, $\gamma(t)$是阻尼核函数, $F(x,t)$是确定性的外部作用力, $\varepsilon(t)$是零均值Gauss噪声. 本文视$\varepsilon(t)$为内噪声(与系统所受阻尼力同源), 则与阻尼核函数$\gamma(t)$[35]满足涨落耗散定理: $\langle\varepsilon(t)\varepsilon(t')\rangle = \kappa_{\mathrm{B}}T\gamma(t-t')$, κ_{B}是Boltzman常数, T是介质温度.

在许多物理和生化环境中, 介质对速度通常具有幂律记忆性, 即距当前时刻越近, 其记忆性就越强. 幂律阻尼核函数可表示为

$$\gamma(t)=\frac{1}{\Gamma(1-p)}|t|^{-p}\quad(0<p<1). \tag{3}$$

阻尼核函数(3)式的图像如图1所示, 可以看到p越小, $\gamma(t)$衰减得越慢, 对应阻尼核的记忆性就越强. 则具有幂律阻尼核的过阻尼广义Langevin方程为

$$\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t (t-\tau)^{-p}\dot{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = F(x,t)+\varepsilon(t). \tag{4}$$

又根据Cauputo分数阶微积分的定义[36]:

$${}_0^C D_t^p x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t (t-\tau)^{-p}\dot{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad (0<p<1), \tag{5}$$

其中${}_0^C D_t^p x(t)$表示$x(t)$在区间$[0,\ t]$上的p阶Cauputo微分, 因此(4)式可以写为

$${}_0^C D_t^p x(t)=F(x,t)+\varepsilon(t)\quad(0<p<1), \tag{6}$$

(6)式称为分数阶过阻尼Langevin方程.

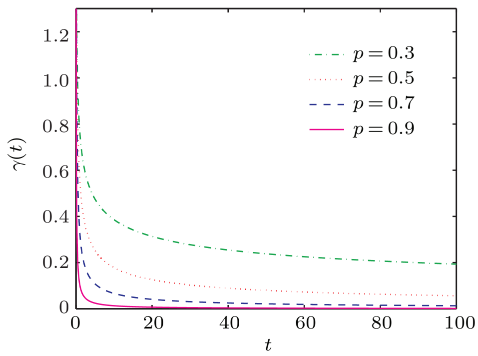

图1 (网刊彩色) 阻尼核函数$\gamma(t)$

Fig. 1. (color online) Damping kernel function $\gamma(t)$.

2.2 带反馈的过阻尼分数阶耦合布朗马达模型

本文采用分数阶过阻尼Langevin方程描述耦合系统的动力学行为:

$${}_0^C D_t^p x_1(t)=\alpha(t)F(x_1(t))-k(x_1-x_2-a)+\xi_1(t), \tag{7}$$

$${}_0^C D_t^p x_2(t)=\alpha(t)F(x_2(t))+k(x_1-x_2-a)+\xi_2(t), \tag{8}$$

其中, $\xi_1(t)$和$\xi_2(t)$是均值为零的高斯白噪声, k为弹簧的弹性系数, a为弹簧的原长. 当系统在t时刻时, 粒子1和粒子2的位置分别为$x_1(t)$和$x_2(t)$, $F(x_i(t))=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}U(x_i)$, $U(x_i)$为分子马达与轨道之间的相互作用势函数, 该势场是一维非对称的

周期势场(图2), 周期$L = 1$, 且可以在两态之间闪烁:

$$U(x_i) = -\frac{U_0}{2\pi}\left[\sin(2\pi x_i) + \frac{1}{4}\sin(4\pi x_i)\right]. \quad (9)$$

$\alpha(t)$为控制参数, 它的取值为1和0. 在研究分子马达时, 当它取1时, 马达与微管紧紧结合, 此时马达感到一个非对称的周期势, 马达处于结合态; 当它取0时, 马达不与微管结合, 马达处于分离态. 为了更深入地研究反馈势, 我们选取这样一个规则[13]来控制$\alpha(t)$的取值: $\alpha(t) = \mathrm{E}(f(t))$, 其中

$$f(t) = \frac{1}{2}[F(x_1(t)) + F(x_2(t))], \quad (10)$$

$f(t)$为加到两个粒子上的平均力值的大小, $\mathrm{E}(f(t))$为Heaviside函数, 如果$f(t) \geqslant 0$, $\alpha(t)$就取1, 如果$f(t) < 0$, $\alpha(t)$就取0. $\alpha(t)$的取值依赖于耦合的两个粒子的位置, 也就是说, 由于反馈控制的存在, 粒子不再是独立的, 粒子在每一时刻所感觉到的这个非对称势究竟是打开还是闭合的, 完全依赖于两个粒子在上一时刻所在的位置.

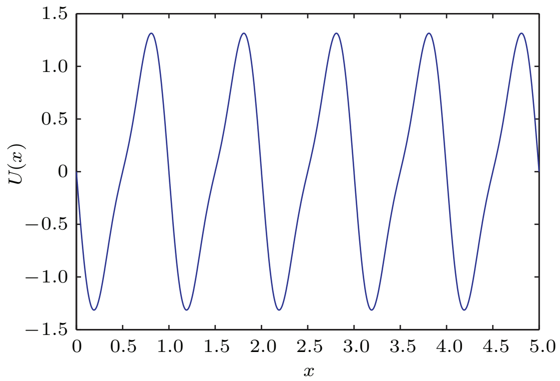

图2　势函数$U(x)$示意图

Fig. 2. Schematic of the potential function $U(x)$.

3　带反馈的过阻尼分数阶布朗马达定向输运机理

本文利用系统耦合粒子所受势场合力的状态来控制回路, 即通过监测粒子任一时刻所在的位置得出势场合力的状态, 来控制势的打开和闭合, 当非对称势作用在粒子上的合力为正值时就让势打开, 当合力为负值时就让势关闭, 这样的控制就是一种反馈控制. 力学态与化学态的结合可为该控制机理提供一个实例: 分子马达催化ATP水解发生随机涨落, 同时也发生ATP的结合、水解、ADP和Pi的释放等其他持续且具周期性的化学反应, 进而导致马达本身构型发生变化, 进而导致马达头部的轨道作用力大小的变化; 这些变化表现为势在两态(含棘齿势的态与自由扩散态)之间的闪烁, 使马达在热扩散的基础上出现宏观的定向运动.

在这样的反馈控制下, 把粒子位置的变化和粒子与轨道之间的作用力的变化对应起来, 两个粒子便不再是独立的, 粒子在每一时刻所感觉到的这个非对称势究竟是打开还是闭合的, 完全依赖于两个粒子在上一时刻所在的位置; 反之, 势如果是打开的, 从宏观上看, 也将为两个粒子提供动量, 反过来也会影响粒子的行为.

另一方面, 在我们所讨论的分数阶模型中, 粒子在t时刻所受阻尼力为

$$\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^t (t-\tau)^{-p}\,\dot{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

即阻尼力是时段$[0,\ t]$内的速度关于幂律记忆性阻尼核函数$\gamma(t)$的加权和. 由前面分析可知, p越小$\gamma(t)$衰减越慢, 意味着对当前阻尼力有贡献的历史随之变长, 阻尼力随之变强, 导致阻尼力与反馈控制下的棘齿势所产生的作用力相互竞争合作.

进一步考虑势垒峰值高度对耦合粒子输运速度的影响: 当粒子受到的阻尼力较大(系统阶数较小)时, 势垒峰值高度对粒子的输运速度影响较小, 耦合粒子受到的反馈势施加的作用力与阻尼力的合力起主导地位, 此时阻尼力足够大, 使得反馈棘齿势的开关频率与反馈棘齿势所给粒子的势场力有着竞争合作的关系, 此时系统通过增加反馈棘齿势的开关频率使耦合粒子可以跃过势垒, 形成定向流且速度较大; 当粒子受到的阻尼力较小(系统阶数较大)时, 势垒峰值高度起主导地位, 当粒子运动到势阱底部时, 粒子越过势垒的概率就变小, 输运速度也会逐渐下降.

4　数值模拟与分析

为了模拟方程(7)和(8)所刻画的布朗粒子运动, 我们采用分数阶差分法[37], 其计算公式如下:

$$\begin{aligned} x_1(t_j) = T_{\mathrm{s}}^p \Big[& -\alpha(f(t_{j-1}))\frac{\partial U(x_1)}{\partial x_1} \\ & - k(x_1(t_{j-1}) - x_2(t_{j-1}) - a) \\ & + \sqrt{2D}\xi_i(t_{j-1}) \Big] \\ & - \sum_{l=1}^{j-1}(-1)^l \binom{p}{l} x_1(t_{j-1}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2(t_j) = & T_s^p\Big[-\alpha(f(t_{j-1}))\frac{\partial U(x_2)}{\partial x_2} \\
& + k(x_1(t_{j-1}) - x_2(t_{j-1}) - a) \\
& + \sqrt{2D}\xi_i(t_{j-1})\Big] \\
& - \sum_{l=1}^{j-1}(-1)^l\binom{p}{l}x_2(t_{j-1}),
\end{aligned}
$$

其中, T_s是采样时间; $t_j=(j-1)T_s$, $j=1,2,\cdots,n$;

$$
\binom{p}{l} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-l+1)\,l!}.
$$

为了研究涨落存在时耦合布朗马达的输运特性, 我们采用棘齿系统的平均速度来描述粒子的定向输运. 平均速度的表达式如下:

$$
\langle V\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\sum_{i=1}^{2}\int_0^T \dot{x}_i(t)\,\mathrm{d}t.
$$

采用Monte Carlo方法, 取800次仿真实验的平均值作为两个粒子的平均位移$\langle x_1\rangle$, $\langle x_2\rangle$, 并通过公式$x=(x_1+x_2)/2$, 得到两个粒子质心x的平均位移$\langle x\rangle$. 采样时间间隔$T_s=0.005$ s, 仿真时间取100 s, 空间周期取$L=1$, 如无特别说明, 正弦棘齿势峰高度$U_0=7.5$, 耦合系数$k=1.2$, 弹簧长度$a=0.62$, 噪声强度$D=0.8$.

4.1 反馈棘齿势的开关机状态

由于耦合粒子一直处于运动状态, 故单个耦合粒子的运动在通常长度的观测时间段里棘齿势的开关频率很高, 很难表现出明显的规律. 图3给出了粒子的8000条轨道取平均后对应的棘齿势的开关情况($\alpha(t)$取1时开, $\alpha(t)$取0时关). 从图3(a)和图3(b)可以看到: 当阶数比较小(例如0.4)时, 反馈棘齿势的开关频率较高, 且在阶数为0.525左右, 反馈棘齿势的开关较为规律; 当系统阶数较大(例如0.575)时, 反馈棘齿势的开关频率减低; 当系统阶数更大(接近1)时, 粒子的开关机频率较低, 棘齿势处于长时间开或关的状态. 由于棘齿势的打开与闭合又与粒子所在的位置有关, 由此可以推出, 棘齿势若长时间处于打开或闭合状态, 粒子较难越过势垒, 即粒子的输运速度将减小.

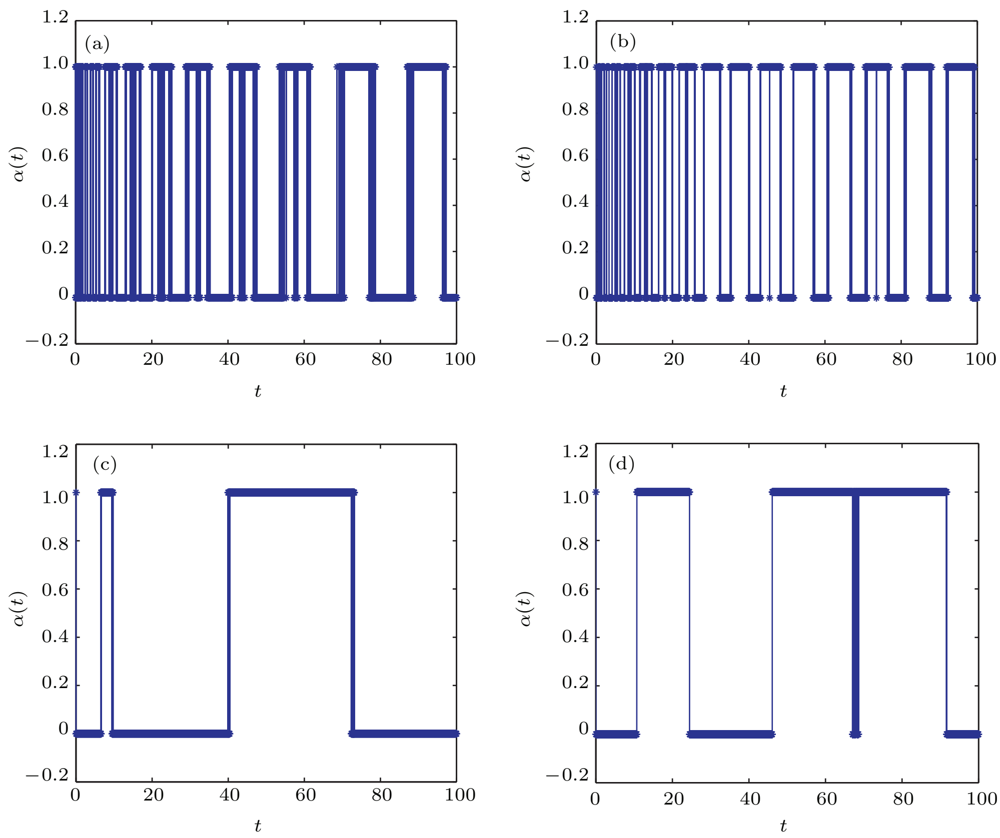

图3 不同阶数下反馈势的开关规律随时间的变化 (a) $p=0.4$; (b) $p=0.525$; (c) $p=0.575$; (d) $p=1$

Fig. 3. The on-off switching rule of feedback potential changing over time under different orders: (a) $p=0.4$; (b) $p=0.525$; (c) $p=0.575$; (d) $p=1$.

从图3还可以观察到: 起初棘齿势的开关频率较高, 随着时间的增加, 棘齿势的开关频率变低, 但最终会趋于稳定. 这是由于系统具有记忆性的缘故. 因为我们将细胞内部环境假定为分数阶牛顿黏弹性体, 介质对速度具有幂律记忆性, 因此在初始的运动中产生了“瞬时弹性”效应, 但最终反馈棘齿势的开关规律逐渐稳定下来并处于一直较为稳定的状态, 实验中观察到的现象也大多是处于稳定状态的现象.

4.2 粒子链平均位移

图4给出了在系统其他参数不变、只改变系统阶数情况下每个粒子的位移 $\langle x_1\rangle$, $\langle x_2\rangle$ 及两个粒子的平均位移 $\langle x\rangle$ 随时间的变化. 从图4可以看到, 当系统阶数 p 较小时, 粒子的总的速度流方向是正向的; 当 p 在0.525左右时, 粒子速度流比较规律且较稳定; 当 p 较大(例如0.575)时, 粒子会在势垒底部停留较长的时间后再越过势垒; 当 p 更大(例如1)时, 粒子就更难越过势垒, 会长时间地停留在势阱底部.

产生这些现象的主要原因在于系统的阶数会影响反馈势的开关情况, 即当阶数在一定范围内, 系统的记忆性会通过增加反馈势的开关频率从而增大速度流, 并且当阶数较小时, 阻尼力较大, 耦合粒子在反馈势施加的力和阻尼力的竞争下运动, 但又由于反馈势开时, 耦合粒子受到的势场合力总是大于零, 故总体的速度流是正向的. 当阶数较大时, 反馈势的开关频率降低, 此时势垒峰值高度占主导地位, 粒子在势阱底部越过势垒的概率降低, 粒子会长时间停留在势阱底部.

从图4的内插图可以看到, 耦合粒子运动8000次取平均位移的结果首先是速率变小, 但后来会趋于稳定的直线运动, 这也是耦合粒子在具有记忆性的黏弹性环境下运动的表现. 并且可以对比得到当系统阶数为1(即忽略耦合粒子的运动环境具有记忆性这一特点)时, 耦合粒子的8000次平均轨道再取平均的运动速率更接近匀速, 这也与其他的理想介质下的模型相符合.

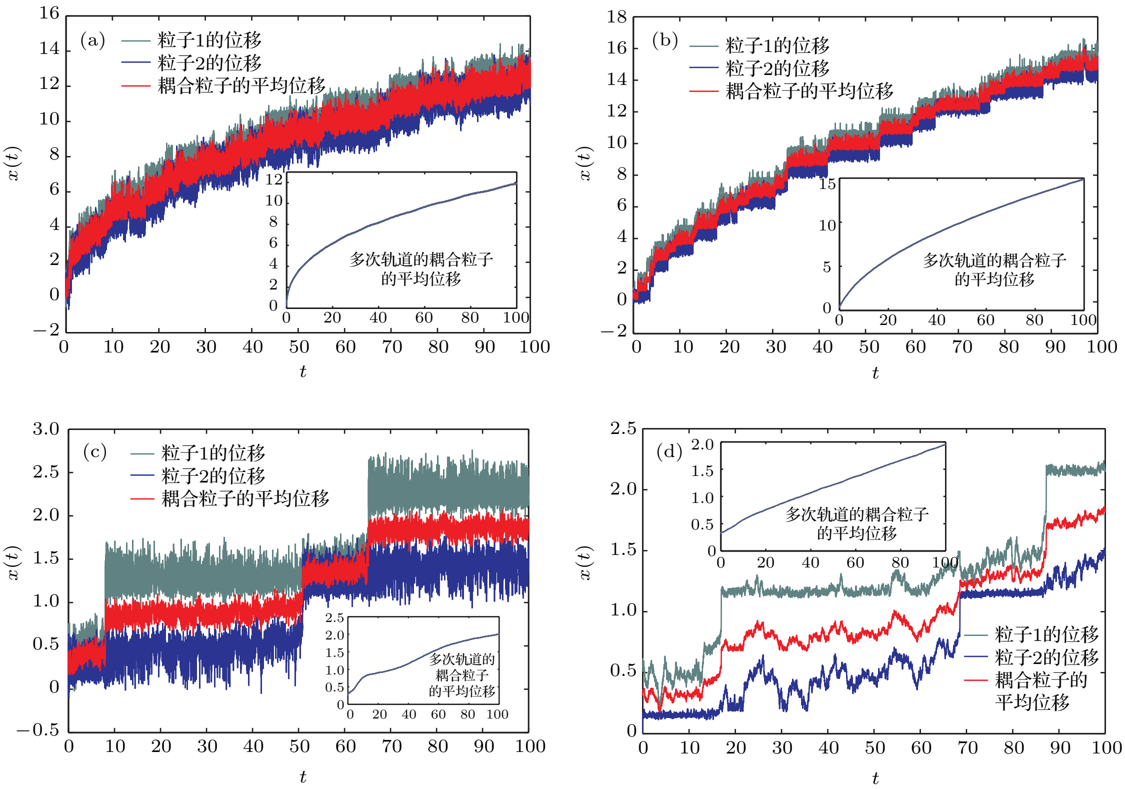

图4 (网刊彩色) 不同阶数下粒子的位移随时间的变化(内插图为耦合粒子的8000次轨道的平均位移) (a) $p=0.4$; (b) $p=0.525$; (c) $p=0.575$; (d) $p=1$

Fig. 4. (color online) The particle’s displacement changing over time under different orders: (a) $p=0.4$; (b) $p=0.525$; (c) $p=0.575$; (d) $p=1$. Insets describe the average displacement of the coupled particles by 8000 times simulation.

4.3 粒子链平均速度与阶数的关系

图5给出了在不同噪声强度(图5(a))下及不同棘齿峰值高度(图5(b))下粒子链平均速度V与系统阶数p的关系. 在图5(a)和图5(b)中均能观测到明显的随阶数p变化的共振峰, 而且当系统阶数达到某一数值时, 粒子链的平均速度迅速下降, 并稳定到一个较小的值的附近, 此时反馈势的开关频率较低, 势垒峰值高度占主导地位, 粒子会长时间停留在势阱底部.

由图5(a)可以观察到, 噪声的强度越大, 粒子的输运速度越快, 即噪声可以加大系统的输运速度; 由图5(b)可以观察到, 在无势场情况($U_0 = 0$)下, 粒子链并未发生定向运动, 势场存在时, 可以观察到棘齿势峰值高度越高, 粒子链极大平均速度就越大, 且达到极大值的阶数p越大. 这些都是系统的反馈势给粒子链的作用力、由系统的记忆力产生的阻尼力与系统的棘齿势峰值高度竞争合作的结果.

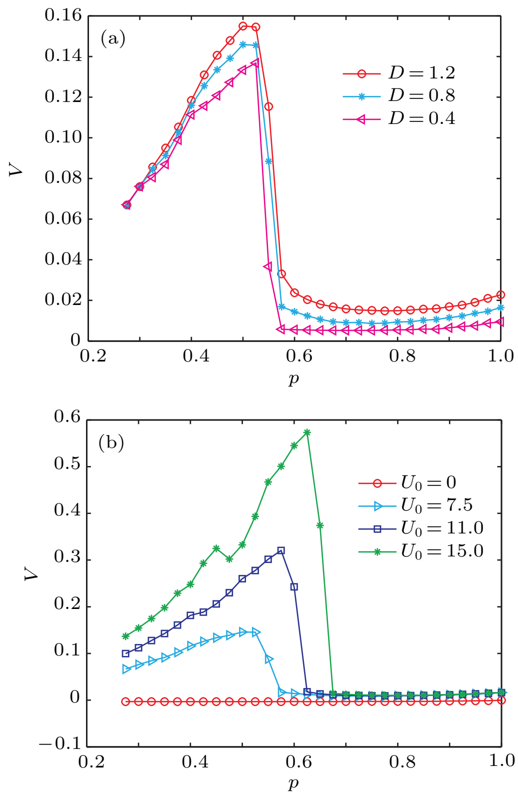

图5 (网刊彩色) 粒子平均速度V与阶数p的关系 (a) 不同噪声强度下V与p的关系; (b) 不同峰值高度下V与p的关系

Fig. 5. (color online) The particle's average velocity V changing with order p: (a) V changing with p under different noise intensities; (b) V changing with p under different depths of the ratchet.

5 结 论

近年来, 反馈棘齿系统中的定向输运问题引起了学者们的关注, 并取得了一些研究成果, 但大多数研究仍受限于整数阶系统的固有刻画能力. 本文为此引入分数阶微积分理论, 建立带反馈的分数阶耦合粒子在棘齿势场中的输运模型, 并利用分数阶差分法求得模型数值解. 数值分析结果表明: 1) 系统的记忆性通过增加反馈棘齿势的开关频率来增大速度流; 2) 在其他参数固定的情况下, 系统的速度流随阶数的变化产生随机共振现象; 3) 粒子链的定向输运速度同样受到噪声强度和棘齿势的峰值高度的影响. 上述结论可应用到一些生物过程、分子马达的控制等方面.

参考文献

[1] Nishyama M, Muto E, Inoue Y, Yanagida T, Higuchi H 2001 *Nature Cell Biology* **3** 425

[2] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57

[3] Cordova N G, Ermentrout B, Oster G 1992 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **89** 339

[4] Gao T F, Zhang Y, Chen J C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3279

[5] Zeng C H, Wang H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050502

[6] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2011 *Phys. Rev. E* **83** 051106

[7] Dan D, Jayannavarar A M, Menon G I 2003 *Physica A* **318** 40

[8] Rozenbaum V M, Yang D Y, Lin S H, Tsong T Y 2006 *Physica A* **363** 211

[9] Dinis L, Parron do J M R, Cao F J 2005 *Europhys. Lett.* **71** 536

[10] Lindén M, Tuohimaa T, Jonsson A B, Wallin M F 2006 *Phys. Rev. E* **74** 021908

[11] Craig E M, Zuckermann M J, Linke H J 2006 *Phys. Rev. E* **73** 051106

[12] Lattanzi G, Maritan A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 1134

[13] Cao F J, Dinis L, Parrondo J M R 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 040603

[14] Feito M, Cao F J 2006 *Phys. Rev. E* **74** 041109

[15] Feito M, Cao F J 2007 *Eur. Phys. J. B* **59** 63

[16] Feito M, Cao F J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 061113

[17] Feito M, Cao F J 2008 *Physica A* **387** 4553

[18] Gao T F, Chen J C 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 065002

[19] Zhao A K, Zhang H W, Li Y X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110506

[20] Wang L F, Gao T F, Huang R Z, Zheng Y X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 070502 (in Chinese) [王莉芳, 高天附, 黄仁忠, 郑玉祥 2013 物理学报 **62** 070502]

[21] Evstigneev M, Gehlen S, Reimann P 2009 *Phys. Rev. E* **79** 011116

[22] Gao T F, Liu F S, Chen J C 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020502

[23] Bier M 2007 *Biosystems* **88** 301

[24] Zhang H W, Wen S T, Chen G R, Li Y X, Cao Z X, Li W 2012 *Chin. Phys. B* **21** 038701

[25] Bustamante C, Chemla Y R, Forde N R, Izhaky D 2004 *Annu. Rev. Biochem.* **73** 705

[26] Cao F J, Feito M, Touchette H 2009 *Physica A* **388** 113

[27] Mathur A B, Collinsworth A M, Reichert W M, Kraus W E, Truskey G A 2001 *J. Biomech.* **34** 1545

[28] Azuma N, Aysin S D, Ikeda M, Kito H, Akadaka N, Sasajima T, Sumpio B E 2000 *J. Vasc. Surg.* **32** 789

[29] Guilak F, Tedrow J R, Burgkart R 2000 *Biochem. Biophys. Res. Commun.* **269** 781

[30] Bao J D 2012 *Introduction to Anomalous Statistics Dynamics* (Beijing: Science Press) p196 (in Chinese) [包景东 2012 反常统计动力学导论 (北京: 科学出版社) 第196页]

[31] Widom A 1971 *Phys. Rev. A* **3** 1394

[32] Lin L F, Zhou X W, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 240501 (in Chinese) [林丽烽, 周兴旺, 马洪 2013 物理学报 **62** 240501]

[33] Bai W S M, Peng H, Tu Z, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210501 (in Chinese) [白文斯密, 彭皓, 屠浙, 马洪 2012 物理学报 **61** 210501]

[34] Gitterman M 2005 *Phys. Stat. Mech. Appl.* **352** 309

[35] Oldham K B, Spanier J 1974 *The Fractional Calculus* (New York: Academic Press)

[36] Liu F, Anh V, Turner I, Zhuang P 2003 *J. Appl. Math. Comput.* **13** 233

[37] Petrás I 2011 *Fractional-Order Nonlinear Systerms Modeling, Analysis and Simulation* (1st Ed.) (Beijing: Higher Education Press) p19

Transport properties of fractional coupled Brownian motors in ratchet potential with feedback*

Qin Tian-Qi Wang Fei Yang Bo Luo Mao-Kang†

(*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

(Received 22 December 2014; revised manuscript received 25 January 2015)

Abstract

Based on the theory of fractional integration, direct transport behaviors of coupled Brownian motors with feedback control in viscoelastic media are investigated. The mathematical model of fractional overdamped coupled Brownian motors is established by adopting the power function as damping kernel function of general Langevin equation due to the power-law memory characteristics of cytosol in biological cells. Numerical solution is observed by fractional difference method and the influence of model parameters on cooperative direct transport of the coupled Brownian motors is discussed in detail by numerical simulation. The research shows that the memory of the fractional dynamical system can affect the direct transport phenomenon of the coupled Brownian motors through changing the on-off switching frequency of the ratchet potential with feedback control. To be more specific, in a proper range of the fractional order, the memory of the dynamical system can increase the on-off switching frequency of the ratchet potential, which can lead to the velocity increase of the direct transport. Furthermore, in the case of small fractional order, since the coupled Brownian motors move under the competition between the damping force with memory and the potential force with feedback control, the resultant force exerted on the coupled particles is always positive when the ratchet potential with feedback control is on although the fractional damping force is large, which leads to the result that the coupled Brownian motors move in the positive direction in the mass. On the contrary, in the case of large fractional order, the on-off switching frequency of potential with feedback control becomes small, as a result of which the main influential factor of the direct transport becomes the potential depth. Therefore the coupled Brownian motors are more likely to stay in the potential wells for a long time because the probability that describes the possibility that the coupled Brownian motors surmount the potential barriers becomes small. Finally, with the parameters of the fractional dynamical system (e.g. potential depth, noise intensity) fixed, the direct transport velocity of the coupled Brownian motors shows the generalized stochastic resonant phenomenon while the fractional order varies.

Keywords: feedback control, fractional Brownian motors, generalized stochastic resonance, directed transport

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj **DOI:** 10.7498/aps.64.120501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grand No. 11171238) and the Foundation of Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, China (Grant No. 2013035).

† Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn