

一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔

杨科利

Period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap

Yang Ke-Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 120502 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.120502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I12>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

两级式光伏并网逆变器建模与非线性动力学行为研究

Numerical modeling and research on nonlinear dynamic behaviors of two-stage photovoltaic grid-connected inverter

物理学报.2015, 64(13): 130503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130503>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

Duffing 系统随机相位抑制混沌与随机共振并存现象的机理研究

Mechanism for the coexistence phenomenon of random phase suppressing chaos and stochastic resonance in Duffing system

物理学报.2015, 64(10): 100501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100501>

太赫兹场和倾斜磁场对超晶格电子动力学特性调控规律研究

Nonlinear electron transport in superlattice driven by a terahertz field and a tilted magnetic field

物理学报.2015, 64(9): 090502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.090502>

一种基于人工蜂群算法的混沌信号盲分离方法

A blind source separation method for chaotic signals based on artificial bee colony algorithm

物理学报.2015, 64(9): 090501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.090501>

一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔*

杨科利†

(宝鸡文理学院非线性研究所, 宝鸡 721016)

(陕西师范大学物理与信息技术学院, 理论与计算物理研究所, 西安 710062)

(2014年10月9日收到; 2015年2月2日收到修改稿)

研究了一类可变禁区不连续系统的加周期分岔行为, 发现由可变禁区导致不同类型的加周期分岔. 研究表明, 系统的迭代轨道和禁区的上下两个边界均可发生边界碰撞, 从而产生加周期分岔. 基于边界碰撞分岔理论, 定义基本的迭代单元, 解析推导出了相应的分岔曲线, 在全参数空间中给出了不同加周期所出现的范围. 与数值模拟结果比较, 理论分析结果与数值结果高度一致.

关键词: 不连续, 禁区, 边界碰撞分岔

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.64.120502

1 引言

自李雅普诺夫和庞加莱开创了非线性动力学研究以来, 非线性动力学引发了研究者的广泛关注, 也得到了显著的发展. 以前的大量工作多集中于对时间连续系统的研究. 最近, 一类离散时间系统、分段线性映射引起了研究者的兴趣. 这类系统在经济^[1]、社会、生物以及工程领域^[2]都有广泛的应用, 能够很好地解释我们身边的一些神秘的自然现象. 分段线性系统的一个重要特性就是分段函数的边界可以将系统的相空间划分成不同的区域, 且每一区域都有不同的函数表达式. 每一个区域中的函数表达式除了函数域两端的取值外, 函数是处处光滑的, 而函数域两端的取值将导致函数在此处不可微, 称其为不连续边界. 随着系统参数的变化, 当系统的稳定点落在不连续边界上, 随后系统参数发生微小的变化, 将导致系统的状态有很大的改变, 称之为边界碰撞分岔. 这类分岔在电子及电气工程领域有重要意义.

随着对分段线性系统的深入研究, 研究者发现

实际的动力学系统不仅仅有不可微的这一种情况, 它还有另一种情形, 即动力学系统中存在禁区, 在数学上表现为系统的函数表达式本身就不连续, 例如神经元模型、心脏模型^[3]、张弛及冲击振子^[4,5]、控制系统^[6]和DC-DC转换器^[7]等. 近年来, 相继报道了一些有关含有禁区的分段线性系统的研究结果^[8,9]. 归根于线性系统的特性, 这类系统常常可以解析地进行分析, 但是由于有禁区的存在, 在禁区的边界不同动力学的开关将会产生丰富的动力学现象. 何大韧等^[10-15]对同时含有禁区 and 不可逆属性的分段线性映射系统做了一系列的研究工作, 发现当系统中同时包含禁区 and 不可逆两种属性时, 系统将展现出奇特的动力学行为. Qu等^[16]最近也在相同的系统中发现了不同吸引子共存的特性, 并给出了其形成的机理.

然而, 以前的工作主要集中在固定禁区 and 不可逆相互作用的研究. 事实上, 实际系统中还存在做可变禁区的情形, 例如神经元模型中放电电压峰值和重置电压之间存在一个禁区, 并且对于大多数神经元这一重置电压没有固定的数值^[17,18], 它是可变的, 这就产生了一可变禁区. 对于含可变禁区的

* 国家自然科学基金(批准号: 11205006)、陕西省科技新星专项(批准号: 2014KJXX-77)和宝鸡文理学院重点科研项目(批准号: ZK15028)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: klyang@163.com

分段线性不连续系统的研究还相对较少, 可变禁区在边界碰撞分岔中所起的作用还不明朗. 因此有必要对含可变禁区的不连续系统的分岔行为进行深入研究.

本文着重研究可变禁区下分段线性系统的分岔现象, 进一步研究由可变禁区导致的加周期分岔. 本文的第二部分给出含有可变禁区分段线性系统的具体数学模型, 第三部分对加周期现象进行详细的理论分析和讨论, 最后给出简要的结论.

2 模型

本文所用模型是由张弛振子简化而来, 它同时含有禁区 and 不可逆两种属性. 对于固定禁区 and 不可逆两种属性同时出现已有广泛的研究^[19,20]. 模型的数学表达式如下:

$$x_{n+1} = f_m(x_n) = k_m \cdot x_n + b_m \pmod{1}, \quad (1)$$

其中 $m = 1, 2, 3, 4$, 表示模型有四段分支. 同时有

$$k_1 = \frac{y_b - y_a}{x_b}, \quad b_1 = y_a, \quad x \in [x_a, x_b];$$

$$k_2 = \frac{y_c - y_b + \mu}{x_c - x_b},$$

$$b_2 = y_b - \mu - k_2 \cdot x_b, \quad x \in [x_b, x_c];$$

$$k_3 = \frac{1 - y_c - \varepsilon}{x_0}, \quad b_3 = 1 - x_f \cdot k_3, \quad x \in [x_c, x_f];$$

$$k_4 = \text{constant}, \quad b_4 = \text{constant}, \quad x \in [x_f, 1.0].$$

由于函数值无法迭代到 $f_2(x_c)$ 和 $f_3(x_c)$ 之间所夹区域, 我们称此区域为禁区; $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 函数值有重叠的区域, 我们称其为不可逆区. 这里 ε 和 μ 为系统的两个控制参数, 分别控制系统的可变禁区的大小和系统的不可逆属性. 其他参数分别为 $x_0 = 0.147121$, $x_a = 0.0$, $y_a = 0.203921$, $x_b = 0.107663$, $x_c = 0.350000$, $y_c = 0.460000$, $x_f = 0.497121$, $y_b = y_a - \mu$, $k_4 = 0.405507$ 和 $b_4 = -0.201586$. 何大韧先生对这类映射做过一系列的研究工作^[19,20], 由于这一系统同时具有不连续和不可逆两种动力学属性, 发现了许多有趣的现象, 模型相对比较成熟. 然而由于以前的研究工作仅针对固定禁区的情形, 在实际系统中常常存在可变禁区的情形, 本文尝试讨论含有可变禁区时系统的动力学的变化. 可变禁区在实际系统中表现为: 神经元模型中放电电压峰值和重置电压之间的不连续区域, 并且对于大多数神经元这一重置电压没

有固定的数值, 导致这一不连续是可变的, 此外在金融领域也有相应的可变不连续分段映射模型. 因此此模型与许多实际系统密切相关. 我们着重研究可变禁区下分段线性系统的分岔现象, 弱化不可逆属性的影响, 所以限定 ε 在 $[0.3, 0.5]$ 范围内. 此时无论 μ 怎么变化, 系统都不会迭代到 f_1 分支上, 系统的动力学行为主要由可变禁区影响.

3 结果与分析

为了研究系统的分岔行为, 我们以 ε 和 μ 为控制参数数值分析系统的周期或混沌状态, 数值结果见图 1. 图 1 中灰色表示系统处于混沌态, 其他颜色代表系统处于周期态, 由蓝色到红色, 周期逐渐增高. 从图 1 可以看出, 除了右下角系统处于混沌态以外, 在其他参数下系统都将处于周期态, 最低的周期分别是周期 4 和周期 5, 分别用 P_4 和 P_5 表示, 其他周期如 P_5 的左侧有 P_4 , P_9 , P_{14} , $P_{19}, \dots$; P_5 的右侧有 P_{16} , P_{21} , P_{26} , $P_{31}, \dots$, 都是以加 5 的加周期状态出现.

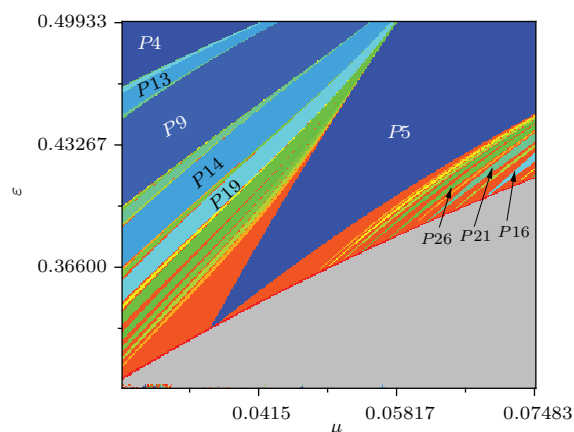


图 1 (网刊彩色) 基于参数 ε 和 μ 系统的分岔图. 灰色表示系统处于混沌态, 其他颜色代表系统处于周期态, 由蓝色到红色, 周期逐渐增高

Fig. 1. (color online) Bifurcation diagram based on the ε and μ . Gray indicates chaotic state, and other colors indicate periodic state, and the color changes from blue to red with the increase of the period.

下面逐一分析不同周期态形成的条件. 首先分析 P_5 周期态, 为了描述清楚, 选取 P_5 区域中的 3 个位置的参数分别绘制系统迭代的蛛网图, 保持 $\mu = 0.05$ 不变, 分别选取禁区宽度 $\varepsilon = 0.3815$, 0.4 , 0.442 , 系统迭代的蛛网图如图 2(a)–(c) 所示. 由图 2 可以看出, 周期 5 区域的右边界对应着不动点从右侧开始碰撞禁区的右边界, 周期 5 区域的

左边界对应着不动点从左侧开始碰撞禁区的左边界. 周期5区域就是由禁区左边界碰撞线和右边界碰撞线围成的区域, 处于此区域内时系统将表现出稳定的周期5状态, 见图2(c). 仔细分析图2, 可以发现周期5迭代具有一定的规律, f_2 分支上迭代3次, f_3 和 f_4 分支上分别迭代一次, 即 $f_2 \rightarrow f_2 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3 \rightarrow f_4 \rightarrow f_2$. 此时系统与禁区左侧边界碰撞的条件应为

$$f_2 f_2 f_4 f_3 f_2(x_c) = x_c. \quad (2)$$

同样地, 与禁区右侧边界碰撞应满足

$$f_2 f_2 f_2 f_4 f_3(x_c) = x_c. \quad (3)$$

解方程(2)和(3), 可得

$$B_{P5}^L = \varepsilon(\mu), \quad (4)$$

$$B_{P5}^R = \varepsilon(\mu), \quad (5)$$

这里 B_{P5}^L 和 B_{P5}^R 分别表示与禁区的左边界和右边界的碰撞曲线, 它们都是 ε 和 μ 的函数. 这两条曲线之间的区域就形成了稳定的周期5状态, 如

图2(d)所示. 应用同样的方法, 也可以确定出周期4区域的右边界 B_{P4}^R , 即图2(d)中黑色曲线. 比较图2(d)和图1, 理论分析的结果和数值模拟的结果完全一致.

接下来分析图1中的两个加周期区域. 首先分析周期5左侧的加周期区域. 这一区域中最大的加周期区域是周期9, 我们以周期9为例分析加周期区域的边界. 按照分析周期5区域的方法, 仍然固定 μ 参数, 改变禁区的宽度 ε , 绘制不同参数下的蛛网图, 寻找周期9迭代的规律.

图3给出了不同参数条件下系统的蛛网图, 可以看出, 周期9和周期5有相似的地方, 都会出现与禁区的两个边界相碰撞的情形, 而且周期9迭代也有一定的规律, f_2 分支上迭代5次, f_3 和 f_4 分支上分别迭代两次, 即 $f_2 \rightarrow f_3 \rightarrow f_4 \rightarrow f_2 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3 \rightarrow f_4 \rightarrow f_2 \rightarrow f_2$. 为了方便起见, 我们定义两个迭代单元,

$$\begin{aligned} I_5 &= f_2 f_2 f_4 f_3 f_2, \\ I_4 &= f_2 f_2 f_4 f_3, \end{aligned} \quad (6)$$

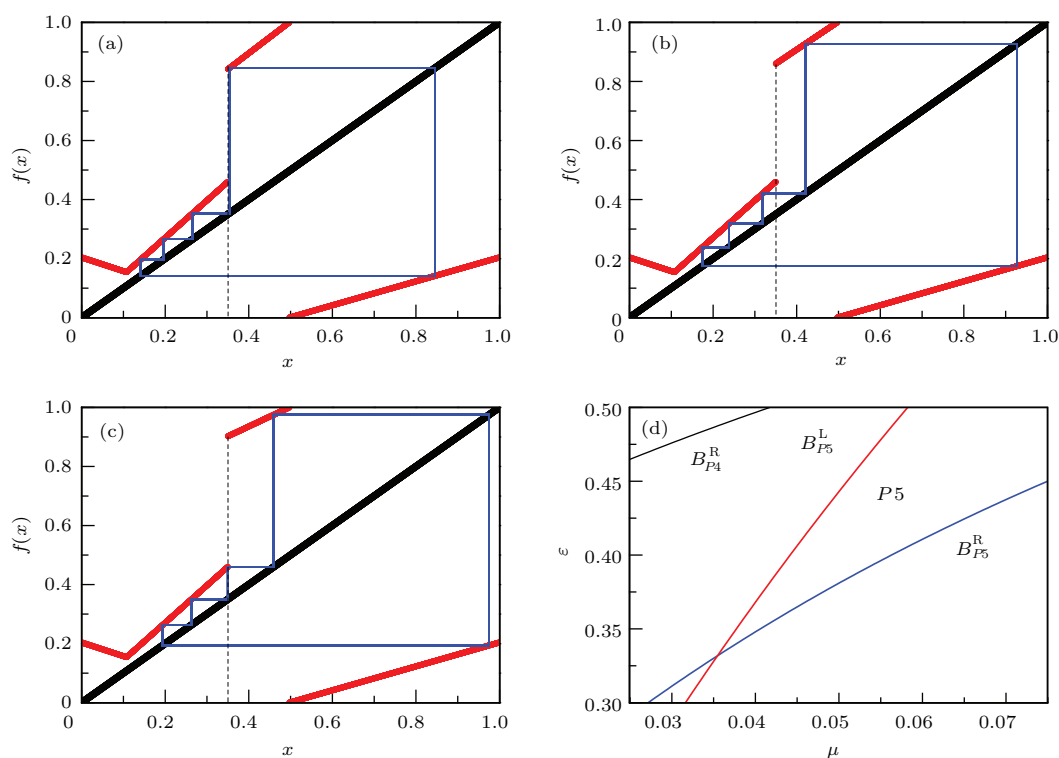


图2 (网刊彩色) 周期5状态下, 不同 ε 和 μ 参数时系统迭代的蛛网图 (a) 与禁区右侧发生边界碰撞, $\varepsilon = 0.3815$, $\mu = 0.05$; (b) 稳定周期5迭代蛛网图, $\varepsilon = 0.4$, $\mu = 0.05$; (c) 与禁区左侧发生边界碰撞, $\varepsilon = 0.442$, $\mu = 0.05$; (d) 理论分析周期5存在的区域

Fig. 2. (color online) The iteration sequences of stable period-5 attractor for the control parameter $\mu = 0.05$: (a) collide with the gap on the right side, $\varepsilon = 0.3815$; (b) stable period-5 attractor, $\varepsilon = 0.4$; (c) collide with the gap on the left side, $\varepsilon = 0.442$; (d) the result of theoretical prediction for period-5 attractor.

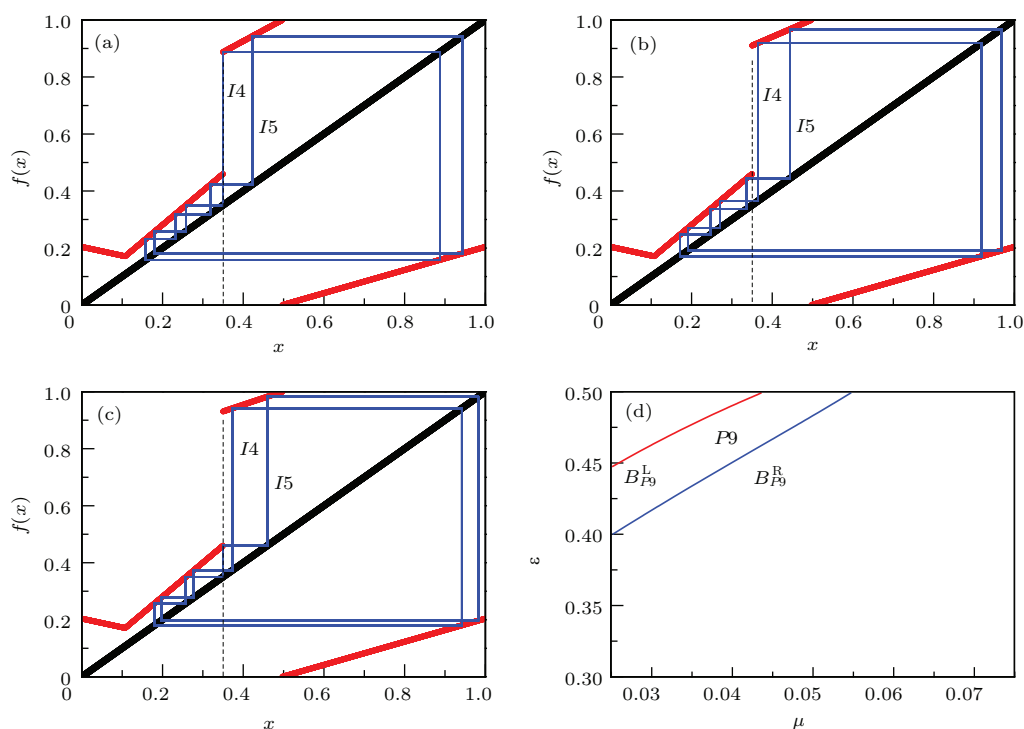


图3 (网刊彩色) 周期9状态下, 不同 ε 和 μ 参数时系统迭代的蛛网图 (a)与禁区右侧发生边界碰撞, $\varepsilon = 0.427$, $\mu = 0.033$; (b) 周期9迭代蛛网图, $\varepsilon = 0.45$, $\mu = 0.033$; (c) 与禁区左侧发生边界碰撞, $\varepsilon = 0.47$, $\mu = 0.033$; (d) 理论预测周期9存在的区域

Fig. 3. (color online) The iteration sequences of stable period-5 attractor for the control parameter $\mu = 0.033$: (a) collide with the gap on the right side, $\varepsilon = 0.427$; (b) stable period-9 attractor, $\varepsilon = 0.45$; (c) collide with the gap on the left side, $\varepsilon = 0.47$; (d) the result of theoretical prediction for period-9 attractor.

详细迭代见图3, 这样周期9就可以看作两个迭代单元 I_5 和 I_4 组合而成, 即 I_4I_5 . 周期9发生边界碰撞的情形只能是迭代单元 I_4 从右侧与禁区的上边界碰撞, 迭代单元 I_5 从左侧与禁区的下边界碰撞. 所以稳定的周期9只能处于这两条边界碰撞线以内的区域, 即

$$\begin{aligned} I_4I_5(x_c) &= x_c, \\ I_5I_4(x_c) &= x_c. \end{aligned} \quad (7)$$

解方程(7), 可得周期9与禁区的上下两个边界碰撞的边界碰撞曲线,

$$\begin{aligned} B_{P9}^L &= \varepsilon(\mu), \\ B_{P9}^R &= \varepsilon(\mu). \end{aligned} \quad (8)$$

周期9将出现在由方程8两条边界碰撞曲线所围成的区域, 见图3(d), 与图1比较, 可以看出我们的理论分析结果和数值模拟的结果完全一致.

以上我们分析了周期9区域的形成条件, 发现周期9是由两个迭代单元 I_5 和 I_4 组合而成, 实际上周期5左侧的加周期区域都可以按照此方法分析, 它们都是由 I_5 和 I_4 两个迭代单元按一定顺序组合

形成. 通过绘制不同参数下的蛛网图(为了简便起见, 这里不再给出图形), 发现这一区域的周期状态都是按照以下规律由两个迭代单元 I_5 和 I_4 组合而成:

$$(I_5)^n I_4 I_5, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$n = 0$ 对应周期9, $n = 1$ 对应周期14, 以此类推. 同时, 发生边界碰撞的情形也只能是迭代单元 I_4 从右侧与禁区的上边界碰撞, 迭代单元 I_5 从左侧与禁区的下边界碰撞. 所以相应的周期状态发生边界碰撞应满足

$$\begin{aligned} (I_5)^n I_4 I_5(x_c) &= x_c, \\ (I_5)^{n+1} I_4(x_c) &= x_c. \end{aligned} \quad (10)$$

解方程(10), 可得相应周期轨道与禁区的上下两个边界碰撞的边界碰撞曲线,

$$\begin{aligned} B_{P_{4+5n}}^L &= \varepsilon(\mu), \\ B_{P_{4+5n}}^R &= \varepsilon(\mu). \end{aligned} \quad (11)$$

对于周期5左侧的区域, 其中任意两个周期之间的区域仍可以按照上述的方法进行分析, 不再赘述.

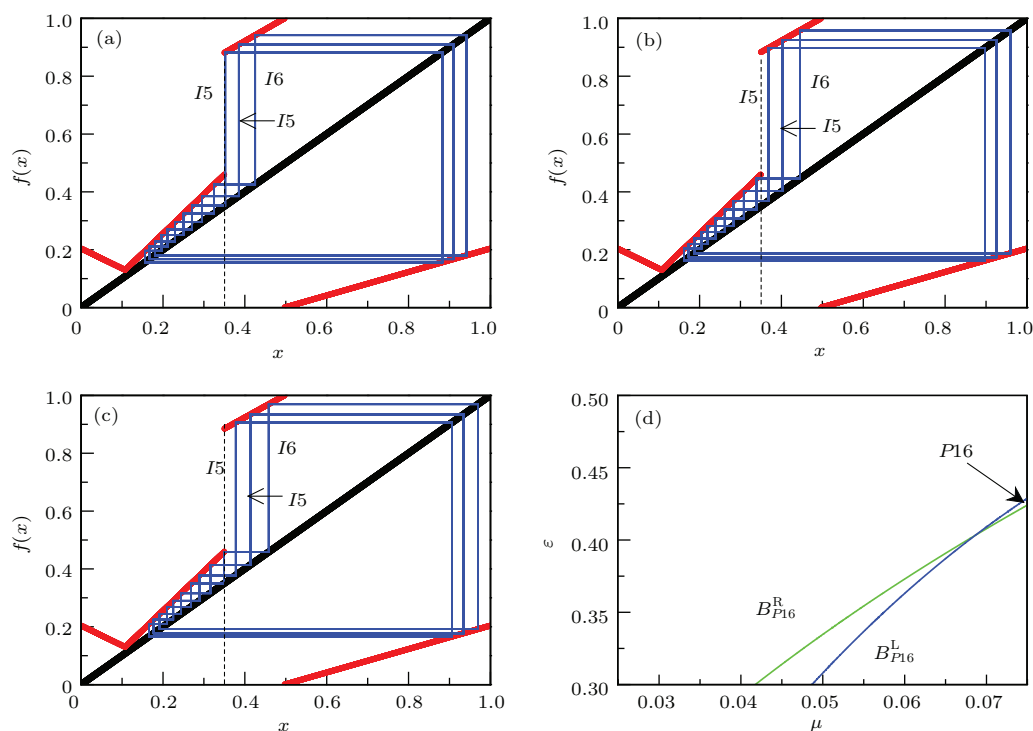


图4 (网刊彩色) 周期16状态下不同 ε 和 μ 参数时系统迭代的蛛网图 (a)与禁区右侧发生边界碰撞, $\varepsilon = 0.421$, $\mu = 0.074$; (b)周期16迭代蛛网图, $\varepsilon = 0.423$, $\mu = 0.074$; (c)与禁区左侧发生边界碰撞, $\varepsilon = 0.425$, $\mu = 0.074$; (d)理论预测周期16存在的区域

Fig. 4. (color online) The iteration sequences of stable period-16 attractor for the control parameter $\mu = 0.074$: (a) collide with the gap on the right side, $\varepsilon = 0.421$; (b) stable period-16 attractor, $\varepsilon = 0.423$; (c) collide with the gap on the left side, $\varepsilon = 0.425$; (d) the result of theoretical prediction for period-16 attractor.

接下来我们讨论周期5区域右侧的加周期状态. 以最容易出现的周期16为例, 仍然选取不同的参数绘制周期16轨道迭代的蛛网图, 结果如图4所示. 由图4可以看出, 周期16轨道是由两个 I_5 迭代单元和1个 I_6 组成, 即 $I_5 I_6 I_5$, 其中 I_5 迭代单元可以从右侧靠近禁区的上边界与边界碰撞(图4(a)), I_6 迭代单元可以从左侧靠近禁区的下边界与边界碰撞(图4(c)). 分析图4发现, 迭代单元的迭代顺序应为

$$\begin{aligned} I_5: & f_2 f_2 f_2 f_4 f_3, \\ I_6: & f_2 f_2 f_2 f_4 f_3 f_2. \end{aligned} \quad (12)$$

相应的稳定的周期16只能处于这两条边界碰撞线以内的区域, 即

$$\begin{aligned} I_5 I_5 I_6(x_c) &= x_c, \\ I_5 I_6 I_5(x_c) &= x_c. \end{aligned} \quad (13)$$

解方程(13), 可得周期16与禁区的上下两个边界碰撞的边界碰撞曲线,

$$B_{P16}^L = \varepsilon(\mu),$$

$$B_{P16}^R = \varepsilon(\mu). \quad (14)$$

周期16将出现在由方程(14)两条边界碰撞曲线所围成的区域, 如图4(d)中箭头所指区域. 此区域中的其他周期轨道仍然是由 I_5 和 I_6 两个迭代单元组成, 其一般的组合形式为 $(I_5)^n I_6$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, 当 n 给定, 其所对应的周期区域的两个边界可以按照边界碰撞曲线求解:

$$\begin{aligned} (I_5)^n I_6(x_c) &= x_c, \\ (I_5(x_c))^{n-1} I_6 I_5(x_c) &= x_c. \end{aligned} \quad (15)$$

解方程(15), 可得相应周期轨道与禁区的上下两个边界碰撞的边界碰撞曲线:

$$\begin{aligned} B_{P_{6+5n}}^L &= \varepsilon(\mu), \\ B_{P_{6+5n}}^R &= \varepsilon(\mu). \end{aligned} \quad (16)$$

对于周期5右侧的区域, 其中任意两个周期之间的区域仍可以按照上述的方法进行分析, 如图5中由蓝色和绿色虚线所围成的红色区域, 实际上此区域还有其他更高周期存在, 我们只给出了低于30的周期区域.

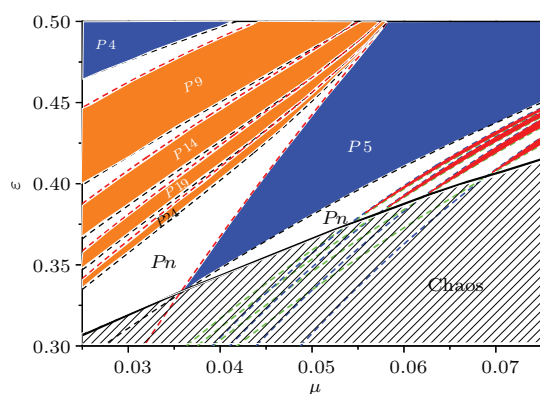


图5 (网刊彩色) 全参数空间理论分析求解出的分岔图. 阴影区域为混沌态, 其他颜色代表不同的周期态, 白色区域为高周期态, 虚线表示边界碰撞分岔线

Fig. 5. (color online) The result of theoretical prediction based on the ε and μ . The grey shaded area indicates chaotic state, other colors indicate periodic state, and the white color indicate the longer period. The dash line denotes the border collision curve.

图1所示的分岔图右下方有一块混沌区域, 在混沌区域和周期态之间有一条明显的分界线, 接下来理论分析这条分界线. 由图5可以看出, 这一条分界线刚好处于左右边界碰撞分岔同时发生的区域, 如 $B_{P_5}^L$ 和 $B_{P_5}^R$ 的交叉点, $B_{P_{16}}^L$ 和 $B_{P_{16}}^R$ 的交叉点, $B_{P_{21}}^L$ 和 $B_{P_{21}}^R$ 的交叉点, $B_{P_{26}}^L$ 和 $B_{P_{26}}^R$ 的交叉点等, 所以可以由此解出这边界线, 其应满足

$$B_{P_n}^L = B_{P_n}^R. \quad (17)$$

由于 $B_{P_n}^L$ 和 $B_{P_n}^R$ 都是 ε 和 μ 的函数, 解方程(17)可以求得一组 $(\varepsilon_0^n, \mu_0^n)$, 连接所有的 $(\varepsilon_0^n, \mu_0^n)$ 就构成了周期和混沌态的分界线, 如图5红色实线所示.

图5给出了理论分析得到的周期态所存在的区域, 我们只给出了周期小于30的周期态的分布. 比较图1的数值模拟结果, 理论分析结果和数值结果高度一致, 说明本文分析方法是可信的.

4 结 论

本文研究了具有可变禁区的不连续系统的分岔行为, 发现系统的禁区宽度作为控制参数时会导致不同的加周期现象. 由于禁区的存在, 此时系统的不连续有两个边界, 禁区的上下两个边界. 详细的分析表明此类加周期出现的原因正是迭代轨道和禁区的上下两个边界碰撞而产生的, 相应的周期轨道所处的区域就对应着禁区上下边界碰撞所限制的参数范围内. 按照边界碰撞的思想, 通过定义基本迭代单元, 我们解析出不同加周期区域在全参

数空间中的分布. 通过分析全参数空间下系统由混沌到周期的过渡规律, 理论分析出了系统中混沌和周期的边界线. 通过与数值模拟结果比较, 证明我们的理论分析结果与数值结果高度一致. 研究可变禁区不连续动力学的分岔有助于深入理解不连续性对系统动力学的影响, 丰富人们对不连续动力系统的认识, 有助于我们认识含有可变不连续的实际系统. 此外能够帮助我们深入理解神经元的放电模式和神经网络中形成的各种同步斑图.

参考文献

- [1] Puu T, Gardini L, Sushko I 2005 *J. Econ. Behav. Organ.* **56** 331
- [2] Banerjee S, Ranjan P, Grebogi C 2000 *IEEE Trans. Circuits-I* **47** 633
- [3] Loskutov A Y 1993 *Physica A* **26** 4581
- [4] Lamba H, Budd C J 1994 *Phys. Rev. E* **50** 84
- [5] Wang J, Ding X L, Hu B, Wang B H, Mao J S, He D R 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026202
- [6] Zhushubaliyev Z T, Mosekilde E 2003 *Bifurcation and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems* (Singapore: World Scientific)
- [7] Ren H P, Liu D 2005 *Chin. Phys.* **14** 1352
- [8] Kollar L E, Stepan G, Turi J 2004 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **14** 2341
- [9] Hogan S, Higham L, Griffin T 2007 *Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys.* **463** 49
- [10] Qu S X, Wu S, He D R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 402
- [11] Qu S X, Wu S, He D R 1997 *Phys. Lett. A* **231** 152
- [12] He D R, Wang B H, Bauer M, Habip S, Krueger U, Martienssen W, Christiansen B 1994 *Physica D* **79** 335
- [13] Dai J, Chu X S, He D R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3979 (in Chinese) [戴俊, 褚翔升, 何大韧 2006 物理学报 **55** 3979]
- [14] Christiansen B, Habip S, Bauer M, Krueger U, Martienssen W, He D R, Wang B H 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 711 (in Chinese) [Christiansen B, Habip S, Bauer M, Krueger U, Martienssen W, 何大韧, 汪秉宏 1993 物理学报 **42** 711]
- [15] Qu S X, Christiansen B, He D R 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 841 (in Chinese) [屈世显, Christiansen B, 何大韧 1995 物理学报 **44** 841]
- [16] Qu S X, Lu Y Z, Zhang L, He D R 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4418
- [17] Izhikevich E M 2003 *IEEE Trans. Neural Network* **14** 1569
- [18] Ibarz B, Casado J M, Sanjuan M A 2011 *Phys. Rep.* **501** 1
- [19] Qu S X, Christiansen B, He D R 1995 *Phys. Lett. A* **201** 413
- [20] He Y, Jiang Y M, Shen Y, He D R 2004 *Phys. Rev. E* **70** 056213

Period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap^{*}

Yang Ke-Li[†]

(Nonlinear Research Institute, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721016, China)

(Institute of Theoretical and Computational Physics, School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 9 October 2014; revised manuscript received 2 February 2015)

Abstract

The period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap are observed for two control parameters. Various period-adding bifurcations are found by simulations. The bifurcation diagram can be divided into two different zones: chaos and period. The period attractor takes up a considerable part of the parameter space, and all of them show stable period attractors. The periodic zone can also be divided into three different zones: stable period-5 attractor, period-adding bifurcations on the right side of period-5 attractor, and period-adding bifurcations on the right side of period-5 attractor. We choose various control parameters to plot the cobweb of period attractor, and find that it will exhibit a border-collision bifurcation and the period orbit loses its stability, once the position of iteration reaches discontinuous boundary. The discontinuous system has two kinds of border-collision bifurcations: one comes from the gap on the right side, and the other from the gap on the left side. The results show that the period-adding phenomena are due to the border-collision bifurcation at two boundaries of the forbidden area. In order to determine the condition of the period orbit existence, we also choose various control parameters to plot the cobweb of period attractor. The results show that the iteration sequence of period trajectory has a certain sequence with different iteration units. The period trajectory of period-adding bifurcation on the left side of period-5 attractor consists of period-4 and period-5 iteration units, forming period-9, period-13 and period-14 attractor. The period trajectory of period-adding bifurcation on the right side of period-5 attractor consists of period-6 and period-5 iteration units, forming period-11, period-16 and period-21 attractor. All attractors can be easily shown analytically, owing to the piecewise linear characteristics of the map. We analyze its underlying mechanisms from the viewpoint of border-collision bifurcations. The result shows that the period attractor can be determined by two border-collision bifurcations and the condition of stability. Based on the theoretical and iteration unit, the border-collision bifurcations, two border collision bifurcation curves are obtained analytically. The result shows that the theoretical and numerical results are in excellent agreement.

Keywords: discontinuous, gap, border-collision bifurcation

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.64.120502

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11205006), the Program for New Scientific and Technological Star of Shaanxi Province, China (Grant No. 2014KJXX-77), and the Science Foundation of Baoji University of Science and Arts, China (Grant No. ZK15028).

[†] Corresponding author. E-mail: klyang@163.com