

一类弹性和阻尼双分段非线性约束系统周期响应特性研究

刘飞 刘彬 刘浩然

Cycle response characteristics research on a class of piecewise nonlinear elastic and damping double constraint system

Liu Fei Liu Bin Liu Hao-Ran

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 124601 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.124601

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.124601>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I12>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

两级式光伏并网逆变器建模与非线性动力学行为研究

Numerical modeling and research on nonlinear dynamic behaviors of two-stage photovoltaic grid-connected inverter

物理学报.2015, 64(13): 130503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130503>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔

Period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap

物理学报.2015, 64(12): 120502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.120502>

Duffing 系统随机相位抑制混沌与随机共振并存现象的机理研究

Mechanism for the coexistence phenomenon of random phase suppressing chaos and stochastic resonance in Duffing system

物理学报.2015, 64(10): 100501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100501>

力学共振吸收谱探测耦合振动模式

Detection of a coupled vibration by mechanical resonant absorption spectra

物理学报.2012, 61(20): 200509 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.200509>

一类弹性和阻尼双分段非线性约束系统 周期响应特性研究*

刘飞 刘彬 刘浩然†

(燕山大学信息科学与工程学院, 秦皇岛 066004)

(燕山大学, 河北省特种光纤与光纤传感重点实验室, 秦皇岛 066004)

(2014年11月11日收到; 2014年12月9日收到修改稿)

考虑动态条件下的两种典型分段非线性约束, 根据广义耗散 Lagrange 原理建立一类具有弹性和阻尼双分段非线性约束系统动力学模型. 采用平均法求解得到系统在周期激励下的幅频响应关系. 分别比较系统在不同分段非线性约束条件下的时域响应、分岔响应和幅频响应, 得到受分段非线性约束的系统响应特性以及约束条件变化时系统响应的变化规律. 对比两种约束条件下的幅频响应, 研究得到系统稳定性受不同分段非线性因素影响及两种分段非线性约束之间的相互影响规律.

关键词: 分段非线性, 双约束系统, 周期响应, 稳定性

PACS: 46.40.Ff, 05.45.-a, 02.30.Hq

DOI: 10.7498/aps.64.124601

1 引言

分段约束问题一直以来在多个学科领域中受到广泛关注^[1-3]. 该问题主要源于系统结构存在间隙、死区特性、干摩擦和材料性能差异引起的预紧形变等特征, 导致系统在不同运动阶段具有不同的非线性约束特性. 随着非线性约束变化出现跳跃、分岔、混沌等现象, 使系统的动力学行为变得复杂而不稳定^[4,5].

分段线性问题的研究主要集中在分段线性约束或分段切换子系统 etc 情况下, 王泽林等^[6]建立了分段线性随机共振模型, 推导了模型解析关系和信噪比, 并将其应用在微弱周期信号检测中. 文献^[7, 8]提出电路系统存在分段线性约束, 并从理论上分析了由电容电量的分段线性特性引起的非光滑分岔, 通过数值模拟解释了系统分岔机理及其动力学演化规律. Xu 等^[9,10]运用增量谐波平衡法求解了一类受分段线性刚度和分段线性阻尼约束

系统, 并比较了谐波项数不同时的周期解及系统阻尼和外激励对分段线性约束系统幅频特性的影响. 江俊和高文辉^[11]将碰摩模型简化为一个分段非光滑约束, 从子系统间切换敏感性的角度分类讨论了子系统和完整系统平面运动响应特性. 分段线性问题的研究为更进一步研究分段约束问题提供了思路.

随着非线性理论的快速发展和分段约束问题研究的逐步深入, 与分段线性相比更具有一般性的分段非线性问题已成为近年来研究的热点^[12-15]. 贾启芬等^[16]将龙洗这一典型的液固耦合系统抽象为分段光滑系统, 定性地分析定常解振幅值与搓动速度在黏滑系数变化下的关系曲线. Ji 和 Hansen^[17]分别采用匹配法和平均法求解得到一类受简单分段非线性约束系统的超谐共振近似解析解, 并通过与数值进行对比验证了近似解的正确性. 由于分段非线性约束系统方程越来越复杂, 更多的研究只能基于数值分析和实验研究^[18]. 近来, 李晓静等^[19]运用 Mawhin 重合度理论证明了具有

* 国家自然科学基金(批准号: 51105324)、河北省科技支撑计划(批准号: 13211907D)和河北省自然科学基金(批准号: E2015203349)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liufei6876@126.com

一般非线性弹力和广义阻尼力的相对转动非线性系统的周期解存在性的问题.

综上所述, 以往对分段非线性的研究主要考虑分段线性、对称分段非线性等方面, 对于现实问题中同时受到分段非线性弹性约束和分段非线性阻尼约束的系统动力学行为, 以及系统中各分段非线性约束之间相互影响的研究还没有深入展开. 本文同时考虑了分段非线性弹性约束和分段非线性阻尼约束, 建立了一类弹性和阻尼双分段非线性约束系统动力学模型, 求解该系统在周期激励下的幅频响应关系, 讨论系统在不同约束条件下的周期响应特性. 研究两种分段非线性约束分别对系统稳定性的影响规律以及二者之间的相互影响.

2 动力学模型

2.1 分段非线性约束模型

分段非线性问题常见于工程应用中, 主要表现在由于预紧力的作用在不同结构上产生的弹性变形, 使系统在动态变化过程中由于弹性变形的恢复而受到分段非线性约束作用. 以最为常见的液压系统为例, 系统不同方向的受力由不同尺寸的液压缸产生. 液压缸的刚度与液压油柱高度呈反比关系, 因此液压油柱高度的变化直接影响着受液压缸作用的系统约束特性. x 表示位移 (即液压油高度变化量), κ_i 是与弹性元件 (液压油) 材质和结构相关的常量, λ_i 是弹性变形元件原始尺寸. e_i 表示弹性元件在系统静态稳定时由预紧力所产生的弹性变形量, 则液压系统动态刚度可以表示为

$$k_i(x) = \frac{\kappa_i}{\lambda_i + x + e_i} \quad (|x| < \lambda_i + e_i; i = 1, 2). \quad (1)$$

在系统位移 x 动态变化时, 由于两侧弹性预紧力所产生的弹性变形 e_1 和 e_2 的交替恢复使系统刚度发生变化, 因此系统刚度会在位移 $x = -e_1$ 和 $x = -e_2$ 的位置处发生改变. 不失一般性地提出一种如 (2) 式所示的分段非线性刚度模型来描述该类非线性问题, 系统刚度随着位移 x 的变化规律如图 1 所示.

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\kappa_1}{\lambda_1 + x + e_1} + \frac{\kappa_2}{\lambda_2} & (x > -e_2), \\ \frac{\kappa_1}{\lambda_1 + x + e_1} + \frac{\kappa_2}{\lambda_2 + x + e_2} & (-e_1 \leq x \leq -e_2), \\ \frac{\kappa_1}{\lambda_1} + \frac{\kappa_2}{\lambda_2 + x + e_2} & (x < -e_1), \end{cases} \quad (2)$$

则系统受到的弹性约束也是分段非线性的, 可记为 $g(x) = k(x)x$.

在受到分段非线性弹性约束的同时也会存在非线性摩擦阻尼的约束作用. 在文献 [20] 中实验拟合的动态摩擦模型的基础上, 更具一般性地考虑系统在动态过程中受到一类由于摩擦系数受速度变化引起的分段非线性阻尼约束. 摩擦系数 c 是关于速度 y 的函数 (图 2), 其表达式为

$$c(y) = H \operatorname{sgn}(y) - \rho_1 y + \rho_2 y^3, \quad (3)$$

其中, H 为受速度 y 的方向改变所产生的摩擦系数的变化量; ρ_1, ρ_2 分别为速度对摩擦系数 c 的影响系数. 则在正压力 N 的作用下系统受到的阻尼约束 (摩擦力) $h(y)$ 呈现如表达式 (4) 的分段非线性特性. 当速度 $y = 0$ 时, 摩擦力为静摩擦, 可认为此时的摩擦力等于外激力 Q . 系统受到的非线性阻尼约束在速度 $y = 0$ 的位置处发生变化.

$$h(y) = \begin{cases} N(H - \rho_1 y + \rho_2 y^3) & (y > 0), \\ Q & (y = 0), \\ N(-H - \rho_1 y + \rho_2 y^3) & (y < 0). \end{cases} \quad (4)$$

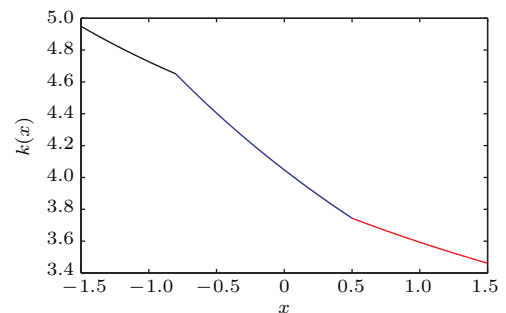


图 1 分段非线性刚度系数 $k(x)$

Fig. 1. Piecewise nonlinear stiffness coefficient $k(x)$.

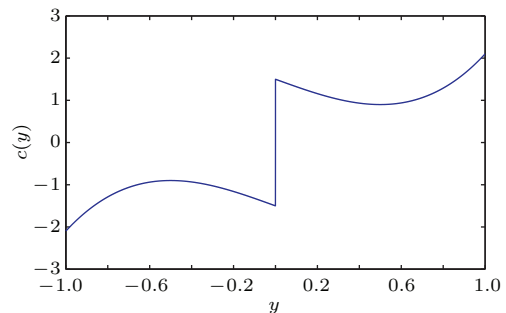


图 2 分段非线性摩擦系数 $c(y)$

Fig. 2. Piecewise nonlinear friction coefficient $c(y)$.

2.2 双分段非线性约束系统动力学模型

考虑分段非线性弹性约束和分段非线性阻尼约束的双重作用, 根据广义耗散 Lagrange 原理, 建立一类弹性和阻尼双分段非线性约束系统周期激励下的无量纲动力学平衡方程

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \omega_0^2 x + \alpha g(x) + \beta h(\dot{x}) = q \sin(\omega t), \quad (5)$$

其中, $\delta = 2\xi\omega_0$, ξ 为系统阻尼比; α 和 β 分别为分段非线性约束项和分段非线性阻尼项系数; $q \sin(\omega t)$ 为周期外激励, 此时 $Q = q$. 系统方程也可写成状态方程的形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = q \sin(\omega t) - \delta y - \omega_0^2 x - \alpha g(x) - \beta h(y). \end{cases} \quad (6)$$

在系统模型建立的基础上, 可以分析周期激励下双分段非线性约束系统响应, 分别研究分段非线性弹性约束和分段非线性阻尼约束对系统动力学行为的影响规律.

2.3 周期激励下约束系统响应求解

根据分段非线性约束的特点, 本文采用平均法求解系统方程式 (5), 假设分段非线性引起的约束力为弱非线性, 可将系统方程写成如下形式:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon (q \sin(\omega t) - \delta \dot{x} - \alpha g(x) - \beta h(\dot{x})). \quad (7)$$

令 $\varepsilon = 0$, 导出派生系统的解及其导数,

$$x = z \cos(\omega t - \theta), \quad (8)$$

其中 z 和 θ 分别为时间 t 的慢变函数, 令 $\phi = \omega t - \theta$, $\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \varepsilon\sigma)$, σ 为调谐因子. 将 x 对时间 t 微分可得

$$\dot{z} \cos \phi + z \dot{\theta} \sin \phi = 0, \quad (9)$$

$$-\dot{z} \sin \phi + z \dot{\theta} \cos \phi = \frac{\varepsilon}{\omega} f(x, \dot{x}, \omega t). \quad (10)$$

根据 (9) 和 (10) 式导出 z 和 θ 的微分方程:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{\varepsilon}{\omega} f(z \cos \phi, -z\omega \sin \phi, \phi + \theta) \sin \phi, \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{z\omega} f(z \cos \phi, -z\omega \sin \phi, \phi + \theta) \cos \phi. \end{cases} \quad (11)$$

将微分方程 (11) 的右边项以 ϕ 的一个周期中的平均值近似地代替, 并认为 z 和 θ 在 ϕ 的一个周期内

保持不变, 进而得到分段非线性约束系统的平均化方程:

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{\varepsilon}{2\omega} (\Phi(z, \omega) - q \sin \theta) \sin \phi, \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{2z\omega} (\Psi(z, \omega) + q \cos \theta) \cos \phi, \end{cases} \quad (12)$$

式中,

$$\begin{aligned} \Psi(z, \omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-\delta \dot{x} - \alpha g(x) - \beta h(\dot{x})) \\ &\quad \times \cos \phi d\phi + \omega_0^2 \sigma z \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\alpha \int_0^{2\pi} g(z \cos \phi) \cos \phi d\phi \right. \\ &\quad \left. - \beta \int_0^{2\pi} h(-z\omega \sin \phi) \cos \phi d\phi \right. \\ &\quad \left. - \delta \int_0^{2\pi} -z\omega \sin \phi \cos \phi d\phi \right) + \omega_0^2 \sigma z \\ &= \frac{1}{\pi} (-\alpha N_1^c - \beta N_2^c - \delta N_3^c) + \omega_0^2 \sigma z, \\ \Phi(z, \omega) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-\delta \dot{x} - \alpha g(x) - \beta h(\dot{x})) \\ &\quad \times \sin \phi d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\alpha \int_0^{2\pi} g(z \cos \phi) \sin \phi d\phi \right. \\ &\quad \left. - \beta \int_0^{2\pi} h(-z\omega \sin \phi) \sin \phi d\phi \right. \\ &\quad \left. - \delta \int_0^{2\pi} -z\omega (\sin \phi)^2 d\phi \right] \\ &= \frac{1}{\pi} (-\alpha N_1^s - \beta N_2^s - \delta N_3^s). \end{aligned}$$

这里 $N_1^c, N_2^c, N_3^c, N_1^s, N_2^s, N_3^s$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned} N_1^c &= \frac{-2\kappa_1 (P_1 + P_2)}{z(\lambda_1 + z + e_1)} \sqrt{\frac{\lambda_1 + z + e_1}{\lambda_1 - z + e_1}} \\ &\quad - \frac{2\kappa_2 (P_3 + 2P_4 - P_5)}{z(\lambda_2 + z + e_2)} \sqrt{\frac{\lambda_2 + z + e_2}{\lambda_2 - z + e_2}} \\ &\quad + \frac{(\lambda_1 + z + e_1)}{z(\lambda_1 + z + e_1)} \left[2\kappa_2 \arccos\left(\frac{e_1}{z}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2\kappa_2 \arccos\left(\frac{e_2}{z}\right) - \pi(\kappa_1 + \kappa_2) \right], \end{aligned}$$

N_1^c 表达式中的 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 分别为

$$\begin{aligned} P_1 &= \arctan \left(\sqrt{\frac{\lambda_1 - z + e_1}{\lambda_1 + z + e_1}} \right. \\ &\quad \left. \times \cot \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{e_1}{z} \right) \right) \right), \\ P_2 &= \arctan \left(\sqrt{\frac{\lambda_1 - z + e_1}{\lambda_1 + z + e_1}} \right. \\ &\quad \left. \times \tan \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{e_1}{z} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

$$P_3 = \arctan \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - z + e_2}{\lambda_2 + z + e_2}} \right) \times \cot \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{e_2}{z} \right) \right),$$

$$P_4 = \arctan \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - z + e_2}{\lambda_2 + z + e_2}} \right) \times \tan \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{e_1}{z} \right) \right),$$

$$P_5 = \arctan \left(\sqrt{\frac{\lambda_2 - z + e_2}{\lambda_2 + z + e_2}} \right) \times \tan \left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{e_2}{z} \right) \right);$$

$$N_2^c = 0; \quad N_3^c = 0;$$

$$N_1^s = \frac{1}{z\lambda_1\lambda_2} (-\lambda_1\lambda_2\kappa_2 \ln(\lambda_2) - 2\lambda_1\kappa_2e_2 + \lambda_1\lambda_2\kappa_2 \ln(\lambda_2 + 2e_2) - \lambda_1\lambda_2\kappa_1 \ln(\lambda_1) - 2\lambda_2\kappa_1e_1 + \lambda_1\lambda_2\kappa_1 \ln(\lambda_1 + 2e_1));$$

$$N_2^s = 4H + \rho_1\pi z\omega - \frac{3}{4}\rho_2\pi z^3\omega^3;$$

$$N_3^s = -\pi z\omega.$$

将 $\Psi(z, \omega)$ 和 $\Phi(z, \omega)$ 代入 (12) 式消去参数 θ 可得受分段非线性约束的系统在周期外激励作用下的幅频响应关系, 即系统幅值 z 和调谐因子 σ 的关系表达式

$$(\pi z\sigma\omega_0^2 - \alpha N_1^c - \beta N_2^c - \delta N_3^c)^2 + (\alpha N_1^s + \beta N_2^s + \delta N_3^s)^2 - \pi^2 q^2 = 0. \quad (13)$$

3 约束系统周期响应特性研究

采用 Runge-Kutta 数值计算方法求解双约束系统状态方程 (6) 式, 研究分段非线性弹性约束和分段非线性阻尼约束共同作用下的系统动力学行为, 分别对分段非线性约束项的参数取值为 $\kappa_1 = 15, \kappa_2 = 10, \lambda_1 = 6.5, \lambda_2 = 5.5, e_1 = 0.8, e_2 = -0.5, H = 0.5, \rho_1 = 1.5, \rho_2 = 1.2$, 对不同分段非线性约束条件下响应特性进行仿真分析.

3.1 时域响应特性

为研究周期激励作用下的分段非线性约束对系统的影响规律, 取一组分段非线性弹性约束项系数 α 值, 在分段非线性阻尼约束项系数 $\beta = 4$ 时对比分析不同弹性约束条件下的时域响应可直观反映系统行为的变化规律. 分段非线性弹性约束强

弱程度不同时系统在周期激励下时域响应曲线如图 3 所示.

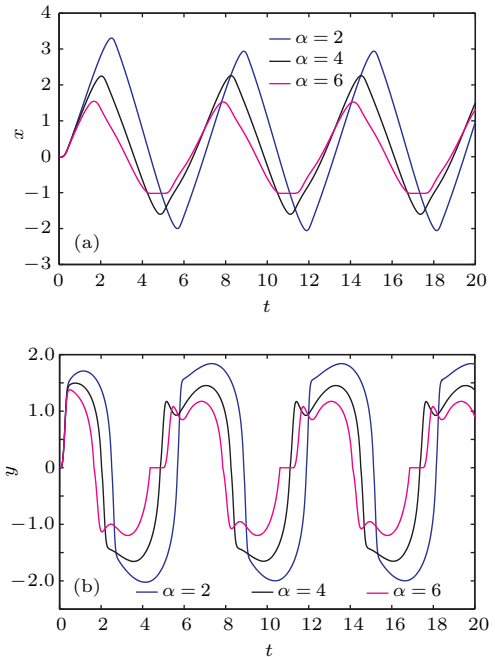


图 3 (网刊彩色) 不同 α 时系统的时域响应 (a) 位移; (b) 速度
Fig. 3. (color online) Time domain response of system with different coefficient α : (a) displacement; (b) velocity.

随着分段非线性弹性约束项系数 α 的增大, 系统幅值减小. 与此同时在达到峰值时出现不规则的微小波动, 这使得系统速度在 $y = 0$ 附近出现越来越明显的波动, 对于同时受到分段非线性阻尼约束的系统会引起更复杂的动力学行为. 速度 y 受 α 增大的影响在峰值附近的剧烈波动, 这表明分段非线性弹性约束的增强会使分段非线性阻尼约束特性更加明显.

3.2 分岔响应特性

以外激励幅值 q 为分岔参数, 分析系统在不同分段非线性阻尼约束条件下的分岔图及其对应的最大 Lyapunov 指数 (largest Lyapunov exponent, LLE) 曲线, 如图 4—图 6 所示. 通过观察其不同激励幅值时的相平面图和 Poincaré 截面, 分析分段非线性约束系统分岔响应随外激励幅值的变化规律. 比较不同分段非线性阻尼约束条件下系统随外激励幅值变化的分岔特性, 研究分段非线性阻尼对系统稳定性的影响.

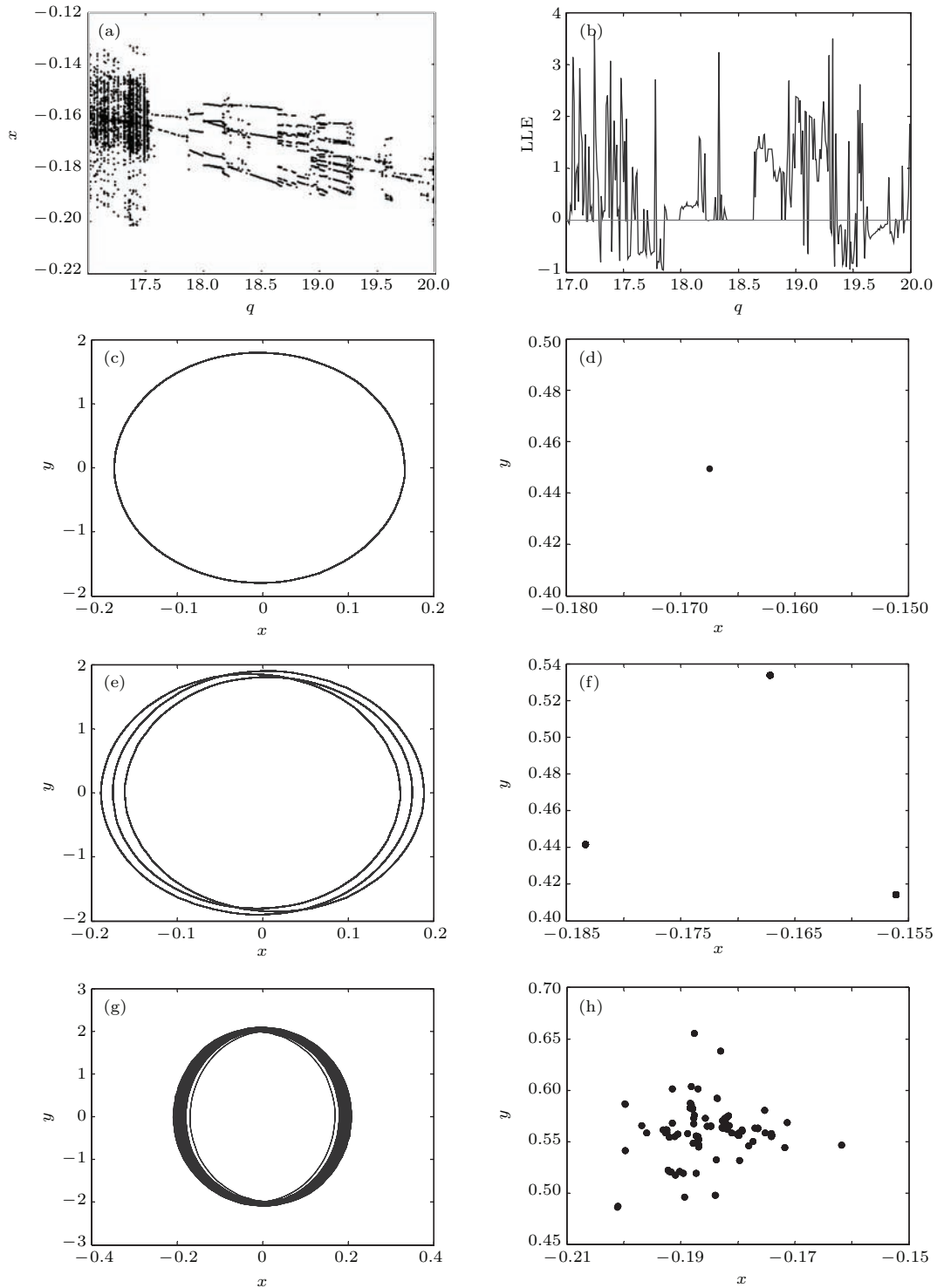


图4 参数 $\alpha = 0.015$, $\beta = 4$ 时, 系统的分岔图、LLE 曲线、相图及 Poincaré 截面 (a) 分岔图; (b) LLE 曲线; (c), (e), (g) 相图, q 分别为 17.8, 18.5, 20; (d), (f), (h) Poincaré 截面, q 分别为 17.8, 18.5, 20

Fig. 4. When $\alpha = 0.015$, $\beta = 4$, panel (a) is bifurcation diagram of the system; panel (b) is largest Lyapunov exponent curve of the system; panels (c), (e), (g) are phase diagrams with $q = 17.8, 18.5, 20$, respectively; panels (d), (f), (h) are Poincaré sections with $q = 17.8, 18.5, 20$, respectively.

结合图 4(a) 和图 4(b) 中所示的分岔图和 LLE 曲线可以看出, 分段非线性约束系统随外激励幅值 q 出现复杂的动力学行为. 取不同激励幅值 q 考察系统相平面特性和 Poincaré 截面, 如图 4(c)—(h)

所示. 发现当 $q = 17.8$ 时系统状态表现为周期运动, $q = 18.5$ 时系统出现周期 3 运动状态, $q = 20$ 时系统 Poincaré 截面由若干聚集点变为杂乱无章的分布形式, 可见此时系统处在混沌运动状态.

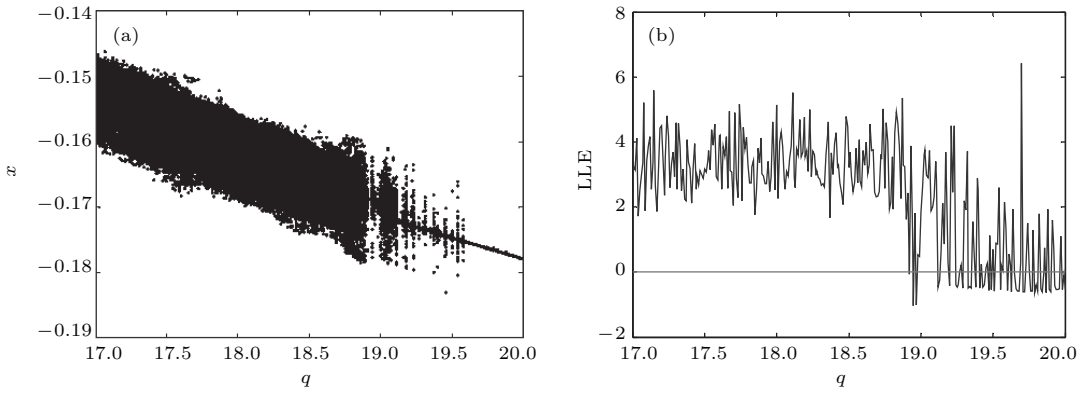


图5 参数 $\alpha = 0.015$, $\beta = 5.5$ 时系统的 (a) 分岔图和 (b) LLE 曲线

Fig. 5. (a) Bifurcation diagram and (b) largest Lyapunov exponent curve of the system when $\alpha = 0.015$, $\beta = 5.5$.

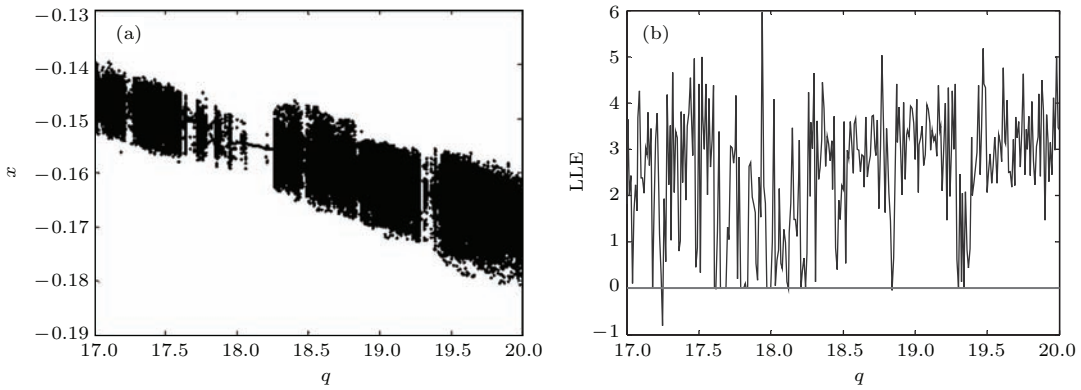


图6 参数 $\alpha = 0.015$, $\beta = 7$ 时系统的 (a) 分岔图和 (b) LLE 曲线

Fig. 6. (a) Bifurcation diagram and (b) largest Lyapunov exponent curve of the system when $\alpha = 0.015$, $\beta = 7$.

结合图4(a)、图4(b)观察图5和图6可见,系统分岔行为受到分段非线性阻尼约束变化的影响较为明显.系统LLE小于零的外激励区间随 β 增大而变小,分岔行为变得复杂而不稳定,系统处在混沌区域的外激励幅值区域变宽.分段非线性阻尼约束的增强导致系统的动力学行为在更大范围内处于复杂、不可预测的混沌状态,使系统稳定性逐渐遭到破坏.

3.3 幅频响应特性

根据(13)式所示的系统幅频关系,取系统参数值分别为: $\omega_0 = 3$, $\xi = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$,对系统幅频关系进行仿真.分别比较两个分段非线性约束项系数 α 和 β 变化时系统幅值与外激励频率和幅值的关系曲线,分析系统受分段非线性弹性和阻尼双约束时的非线性特性及在分段临界位置的变化规律,并讨论变激励作用下的双分段非线性约束系统稳定性受各参数影响的变化规律.不同约束和激励条

件下的系统幅频响应分别如图7和图8所示.

由图7(a)中所示的 $z-\sigma$ 关系曲线可见,受分段非线性弹性和分段阻尼非线性的双重约束作用,系统幅值 z 随着外激励频率的变化出现跳跃现象.在幅值达到分段非线性弹性约束临界位置(图中虚线)时 $z-\sigma$ 关系曲线出现非光滑折变,经过临界位置后又呈现光滑特性,表明系统在邻近分段时由于非线性约束的改变而出现响应的折变.取不同大小的分段非线性弹性约束项系数 α 得到相应的 $z-\sigma$ 关系曲线,如图7(b)所示.比较发现, α 增大时跳跃现象的频率区域也随之变宽,即受分段非线性弹性约束变化的影响,系统的不稳定频率区域变宽.图7(c)中,受到分段非线性阻尼约束变化的影响,系统幅值随着 β 的增大而减小,出现多解的频率范围逐渐变宽.当幅值在非线性阻尼约束作用下减小至小于弹性约束分段位置处时,分段非线性弹性约束对系统的影响减弱.图7(d)中,由于分段非线性约束导致的跳跃现象随着外激励幅值的增大逐渐减弱直至消失.

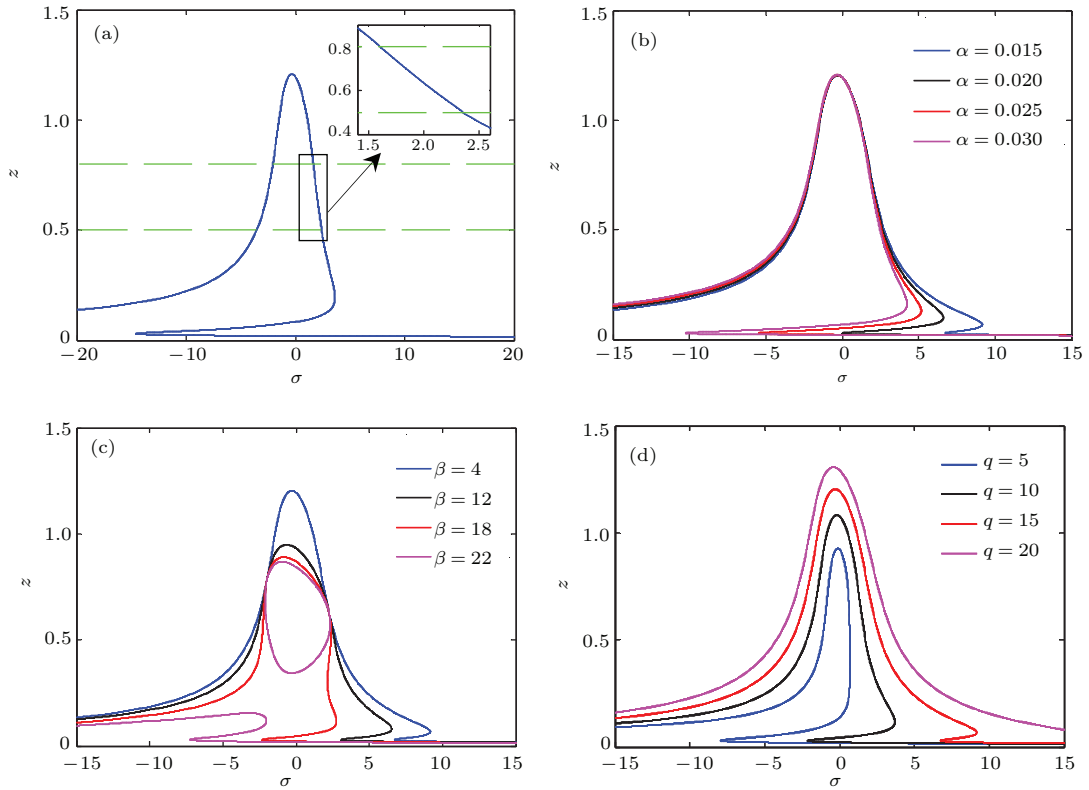


图7 (网刊彩色) (a) z - σ 特征曲线及其局部放大; (b) α 不同时的 z - σ 曲线, $q = 15, \beta = 4$; (c) β 不同时的 z - σ 曲线, $q = 15, \alpha = 0.015$; (d) q 不同时的 z - σ 曲线, $\alpha = 0.015, \beta = 4$

Fig. 7. (color online) (a) z - σ characteristic curves; (b) z - σ curve, $q = 15, \beta = 4$; (c) z - σ curve, $q = 15, \alpha = 0.015$; (d) z - σ curve, $\alpha = 0.015, \beta = 4$.

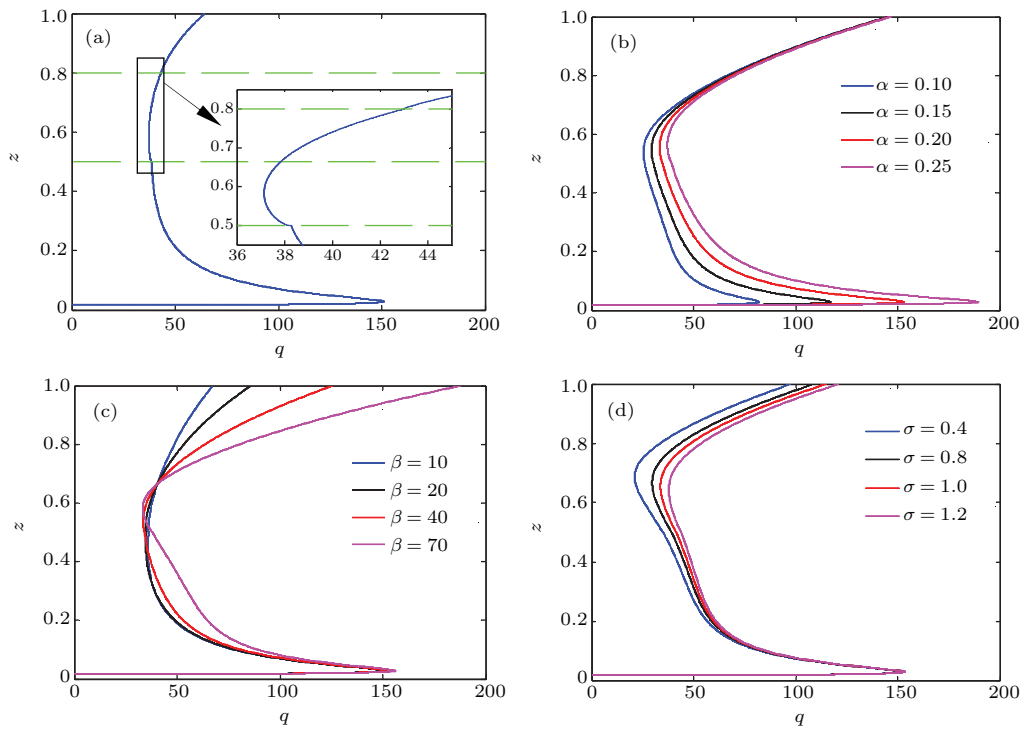


图8 (网刊彩色) (a) z - q 特征曲线及其局部放大, $\alpha = 0.2, \beta = 20$; (b) α 不同时的 z - q 曲线, $\beta = 50, \sigma = 1.0$; (c) β 不同时的 z - q 曲线, $\alpha = 0.2, \sigma = 1.0$; (d) σ 不同时的 z - q 曲线, $\alpha = 0.2, \beta = 50$

Fig. 8. (color online) z - q characteristic curves with different conditions: (a) $\alpha = 0.2, \beta = 20$; (b) $\beta = 50, \sigma = 1.0$; (c) $\alpha = 0.2, \sigma = 1.0$; (d) $\alpha = 0.2, \beta = 50$.

受到分段非线性约束作用的影响, 系统幅值会随着外激励幅值的变化在更大范围内发生跳跃现象, 并且在非线性弹性约束分段位置处发生折变(如图 8 (a) 中局部放大图所示), 使幅值随激励幅值的变化曲线失去光滑性. 幅值 z 随着外激励幅值 q 的增大出现明显的跳跃现象, 并且随着分段非线性弹性约束项系数 α 的增大, 系统幅值出现跳跃的不稳定激励幅值区域扩大. 幅值 z 随着分段非线性阻尼约束项系数 β 的增大而减小. 随着调谐因子 σ 的增大(即外激频率增大), 幅值发生跳跃时的外激励幅值增大.

由此可见, 外激励幅值和频率对系统影响主要表现在系统响应对分段非线性约束的敏感程度上, 而分段非线性弹性约束和分段非线性阻尼约束才是影响系统稳定性的主要因素. 分段非线性弹性约束是使系统处在不稳定区域的主导因素, 分段非线性阻尼约束可抑制幅值增大, 但又会引起分段弹性约束结构的变化使系统进入不可预测的混沌状态.

4 结 论

本文提出了一类具有分段非线性弹性和分段非线性阻尼双约束作用的动力学系统, 分别对分段非线性约束系统的周期响应进行了数值和解析求解. 比较分析两种非线性约束在不同参数条件下的系统响应, 结果表明分段非线性弹性约束的增强使系统不稳定频率区域变宽, 由此而导致的失稳还会引起速度的波动, 进而加剧分段非线性阻尼约束对系统稳定性影响. 增强分段非线性阻尼在一定程度上可以减小系统幅值, 由此也可减小分段非线性弹性约束对系统影响的可能性, 但是更大程度上使得系统处在复杂而不可预测的混沌运动状态. 明确两种分段非线性约束之间的相互关系及其对系统响应特性的影响规律, 为进一步对这一类分段非线性

弹性和阻尼双约束系统动力学行为控制提供了理论依据.

参考文献

- [1] Liang F, Han M A, Valery G R 2012 *Nonlinear Anal.-Theor.* **75** 4355
- [2] Wang C J, Yang K L, Qu S X 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030502
- [3] Lin P, Qin K Y, Wu H Y 2011 *Chin. Phys. B* **20** 108701
- [4] Quentin B, Tetsushi U, Danièle F P, Takuji K 2009 *Chaos Solitons Fract.* **42** 187
- [5] Jiang H B, Li T, Zeng X L, Zhang L P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010501
- [6] Wang L Z, Zhao W L, Chen X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160501 (in Chinese) [王林泽, 赵文礼, 陈旋 2012 物理学报 **61** 160501]
- [7] Zhang Y, Bi Q S 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010504
- [8] Zhang C, Yu Y, Han X J, Bi Q S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100501
- [9] Xu L, Lu M W, Cao Q 2003 *J. Sound Vib.* **264** 873
- [10] Xu L, Lu M W, Cao Q 2002 *Phys. Lett. A* **301** 65
- [11] Jiang J, Gao W H 2013 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **45** 16 (in Chinese) [江俊, 高文辉 2013 力学学报 **45** 16]
- [12] Akhavan A, Samsudin A, Akhshani A 2009 *Chaos Solitons Fract.* **42** 1046
- [13] Partha S D, Soma D, Soumitro B, Akhil R R 2009 *Phys. Lett. A* **373** 4426
- [14] Zhang L M, Zhang J W, Wu R H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 160505 (in Chinese) [张玲梅, 张建文, 吴润衡 2014 物理学报 **63** 160505]
- [15] Zachary P K, Paul C B 2010 *Physica D* **239** 1048
- [16] Jia Q F, Yu W, Liu X J, Wang D J 2004 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **36** 373 (in Chinese) [贾启芬, 于雯, 刘习军, 王大钧 2004 力学学报 **36** 373]
- [17] Ji J C, Hansen C H 2005 *J. Sound Vib.* **283** 467
- [18] Simpson D J W, Meiss J D 2012 *Physica D* **241** 1861
- [19] Li X J, Yan J, Chen X Q, Cao Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 200202 (in Chinese) [李晓静, 严静, 陈绚青, 曹毅 2014 物理学报 **63** 200202]
- [20] Xuan B T, Nur H, Hideki Y 2012 *Mechatronics* **22** 65

Cycle response characteristics research on a class of piecewise nonlinear elastic and damping double constraint system^{*}

Liu Fei Liu Bin Liu Hao-Ran[†]

(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Key Laboratory for Special Fiber and Fiber Sensor of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Received 11 November 2014; revised manuscript received 9 December 2014)

Abstract

Piecewise nonlinear constraint exists in various fields and it always affects the stability of a system. In order to realize the dynamic characteristic of the system constrained by these nonlinearity, we consider two kinds of typical piecewise nonlinear constraints under the dynamic conditions, and establish a dynamic model with double piecewise nonlinear constraint of elasticity and damping, according to the generalized dissipation Lagrange principle. An average method is used to solve the amplitude and frequency response of the system under a periodic external incentive. By a numerical simulation, we compare the time domain responses under different piecewise nonlinear elastic constraints. The results show that the stronger the piecewise nonlinear elastic constraint, the more obvious the piecewise nonlinear damping constraint is. We also compare the bifurcation responses under different piecewise nonlinear damping constraints, the results show that the chaos state will emerge in an enlarged scope with the increase of the piecewise nonlinear damping coefficient, and threaten the stability of the system. The dynamic evolution process of the system is shown by the phase diagrams and Poincaré sections under the corresponding constraint conditions. By comparing the amplitude-frequency characteristics of the system under different constraint conditions, we obtain the response characteristic of the system and its change rule with the piecewise nonlinear constraints. By comparing and analyzing the amplitude-frequency characteristics under the piecewise nonlinear elastic and piecewise nonlinear damping constraint, we obtain the law of system stability influenced by different nonlinear factors, and the interaction relationship between the two piecewise nonlinear constraints.

Keywords: piecewise nonlinear, double constraint system, cycle response, stability

PACS: 46.40.Ff, 05.45.-a, 02.30.Hq

DOI: 10.7498/aps.64.124601

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51105324), the Science and Technology Support Program of Hebei Province, China (Grant No. 13211907D), and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. E2015203349).

[†] Corresponding author. E-mail: liufei6876@126.com