

定向凝固过程中枝晶侧向分枝生长行为与强制调控规律

郭春文 李俊杰 马渊 王锦程

Growth behaviors and forced modulation characteristics of dendritic sidebranches in directional solidification

Guo Chun-Wen Li Jun-Jie Ma Yuan Wang Jin-Cheng

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 148101 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.148101

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.148101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I14>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于元胞自动机方法的定向凝固枝晶竞争生长数值模拟

[Simulation of dendritic competitive growth during directional solidification using modified cellular automaton method](#)

物理学报.2014, 63(18): 188102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.188102>

$\text{Pr}_{1-x}\text{Ce}_x\text{B}_6$  阴极材料的原位反应合成及性能研究

[Synthesis and properties of multiple boride  \$\text{Pr}\_{1-x}\text{Ce}\_x\text{B}\_6\$  cathodes by reactive spark plasma sintering](#)

物理学报.2012, 61(22): 228104 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.228104>

5 at% $\text{Yb}^{3+}$ :  $\text{YNbO}_4$  的提拉法晶体生长和光谱特性

[Growth and spectral properties of 5 at% \$\text{Yb}\$ : \$\text{YNbO}\_4\$  crystal](#)

物理学报.2012, 61(22): 228103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.228103>

掺铈  $\text{YVO}_4$  晶体的发光特性及铈离子的价态分析

[Spectroscopic properties of cerium doped  \$\text{YVO}\_4\$  crystals and analysis on valence state of cerium ion](#)

物理学报.2012, 61(22): 228105 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.228105>

# 定向凝固过程中枝晶侧向分枝生长行为与强制调控规律\*

郭春文 李俊杰 马渊 王锦程†

(西北工业大学, 凝固技术国家重点实验室, 西安 710072)

(2015年1月29日收到; 2015年3月18日收到修改稿)

采用相场法数值模拟研究了定向凝固过程中随机噪声条件下枝晶侧向分枝生成行为与强制扰动条件下侧向分枝调控规律. 模拟结果表明: 随机噪声条件下, 侧向分枝整体上并无规则性, 但产生频率存在一定分布范围, 且在一定时间段内会出现生成频率一致且具有极强相关性的一组侧向分枝, 即波包; 不同波包之间不具有相关性, 但不同波包内部的侧枝生成频率基本相同, 且与侧枝整体频谱曲线峰值位置处的频率基本相当; 强制周期扰动条件下, 当扰动频率处于侧向分枝整体生成频率范围内时, 可激发枝晶产生规则侧向分枝, 且扰动频率与波包内侧枝生成频率一致时侧向分枝最发达. 研究结果可为定向凝固枝晶形态的调控提供理论指导.

**关键词:** 相场法, 定向凝固, 枝晶, 侧向分枝

**PACS:** 81.10.-h, 64.70.D-, 68.08.De

**DOI:** 10.7498/aps.64.148101

## 1 引言

枝晶生长一直是自然界中的一个非常有趣且吸引人的现象. 许多重要的工业材料凝固成形后微观组织都呈现出枝晶形态, 这种复杂的组织形态对材料性能具有重要影响. 因此, 对枝晶生长行为的理解与调控具有重要的理论及实际意义.

枝晶生长过程中, 距尖端后侧一定距离处的界面将逐渐呈现出持续的扰动, 这些界面扰动不断发展最终形成侧向分枝. 关于侧向分枝的产生通常认为主要存在两种机制: 一种是噪声选择放大机制<sup>[1,2]</sup>, 认为枝晶尖端界面处一定频率的噪声被选择性地放大进而发展成侧向分枝, 且每一个选择放大的随机扰动之间没有相位相关性; 另一种是非线性振荡机制<sup>[3-5]</sup>, 认为系统的非线性特征使得体系整体呈现出一种极限环, 在极限环内部侧向分枝具有相位相关性, 最终导致侧向分枝呈现非线性振荡形式. 噪声选择放大机制和非线性振荡机制的

最大区别在于动力学相关性的持续时间是局限于一个侧向分枝的发展还是一系列侧向分枝的发展. 前者认为侧向分枝之间没有相关性, 而后者则完全相反. 为检验两种理论的正确性, 研究者开展了一系列的实验. 然而实验研究发现, 侧向分枝究竟是具有非相关性<sup>[6]</sup>、或者部分相关性<sup>[7]</sup>、还是大范围的相关性<sup>[8]</sup>, 至今还没有明确的定论. Pocheau等<sup>[9,10]</sup>对透明有机物合金定向凝固侧向分枝的观察发现, 侧向分枝以随机分布的波包(burst)形式出现, 其中波包定义为一系列连续生成的且频率及相位基本相同的侧向分枝集团. 在一个波包内, 侧向分枝相关性极强, 但不同波包之间侧向分枝的相位则完全随机, 即波包的产生是独立的, 波包之间没有相互关联. 显然, 上述两种侧向分枝产生机制均不能圆满解释这一实验结果, 对于侧向分枝波包的形成机制及规律都还有待进一步研究.

通常自然凝固条件下枝晶侧向分枝形态是不规则的, 枝晶主干两侧侧向分枝不完全对称, 侧向

\* 国家自然科学基金(批准号: 51371151, 51101124)和国家重点基础研究计划(批准号: 2011CB610401)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jchwang@nwpu.edu.cn

分枝产生频率也不恒定. 但如果通过某种手段调控侧向分枝的生长, 则可生成规则的侧向分枝, 且这种规则的侧向分枝具有非规则枝晶组织所不具备的特殊性能. 研究者发现通过外加周期性强制扰动可以实现这一目标等<sup>[11-14]</sup>. Bouissou<sup>[11]</sup>通过对自由生长条件下的透明化合物甲基丙酸体系加入固定频率的周期性流场, 得到了具有规则侧向分枝的枝晶形态, 且发现尽管侧向分枝的发展与噪声选择放大机制定性符合, 但侧向分枝达到最发达程度时, 其无量纲波长的理论值与实验结果间存在很大差别. Börzsönyi等<sup>[12,13]</sup>通过对自由生长条件下的液晶薄膜体系施加周期性压力信号或周期性热流信号, 也得到了具有规则侧向分枝的枝晶, 且发现仅当信号频率在一定范围内时, 侧向分枝才呈现较好的规则性. Börzsönyi等还通过相场法数值模拟再现了类似的规律, 但对为何只有特定频率的调制信号才能激发出规则侧向分枝并未给出解释. Williams等<sup>[14]</sup>通过在定向凝固枝晶尖端附近施加激光束来实现体系的周期性热波动, 同样获得了具有规则形态的侧向分枝; 并通过对噪声放大理论中侧向分枝响应函数的修正, 准确拟合了实验中侧向分枝振幅随外加周期扰动频率变化的趋势. 但在拟合实验数据中, 响应函数中的形态选择参数 $\sigma$ 并不能保持恒定, 这与枝晶生长的微观可解性理论相矛盾; 此外, 为了拟合实验数据所选择的 $\sigma$ 值与用实验观测数据代入 $\sigma$ 计算公式得到的计算值也不一致.

实际上, 枝晶侧向分枝的调控规律与其产生机制密切相关. 然而由于当前对侧向分枝产生机制认识的局限性, 制约了人们对侧向分枝调控规律的深入理解. 特别是在定向凝固条件下, 侧向分枝呈现出随机波包的形式, 对于这种特殊的侧向分枝形成方式与侧向分枝调控规律之间的内在关联, 目前尚不清楚. 相场法作为一种极具优势的微观组织数值模拟方法, 已经在材料微观组织演化的多个领域中得到了广泛的应用<sup>[15-18]</sup>. 特别是针对凝固过程的固-液界面形态演化已经开展了大量的研究工作, 且取得了一系列重要结果<sup>[19-25]</sup>. 但在枝晶侧向分枝产生机制方面, 研究工作仍不多见. Echebarria等<sup>[26]</sup>利用相场法研究了定向凝固侧向分枝的动力学问题, 发现当增大温度梯度时, 枝晶尖端下面主干部分变宽, 侧向分枝出现的临界速度会减小、其间距也会减小、振幅会变大. 但对于定向凝固过程中枝晶侧向分枝生长行为与强制调控规律的相场

法数值模拟工作还未见报道. 基于上述考虑, 本文采用相场法数值模拟, 研究定向凝固条件下的枝晶侧向分枝产生规律, 分析侧向分枝的波包产生行为, 并在此基础上进一步考察外加强制扰动条件下的侧向分枝产生规律及其与侧枝波包行为的关系.

## 2 模拟方法

采用Steinbach等<sup>[27]</sup>及Kim等<sup>[28]</sup>提出的多相场模型, 对于定向凝固侧向分枝的研究仅需考虑单一取向晶粒, 此时仅需一个相场变量 $\phi$ ,  $\phi = 1$ 代表液相,  $\phi = 0$ 代表固相. 相场演化方程为

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -M_{SL} \left( \frac{\delta f}{\delta \phi} - \frac{\delta f}{\delta(1-\phi)} + \Delta g_{\phi(1-\phi)} \right), \quad (1)$$

其中,  $M_{SL}$ 是相场动力学系数,  $\frac{\delta f}{\delta \phi}$ 和 $\Delta g_{\phi(1-\phi)}$ 表达式分别为

$$\frac{\delta f}{\delta \phi} = \frac{\varepsilon_{SL}^2}{2} \nabla^2(1-\phi) + \omega_{SL}(1-\phi), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Delta g_{\phi(1-\phi)} &= 6\phi(1-\phi) \frac{RT(1-k)}{V_m} (c_L^e - c_L) \\ &= 6\phi(1-\phi) \frac{RT(1-k)}{V_m m^e} \\ &\quad \times (T_m - T - m c_L), \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\varepsilon_{SL}$ 为梯度能系数,  $\omega_{SL}$ 为双阱势能的高度. 它们与界面能 $\sigma$ 和界面厚度 $2\xi$ 之间满足如下关系:

$$\varepsilon_{SL} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\xi_{SL} \sigma_{SL}}, \quad \omega_{SL} = \frac{2\sigma_{SL}}{\xi_{SL}}. \quad (4)$$

采用薄界面分析, 可得到相场动力学系数与界面动力学系数之间的关系. 本文模拟条件下, 由于生长速度较低, 可忽略界面动力学效应, 即可将界面动力学系数 $\beta$ 设为0, 得到相场动力学系数如下:

$$M_{SL} = \frac{v_m}{RT} \frac{\sigma_{SL}}{(1-k)^2} \frac{\sqrt{2\omega_{SL}}}{c_L^e \varepsilon_{SL}^3 \zeta_{SL}}. \quad (5)$$

浓度扩散场方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \nabla \phi D_L \nabla c_L + \nabla \left( \frac{\varepsilon_{SL}}{\sqrt{2\omega_{SL}}} (c_L - c_S) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\phi(1-\phi)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \nabla \cdot \mathbf{J}_c, \end{aligned} \quad (6)$$

其中等式右边第二项为反溶质截留项, 用来消除大界面厚度带来的非真实界面效应; 等式右边第三项为满足高斯分布的随机变量随机噪声项,

$$\begin{aligned} &\langle J_c^m(\mathbf{r}, t) J_c^n(\mathbf{r}', t') \rangle \\ &= 2D_L \phi(1-\phi) F_c \delta_{mn} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $J_c$  代表溶质场局部扰动,  $\langle J_c^n(\mathbf{r}, t) J_c^n(\mathbf{r}', t') \rangle$  代表扰动状态变量的局部时空平均值, 噪声强度项  $F_c$  为常量,  $\delta_{mn} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$  代表两点时空间距离十分接近时扰动不为零, 距离较远的两点没有扰动关系.

本文通过系统压力的周期性变化来施加周期性扰动进而调控枝晶生长. 系统压力变化将改变体系熔点, 根据压力改变时熔点的变化公式<sup>[13]</sup>:

$$\frac{dT_m}{dp} = \frac{T_m^0 \Delta V_{L \rightarrow S}}{\Delta H}, \quad (8)$$

其中,  $T_m$  为系统压力下的熔点,  $p$  为系统压力,  $T_m^0$  为大气压下的熔点,  $\Delta V_{L \rightarrow S}$  为液-固相变时摩尔体积变化,  $\Delta H$  为相变时摩尔潜热. 进而

$$T_m(p) = \frac{T_m^0 \Delta V_{L \rightarrow S}}{\Delta H} p(t) + T_m^0. \quad (9)$$

设定压力变化为周期性正弦函数:

$$p(t) = p_0 \sin(2\pi ft). \quad (10)$$

将(8)和(9)式代入(3)式并结合方程(1), 可得压力周期变化条件下的相场方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} = & -ML_{SL} \left[ \frac{\delta f}{\delta \phi} - \frac{\delta f}{\delta(1-\phi)} \right. \\ & \left. + 6\phi(1-\phi) \frac{RT(1-k)}{V_m} (c_L^e - c_L) \right] \\ & + 6ap(t)\phi(1-\phi), \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$a = \frac{T_m^0 \Delta V_{L \rightarrow S}}{\Delta H} \frac{RT(1-k)}{V_m m^e} M_{SL}. \quad (12)$$

对相场控制方程和浓度场控制方程采用基于均匀网格的有限差分法进行求解. 平行于温度梯度

表1 材料的物性参数  
Table 1. Material physical parameters.

物性参数	取值
液相线温度 $T_L$	1728 K
固相线温度 $T_S$	1689 K
平衡液相线斜率 $m$	-47.4 K/wt.%
平衡分配系数 $k$	0.5
液相中的溶质扩散系数 $D_L$	$3.0 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$
固相中的溶质扩散系数 $D_S$	$1.0 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$
毛细长度 $d_0$	$3.7 \times 10^{-10} \text{ m}$
温度梯度 $G$	60 K/mm
界面能各向异性系数 $\gamma$	0.04

方向的两个边界采用对称边界条件, 其他两个边界采用无通量边界条件. 空间步长  $\Delta x = \Delta y = 0.5 \mu\text{m}$ , 计算的时间步长受浓度场计算限制, 即  $\Delta t \leq (\Delta x)^2 / (4D_L^2)$ . 在计算中, 设定界面厚度  $2\xi = 5\Delta x$ .

以镍(Ni)基高温合金为研究对象, 将Ni以外的其他所有元素归为一类, 且假定分配系数和液相线斜率为常数. 所需物性参数<sup>[29]</sup>如表1所列. 文中没有特别指明的情况下, 研究定向凝固枝晶的内容中抽拉速度均为  $v_p = 400 \mu\text{m/s}$ .

### 3 模拟结果与分析

#### 3.1 随机噪声条件下的侧向分枝的自组织性行为

图1(a)为随机噪声条件下的定向凝固枝晶形态, 可以看到整体上侧向分枝并不完全规则, 但部分侧向分枝之间表现出了近似相同的枝晶间距(见图中圆圈标示位置). 为进一步定量反映侧向分枝的生成情况, 我们统计了与尖端垂直相距  $z_0$  处的固-液界面水平位置  $x(z_0)$  随时间的演化, 结果如图1(b)所示. 从图1(b)中可以发现  $x(z_0)$  呈现为一列不断振荡的波, 其中每一次由波谷到波峰再到波谷的振荡即对应一个侧向分枝的生成, 且在某些时间范围内振荡基本保持恒定的频率和相位(如图中背景色部分曲线段所示), 而规则振荡之间转变处的振荡频率及相位则发生随机变化, 其中每一段规则的振荡即定义为一个波包, 这一结果与Pocheau等<sup>[14,15]</sup>的实验结果一致. 此外, 位于任意两个相邻波包间的侧向分枝与这两个波包内部的侧向分枝相比, 发达程度都要弱一些. 图1(c)是对长时间范围( $t = 2.5\text{--}8.9 \text{ s}$ )内的界面振荡曲线整体进行傅里叶变换后的频谱图, 反映了侧向分枝在这个较长时间内的所有生成频率. 图1(d)是对图1(b)中1, 9和11三个波包内部的振荡曲线进行傅里叶变换后的频谱图. 可以看到, 枝晶整体的侧向分枝生成频率存在一个较宽的范围, 大约在7—43 Hz之间, 而波包内部侧向分枝的生成频率接近一致, 峰值在23.9 Hz左右, 且这一频率恰好对应整体频谱的中央峰值位置. 这表明定向凝固过程中存在一个最利于侧向分枝形成的固有频率.

图1(b)中不同波包的长度并不相同, 为统计波包平均长度并表征波包内部侧向分枝的相关性,

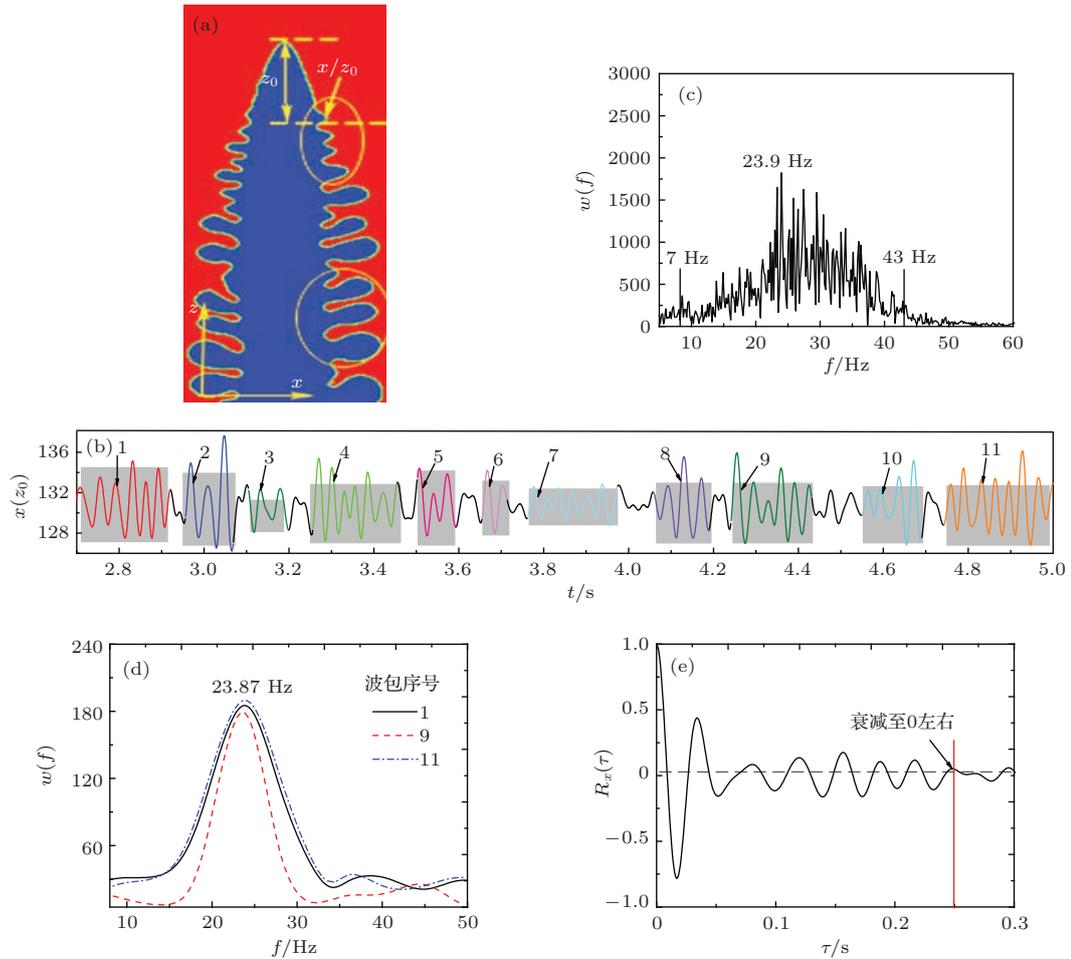


图1 (网刊彩色) 定向凝固枝晶侧向分枝的波包发展行为 (a) 枝晶形貌; (b) 距离枝晶尖端  $z_0$  处的界面位置随时间的演化; (c) 整体界面位置演化曲线的傅里叶变换频谱; (d) 波包内演化曲线的傅里叶变化频谱; (e) 侧向分枝随时间间隔演变的相关函数

Fig. 1. (color online) Development of bursts of dendritic sidebranches over time in directional solidification: (a) the dendritic morphology; (b) evolution of the interface position in the distance of  $z_0$  from dendrite tip; (c) Fourier spectrum of the whole evolving curve of the interface position; (d) Fourier spectrums of evolving curves in different bursts; (e) correlation function of sidebranches over time.

可以计算固-液界面水平位置  $x(z_0)$  随时间变化的自相关函数, 其表达式为

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt. \quad (13)$$

自相关函数是将  $t$  和  $t + \tau$  处的两个值相乘积的平均值作为延迟时间  $\tau$  的函数, 它是信号与延迟后信号之间相似性的度量, 反映了同一过程不同时刻的相互依赖关系. 图 1(e) 是对图 1(b) 做相关性分析得到的相关函数, 表示枝晶主干一侧侧向分枝的相关性. 可以看到, 相关系数从 1 衰减至 0 左右, 振荡大约经过了 0.24 s, 即一个波包的平均持续时间为 0.24 s. 而从图 1(d) 可以看到峰值频率为 23.9 Hz, 即生成一个侧向分枝的时间约为  $1/23.9$  s. 一个波

包内侧向分枝的平均数是波包平均持续时间与一个侧向分枝生成的时间的比值. 所以, 每个波包内平均约有 5.7 个侧向分枝.

为比较不同抽拉速度下波包内侧向分枝的平均数量, 另选两种抽拉速度为  $v_p = 50 \mu\text{m/s}$  和  $v_p = 150 \mu\text{m/s}$  条件下的侧向分枝进行相关性分析. 图 2(a) 为抽拉速度  $v_p = 50 \mu\text{m/s}$  和  $v_p = 150 \mu\text{m/s}$  时波包内侧向分枝的生成频率, 其对应峰值处的频率值分别为 3.0 Hz 和 7.0 Hz, 即生成一个侧向分枝的时间分别为  $1/3.0$  s 和  $1/7.0$  s. 由于两种抽拉速度下两个波包内侧向分枝的个数及发达程度不同, 所以两个峰值高度是不同的. 对以上两种抽拉速度下侧向分枝波动曲线做关于时间延迟的相关性函数, 如图 2(b) 所示, 可以看到相关系数从 1 衰减至 0 左右振荡大约分别经过了 3.8 s

和 0.95 s, 即波包平均持续时间分别为 3.8 s 和 0.95 s. 所以  $v_p = 50 \mu\text{m/s}$  和  $v_p = 150 \mu\text{m/s}$  条件下波包内平均侧向分枝个数分别为 11.4 个和 6.7 个, 而抽拉速度为  $v_p = 400 \mu\text{m/s}$  时波包内侧向分枝的平均数为 5.7 个, 所以抽拉速度较慢时波包内平均侧向分枝数要大于抽拉速度较快的情形. 这说明在较慢的抽拉速度下侧向分枝能够长时间保持相位相关性, 这体现为侧向分枝长时间的相对规则性.

实验研究<sup>[13,14]</sup>证明了定向凝固侧向分枝波包行为的存在以及波包内部侧向分枝的相关性, 本文

的相场模拟也得到了类似结果. 非线性振荡机制论认为侧向分枝的产生存在相关性行为, 所以非线性振荡机制可以解释侧向分枝一定程度上的相关性. 但非线性振荡机制并不能解释为什么会出现波包中断以及这种中断导致侧向分枝非相关性行为的存在; 噪声选择放大机制论认为连续产生的侧向分枝之间没有相关性, 这用来理解波包中断位置侧向分枝的非相关性行为. 因此, 从定向凝固枝晶侧向分枝的相关性来看, 非线性振荡机制和噪声选择放大机制都对侧向分枝的产生起到了作用.

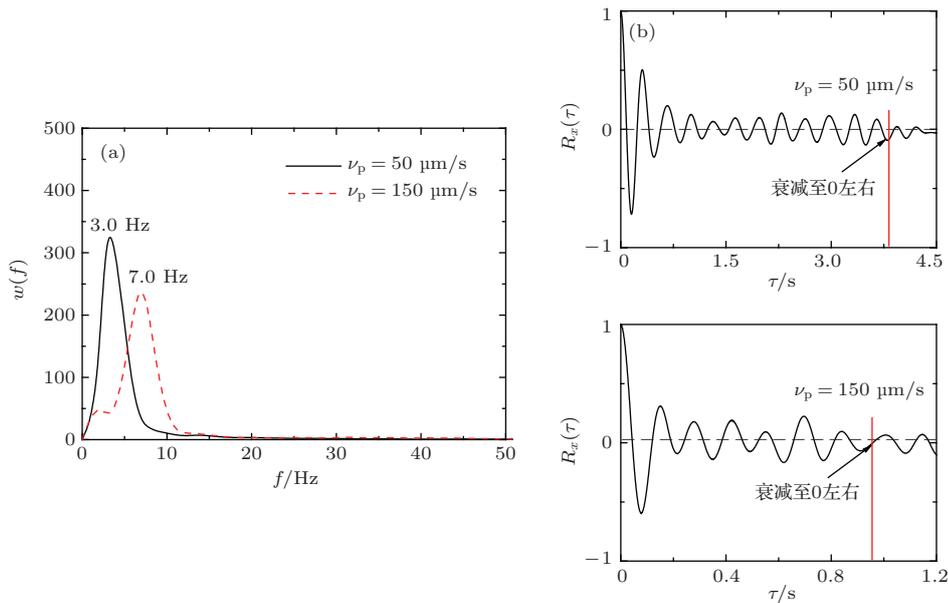


图2 (网刊彩色) 不同抽拉速度下 (a) 波包内部侧向分枝生成频率, (b) 侧向分枝随时间间隔演变的相关函数  
Fig. 2. (color online) Under different draw velocities (a) frequencies of sidebranches formation in different bursts and (b) correlation functions of sidebranches over time.

### 3.2 周期扰动下的规则侧向分枝

#### 3.2.1 无随机噪声条件下的侧向分枝形态调整

实验研究<sup>[12-15]</sup>表明, 外加周期性强制扰动可以使枝晶产生规则的侧向分枝形态. 为排除真实体系中随机扰动的可能影响, 本节首先研究无随机噪声时外加周期性强制扰动条件下的枝晶生长行为.

图 3(a) 为施加不同频率的周期扰动时所获得的枝晶形态. 可以发现, 当扰动频率  $f = 5 \text{ Hz}$  和  $f = 45 \text{ Hz}$  时, 枝晶主干光滑, 没有侧向分枝产生; 而扰动频率  $f = 15, 25, 35 \text{ Hz}$  时, 侧向分枝的形态非常规则. 这表明加入周期扰动时, 只有一定范围内的扰动频率才能激发枝晶产生规则侧向分枝. 对比图 1(c) 还可发现, 激发规则侧向分枝所需周期扰动的频率范围与真实体系在随机噪声条件下的侧

向分枝生成频率范围基本一致, 大约为 7—43 Hz. 图 3(a) 还表明, 周期扰动频率不同时, 侧向分枝的间距和振幅也有变化. 图 3(b) 为不同频率扰动下界面水平位置  $x(z_0)$  随时间的变化曲线, 可以看出界面水平位置的规则性振荡. 对  $x(z_0)-t$  曲线做傅里叶变换后得到侧向分枝生成频谱, 如图 3(c), 对应扰动频率  $f = 15, 25, 35 \text{ Hz}$  所得到的侧向分枝生成频率分别为  $f = 15, 25, 35 \text{ Hz}$ , 这说明侧向分枝的生成频率和周期扰动频率是一致的. 在固定抽拉速度下, 侧向分枝生成频率决定了侧向分枝间距, 因此扰动频率越高时侧向分枝间距越小. 这说明通过施加高频强制扰动, 可以在一定程度上减小枝晶二次间距、细化枝晶组织.

为说明侧向分枝振幅的变化, 统计了固-液界面水平位置随时间规则振荡时波峰  $x(z_0)$  值和波谷  $x(z_0)$  值之差  $a$ , 其代表侧向分枝的振幅, 如图 3(b)

所示. 侧向分枝振幅  $a$  随外加扰动频率的变化曲线如图 3(d) 所示, 可以发现,  $a$  先变大后变小, 并且在  $f = 23.9$  Hz 时  $a$  最大, 这表明侧向分枝振幅随扰动频率变化存在先变大后变小的规律. 模拟结果还表明了侧向分枝出现最大振幅时外加的强制扰

动频率的特点: 侧向分枝振幅  $a$  最大时的扰动频率  $f = 23.9$  Hz 为波包内部侧向分枝生成频率, 因此, 当外加扰动频率与波包内部侧向分枝生成频率一致时, 侧向分枝振幅最大, 当周期扰动频率偏离这一频率时, 侧向分枝振幅将变小.

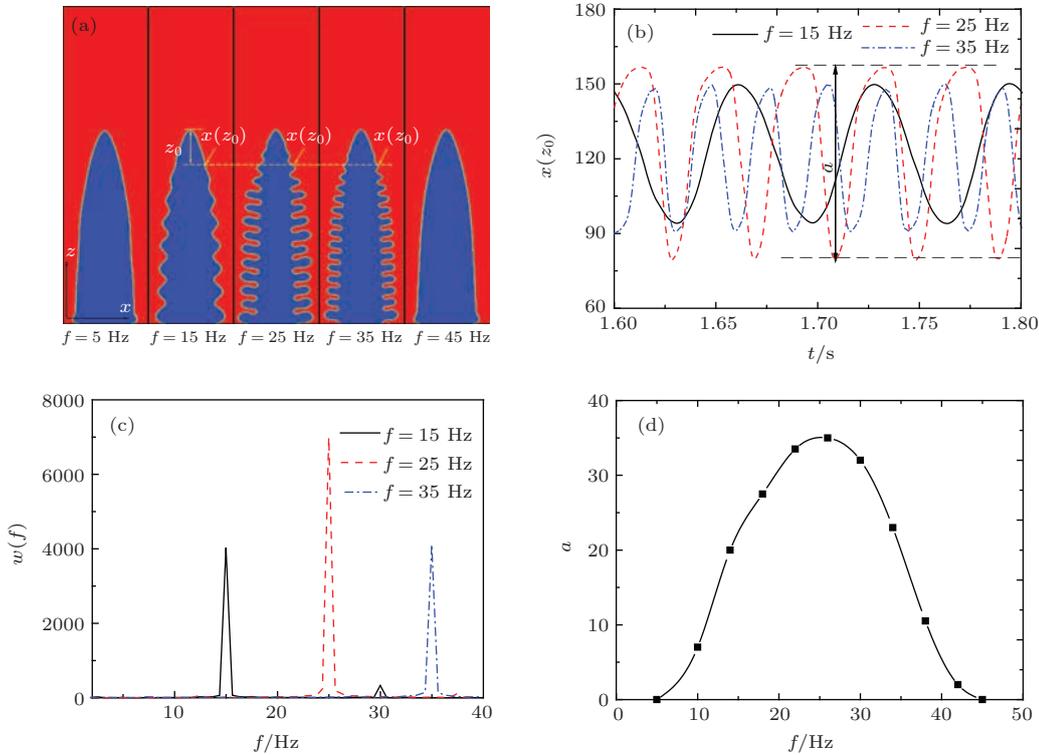


图 3 (网刊彩色) 周期扰动条件下, (a) 枝晶形态的随扰动频率的变化, (b) 距离枝晶尖端  $z_0$  处的界面的规则振荡, (c) 对应 (b) 中三种振荡曲线的傅里叶变换频谱, (d) 扰动频率变化时侧向分枝振幅  $a$  的变化

Fig. 3. (color online) Under time-periodic external forces (a) the evolution of dendritic morphologies over frequencies, (b) regular oscillations of the interface position in the distance of  $z_0$  from dendrite tips, (c) Fourier spectrums of the three oscillations curves in (b) and (d) the evolution of sidebranches' amplitudes over frequencies.

### 3.2.2 耦合随机噪声下的侧向分枝形态调控

进一步研究了体系存在随机噪声时外加周期扰动条件下的定向凝固枝晶生长行为, 结果如

图 4(a) 所示. 可以发现, 当外加周期扰动频率为  $f = 20, 25, 30$  Hz 时, 侧向分枝表现出显著的规则性; 在  $f = 15$  Hz 和  $f = 35$  Hz 时, 虽然侧向分枝形

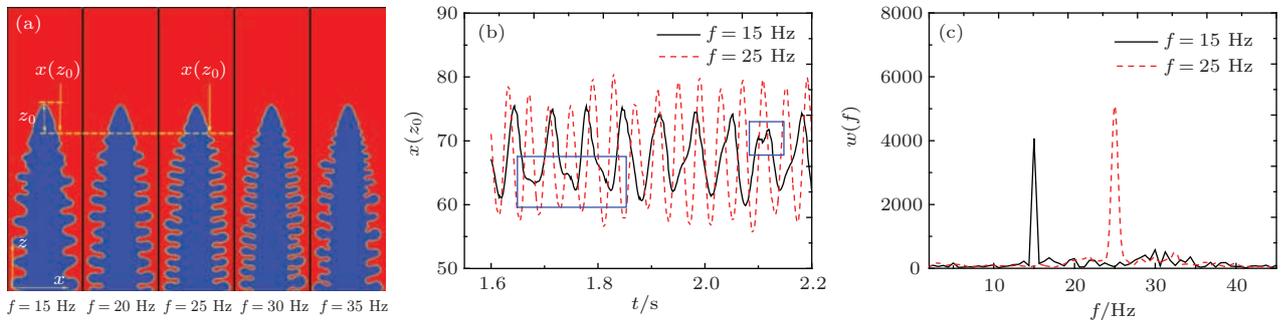


图 4 (网刊彩色) 随机噪声存在时, 不同频率周期扰动下 (a) 枝晶形态随周期频率的变化, (b) 距离尖端位置  $z_0$  处侧向分枝的演化过程, (c) 对应图 (b) 中演化曲线的傅里叶变换频谱

Fig. 4. (color online) Under different time-periodic external forces in the presence of random noise (a) the evolution of dendritic morphologies over frequencies, (b) the development of sidebranches in the distance of  $z_0$  from dendrite tips and (c) Fourier spectrums of the evolving curves in (b).

态并不完全规则,但与随机噪声下的情形相比,侧向分枝也表现出了明显的规则性.从界面水平位置 $x(z_0)$ 随时间变化曲线(图4(b)所示)可以看出,在加入频率为 $f = 15$  Hz的周期扰动后,界面呈现近似周期性的波动,但这种周期性波动行为有时出现紊乱,如图4(b)中方框标识的实曲线所示;而在加入频率为 $f = 25$  Hz的周期扰动后,界面振荡则显著规则.图4(c)为对图4(b)曲线做傅里叶变换的频谱图,可以看出侧向分枝生成频率和调控频率一致,且此时两个尖峰的频率都在图1(c)的频率选择范围内.以上结果与上节结果基本一致,不同之处仅在于图3(d)中不存在尖峰频率之外的频率,而图4(c)在峰值频率以外也有微小波动,即说明存在除了峰值频率外其他频率的界面扰动出现,这是因为在选择频率范围内的随机噪声也能促使侧向分枝的产生.

## 4 结 论

通过相场法数值模拟研究了随机噪声和外加周期扰动两种条件下的定向凝固枝晶侧向分枝演化行为,分析了侧向分枝波包的行为特点、侧向分枝的生成频率和侧向分枝振幅大小的变化规律,得到的主要结论为:

1) 模拟结果进一步证实了侧向分枝波包行为的存在,波包内部侧向分枝具有相关性,不同波包内侧向分枝生成频率相同;

2) 定向凝固枝晶侧向分枝产生频率存在一个选择范围,在这一频率范围内施加周期性强制扰动可以生成规则的侧向分枝;

3) 周期扰动条件使侧向分枝规则时,侧向分枝振幅随扰动频率的增加先变大后变小,当扰动频率等于波包内部侧向分枝生成频率时,侧向分枝振幅达到最大.

## 参考文献

- [1] Pieters R, Langer J S 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 1948
- [2] Langer J S 1987 *Phys. Rev. A* **36** 3350
- [3] Martin O, Goldenfeld N 1987 *Phys. Rev. A* **35** 1382

- [4] Kessler D A, Koplik J, Levine H 1984 *Phys. Rev. A* **30** 3161
- [5] van Saarloos W, Caroli B, Caroli C 1993 *J. Phys. I* **3** 741
- [6] Bisang U, Bilgram J H 1996 *Phys. Rev. E* **54** 5309
- [7] Dougherty A, Kaplan P D, Gollub J P 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1652
- [8] Honjo H, Ohta S, Sawada Y 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 841
- [9] Pocheau A, Bodea S, Georgelin M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 031601
- [10] Georgelin M, Bodea S, Pocheau A 2007 *Europhys. Lett.* **77** 46001
- [11] Bouissou P, Chiffaudel A, Perrin B, Tabeling P 1990 *Europhys. Lett.* **13** 89
- [12] Börzsönyi T, Tóth-Katona T, Buka Á, Gránásky L 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 2853
- [13] Börzsönyi T, Tóth-Katona T, Buha Á, Gránásky L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 7817
- [14] Williams L M, Muschol M, Qian X, Losert W, Cummins H Z 1993 *Phys. Rev. E* **48** 489
- [15] Kobayashi R 1993 *Physica D* **63** 410
- [16] Kobayashi R 1994 *Exp. Math.* **3** 59
- [17] Karma A, Lee Y H, Plapp M 2000 *Phys. Rev. E* **21** 3996
- [18] Zhao D P, Jing T, Liu B C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1737 (in Chinese) [赵代平, 荆涛, 柳百成 2003 物理学报 **52** 1737]
- [19] Boettinger W J, Warren J A 1999 *J. Cryst. Growth.* **200** 583
- [20] Wang J C, Li J J, Yang Y J, Zhang Y X, Yang G C 2008 *Sci. China E* **38** 16 (in Chinese) [王锦程, 李俊杰, 杨玉娟, 张玉祥, 杨根仓 2008 中国科学 E **38** 16]
- [21] Greenwood M, Haataja M, Provatas N 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 246101
- [22] Steinbach I 2008 *Acta Mater.* **56** 4965
- [23] Wang Z J, Wang J C, Yang G C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1246 (in Chinese) [王志军, 王锦程, 杨根仓 2008 物理学报 **57** 1246]
- [24] Li J J, Wang Z J, Wang Y Q, Wang J C 2012 *Acta Mater.* **60** 1478
- [25] Wang Y Q, Wang J C, Li J J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 118103 (in Chinese) [王雅琴, 王锦程, 李俊杰 2012 物理学报 **61** 118103]
- [26] Echebarria B, Karma A, Gurevich S 2010 *Phys. Rev. E* **81** 021608
- [27] Steinbach I, Pezzolla F, Nestler B 1996 *Physica D* **94** 135
- [28] Kim S G, Kim W T, Suzuki T 2004 *J. Cryst. Growth* **261** 135
- [29] Yang X L, Dong H B, Wang W 2004 *Mater. Sci. Engin. A* **386** 129

# Growth behaviors and forced modulation characteristics of dendritic sidebranches in directional solidification\*

Guo Chun-Wen Li Jun-Jie Ma Yuan Wang Jin-Cheng<sup>†</sup>

(State Key Laboratory of Solidification Processing, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

( Received 29 January 2015; revised manuscript received 18 March 2015 )

## Abstract

Growth behaviors of dendritic sidebranches under random noises and characteristics of sidebranches modulated by external forces in directional solidification are studied by using phase field simulations. Simulation results show that, under random noises no regular sidebranches appears all the time, but sidebranches can be formed within a suitable range of frequencies. Moreover, strongly correlated sidebranches are formed at a fixed frequency and in a certain period, usually called a burst, to appear. There is no correlation between different bursts, but the frequency of every sidebranch within a burst is the same as its precursor, and this fixed frequency is consistent with the peak frequency of the whole spectrum of sidebranch. By introducing a time-periodic external force with a frequency in the range of the whole spectrum, regular dendritic sidebranches can be induced, and they can be most developed if the frequency of the external force is the same with that in a burst. The simulation results can provide guidance to control dendritic morphologies in solidification.

**Keywords:** phase field method, directional solidification, dendrite, sidebranches

**PACS:** 81.10.-h, 64.70.D-, 68.08.De

**DOI:** [10.7498/aps.64.148101](https://doi.org/10.7498/aps.64.148101)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51371151, 51101124), and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB610401).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [jchwang@nwpu.edu.cn](mailto:jchwang@nwpu.edu.cn)