物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

一般完整系统Mei对称性的逆问题

黄卫立

Inverse problem of Mei symmetry for a general holonomic system

Huang Wei-Li

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 170202 (2015)   DOI: 10.7498/aps.64.170202
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170202
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I17

一般完整系统Mei对称性的逆问题*

黄卫立†

(湖南城市学院通信与电子工程学院, 益阳 413000)

(2015 年 4 月 20 日收到; 2015 年 5 月 17 日收到修改稿)

动力学逆问题是星际航行学、火箭动力学、规划运动学理论的基本问题. Mei 对称性是力学系统的动力学函数在群的无限小变换下仍然满足系统原来的运动微分方程的一种新的不变性. 本文研究广义坐标下一般完整系统的 Mei 对称性以及与 Mei 对称性相关的动力学逆问题. 首先, 给出系统动力学正问题的提法和解法. 引入时间和广义坐标的无限小单参数变换群, 得到无限小生成元向量及其一次扩展. 讨论由 n 个广义坐标确定的一般完整力学系统的运动微分方程, 将其 Lagrange 函数和非势广义力作无限小变换, 给出系统运动微分方程的 Mei 对称性定义, 在忽略无限小变换的高阶小量的情况下得到 Mei 对称性的确定方程, 借助规范函数满足的结构方程导出系统 Mei 对称性导致的 Noether 守恒量. 其次, 研究系统 Mei 对称性的逆问题. Mei 对称性的逆问题的提法是: 由已知守恒量来求相应的 Mei 对称性. 采取的方法是将已知积分当作由 Mei 对称性导致的 Noether 守恒量, 由 Noether 逆定理得到无限小变换的生成元, 再由确定方程来判断所得生成元是否为 Mei 对称性的. 然后, 讨论生成元变化对各种对称性的影响. 结果表明, 生成元变化对 Noether 和 Lie 对称性没有影响, 对 Mei 对称性有影响, 但在调整规范函数时, 若满足一定条件, 生成元变化对 Mei 对称性也可以没有影响. 最后, 举例说明结果的应用.

关键词: 一般完整系统, Mei 对称性, 守恒量, 逆问题

PACS: 02.20.Sv, 02.30.Zz, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.64.170202

1 引 言

动力学逆问题是星际航行学、火箭动力学、规划运动学理论的基本问题. 随着空间技术以及其他工业技术的发展, 系统动力学及其逆问题的研究显得越来越重要. 文献 [1, 2] 对动力学逆问题的提法和解法给出了较全面的论述. 2000 年, Mei 提出系统的动力学函数在群的无限小变换下仍然满足力学系统原来的运动微分方程的一种不变性 [3], 人们称之为 Mei 对称性 [4–8], 并由此直接导致 Mei 守恒量. 近年来, 动力学系统的 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性及其守恒量的研究倍受人们关注 [9–27]. 动力学系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的逆问题也成为一个热门话题 [2,28–31]. 但是, 动力学系统 Mei 对称性的逆问题却很少研究. 为此, 本文探讨一般完整系统 Mei 对称性的逆问题.

2 一般完整系统 Mei 对称性的动力学正问题

取时间 t 和广义坐标 q_s 的无限小单参数点变换群

$$\begin{aligned}&t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, q),\\&q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, q),\end{aligned} \tag{1}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为群的无限小变换的生成元或生成函数. 将广义坐标 $q_s^*(t^*)$ 对时间 t^* 求一阶导数得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q_s^*}{\mathrm{d}t^*} &= \frac{\mathrm{d}q_s + \varepsilon\mathrm{d}\xi_s}{\mathrm{d}t + \varepsilon\mathrm{d}\xi_0} = \frac{\dot q_s + \varepsilon\dot\xi_s}{1 + \varepsilon\dot\xi_0}\\&= (\dot q_s + \varepsilon\dot\xi_s)(1 - \varepsilon\dot\xi_0) + o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10932002) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LY12A02008) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: amuu@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

$$= \dot{q}_s + \varepsilon(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + o(\varepsilon^2)$$
$$= \dot{q}_s + \varepsilon X^{(1)}(\dot{q}_s) + o(\varepsilon^2), \tag{2}$$

式中

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{3}$$

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{4}$$

$X^{(0)}$, $X^{(1)}$ 分别为无限小生成元向量及其一次扩展.

将上述结果推广到一个函数或方程在无限小变换(1)式下的一般情况, 我们得到

$$F^* = F\left(t^*, q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}\right)$$
$$= F\left(t, q, \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right) + \varepsilon X^{(1)}(F) + o(\varepsilon^2). \tag{5}$$

显然, 当

$$X^{(1)}(F) = 0, \tag{6}$$

忽略高阶项, 得到

$$F^* = F. \tag{7}$$

(6)式为F对称性的确定方程.

设一般完整力学系统的位形由n个广义坐标$q_s(s = 1, \cdots, n)$来确定, 其运动微分方程有如下形式:

$$E_s(L) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s,$$
$$(s = 1, \cdots, n), \tag{8}$$

假设在无限小变换(1)下, Lagrange函数L变为L^*, 非势广义力Q_s变为Q_s^*, 由(5)式易得

$$L^* = L\left(t^*, q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}\right)$$
$$= L(t, q, \dot{q}) + \varepsilon X^{(1)}(L) + o(\varepsilon^2), \tag{9}$$

$$Q_s^* = Q_s\left(t^*, q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}\right)$$
$$= Q_s(t, q, \dot{q}) + \varepsilon X^{(1)}(Q_s) + o(\varepsilon^2), \tag{10}$$

如果动力学函数(L, Q_s)变换成为(L^*, Q_s^*)后而动力学方程(8)的形式保持不变, 即

$$E_s(L^*) = Q_s^*, \tag{11}$$

人们称这种不变性为系统的Mei对称性.

将(9)和(10)式代入(11)式, 忽略高阶小量, 并利用方程(8)可得广义坐标下一般完整系统Mei对称性的确定方程

$$\{E_s[X^{(1)}(L)] - X^{(1)}(Q_s)\}\big|_{E_s(L)=Q_s} = 0. \tag{12}$$

为方便研究Mei对称性的动力学逆问题, 我们给出Mei对称性导致的Noether守恒量. 利用方程(8), 消去$\partial L/\partial q_s$可得

$$X^{(1)}(L) = \xi_0\frac{\partial L}{\partial t} + \xi_s\left(\frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_S} - Q_s\right)$$
$$+ (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}$$
$$= \frac{d}{\mathrm{d}t}\left[(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + L\xi_0\right] - L\dot{\xi}_0$$
$$- (Q_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0). \tag{13}$$

令

$$G = -\left[(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + L\xi_0\right] + \mathrm{const}, \tag{14}$$

显然有下述结果.

命题1 对一般完整系统, 如果Mei对称性的生成元ξ_0, ξ_s和规范函数$G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t, q, \dot{q})$满足如下结构方程:

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_{\mathrm{N}} = 0, \tag{15}$$

则Mei对称性导致Noether守恒量

$$I_{\mathrm{N}} = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{N}} = \mathrm{const}. \tag{16}$$

事实上, 利用(15)式, 容易验证 $\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{N}}}{\mathrm{d}t} = 0$.

一般完整系统的Mei对称性满足一定条件时还可导致相应的其他守恒量, 如Mei守恒量、Hojman守恒量等[9,10], 此处不再讨论.

3 Mei对称性的动力学逆问题

一般完整系统的Mei对称性逆问题的提法是: 由已知守恒量来求相应的Mei对称性.

3.1 由Noether对称性导出Mei对称性的逆问题

为解上述Mei对称性的逆问题, 可先由Noether理论按已知守恒量找到相应的Noether对称性, 再由确定方程来判断所得对称性是否为Mei的.

假设一般完整系统有守恒量

$$I = I(t, q, \dot{q}) = \mathrm{const}, \tag{17}$$

将 (17) 式对 t 求导, 有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s=0. \tag{18}$$

令

$$\bar{\xi}_s=\xi_s-\dot{q}_s\xi_0, \tag{19}$$

将 (8) 式两端乘以 $\bar{\xi}_s$, 并对 s 求和, 得

$$\bar{\xi}_s(E_s(L)-Q_s)=0, \tag{20}$$

将 (18) 式与 (20) 式相加, 分出含 $\ddot{q}_k$ 的项, 因沿任意轨道所有 $\ddot{q}_k$ 的系数应为零, 从而得到

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_k}=0,\quad (k=1,\cdots,n). \tag{21}$$

当系统非奇异时, $D=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0$, 由 (21) 式可得

$$\bar{\xi}_s=\tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_k},\\ (s=1,\cdots,n;k=1,\cdots,n), \tag{22}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk}h_{kr}=\delta_{sr},\quad h_{sk}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}. \tag{23}$$

再令积分 (17) 等于 Noether 守恒量 (16), 即

$$\begin{aligned}I&=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{N}}\\&=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_k}+G_{\mathrm{N}},\end{aligned} \tag{24}$$

这样, 由 (22) 和 (24) 式在给定规范函数 G_{N} 下可求出无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 它们对应于与一般完整系统的 Noether 对称性. 注意, 其中包含规范函数 G_{N}.

将上述所得到的 Noether 对称性生成元 ξ_0,ξ_s 代入 Mei 对称性确定方程 (12) 来检验对称性是否 Mei 的, 有下述结果.

命题 2 如果由方程 (22) 及 (24) 确定的无限小生成元 ξ_0 和 ξ_s 满足确定方程 (12), 则所得对称性为一般完整系统的 Mei 对称性.

顺便指出, 对于 Lie 对称性, 同样有下述类似的结果.

命题 3 如果由方程 ((22) 及 (24) 确定的无限小生成元 ξ_0 和 ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程

$$X^{(2)}[E_s(L)-(Q_s)]=0. \tag{25}$$

则所得对称性为一般完整系统的 Lie 对称性.

3.2 生成元变化对于对称性的影响

由上所述, 由已知守恒量寻找 Noether 对称性生成元 ξ_0,ξ_s 时, 由于规范函数 G_{N} 可自由选取, 而使生成元有所不同. 那么, 在调整规范函数时, 对称性是否变化呢?

由 (22) 和 (23) 式可知, 虽然生成元 ξ_0,ξ_s 变化, 但 $\bar{\xi}_s=\xi_s-\dot{q}_s\xi_0$ 不受其影响. 因为对于某一确定系统 (即某一 L, $h_{sk}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}$ 是一定的) 和某一守恒量 I, $\bar{\xi}_s=\tilde{h}_{sk}\dfrac{\partial I}{\partial\dot{q}_k}$ 是确定的.

由 (19) 式可得

$$\dot{\xi}_s=\dot{\bar{\xi}}_s+\ddot{q}_s\xi_0+\dot{q}_s\dot{\xi}_0, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}X^{(1)}(L)&=\xi_0\frac{\partial L}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial L}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\\&=\dot{L}\xi_0+\left(\bar{\xi}_s\frac{\partial L}{\partial q_s}+\dot{\bar{\xi}}_s\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right).\end{aligned} \tag{27}$$

对于 Noether 对称性, 因为对于某一确定系统 (L) 和某一守恒量 (I), $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\tilde{h}_{sk}\dfrac{\partial I}{\partial\dot{q}_k}$ 是确定的. 因此, $L\xi_0+G_{\mathrm{N}}=I-\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s=\mathrm{const}$, 从而

$$\begin{aligned}&L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{N}}\\&=L\dot{\xi}_0+\dot{L}\xi_0+\left(\bar{\xi}_s\frac{\partial L}{\partial q_s}+\dot{\bar{\xi}}_s\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)+Q_s\bar{\xi}_s+\dot{G}_{\mathrm{N}}\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L\xi_0+G_{\mathrm{N}})+\left(\bar{\xi}_s\frac{\partial L}{\partial q_s}+\dot{\bar{\xi}}_s\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)+Q_s\bar{\xi}_s\\&=\left(\bar{\xi}_s\frac{\partial L}{\partial q_s}+\dot{\bar{\xi}}_s\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)+Q_s\bar{\xi}_s,\end{aligned} \tag{28}$$

上式是否为零, 仅与 $\bar{\xi}_s$ 有关, ξ_0 不明显出现. 因此, 有下述结果:

命题 4 生成元 ξ_0,ξ_s 变化对 Noether 对称性没有影响.

同理有

命题 5 生成元 ξ_0,ξ_s 变化对 Lie 对称性没有影响.

这可从 Lie 对称性确定方程来考虑, 将 Lie 对称性确定方程 (25)

$$X^{(2)}[E_s(L)-(Q_s)]=0. \tag{29}$$

左边可改写为

$$\begin{aligned}&X^{(2)}[E_s(L)-(Q_s)]\\&=\xi_0\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial t}+\xi_k\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial q_k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial\dot{q}_k}\\
&+(\ddot{\xi}_k-2\ddot{q}_k\dot{\xi}_0-\dot{q}_k\ddot{\xi}_0)\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial\ddot{q}_k}\\
=&\,\xi_0\frac{d[E_s(L)-(Q_s)]}{\mathrm{d}t}+\bar{\xi}_k\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial q_k}\\
&+\dot{\bar{\xi}}_k\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial\dot{q}_k}+\ddot{\bar{\xi}}_k\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial\ddot{q}_k}\\
=&\,\bar{\xi}_k\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial q_k}+\dot{\bar{\xi}}_k\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial\dot{q}_k}\\
&+\ddot{\bar{\xi}}_k\frac{\partial[E_s(L)-(Q_s)]}{\partial\ddot{q}_k},
\end{aligned}\tag{30}
$$

显然, (30) 式是否为零, 也仅与 $\bar{\xi}_k$ 有关, ξ_0 不明显出现.

然而, 对 Mei 对称性, 利用 (27) 式有

$$
\begin{aligned}
&E_s[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}(Q_s)\\
=&\,E_s(\dot{L}\xi_0)-\dot{Q}_s\xi_0+E_s\left(\bar{\xi}_k\frac{\partial L}{\partial q_k}+\dot{\bar{\xi}}_k\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right)\\
&-\left(\bar{\xi}_k\frac{\partial Q_s}{\partial q_k}+\dot{\bar{\xi}}_k\frac{\partial Q_s}{\partial\dot{q}_k}\right),
\end{aligned}\tag{31}
$$

生成元 ξ_0 明显出现于 (31) 式中, 因此有

命题 6 生成元 ξ_0,ξ_s 变化对对 Mei 对称性有影响. 但是, 在调整规范函数 $G_{\rm N}$ 时, 若 $E_s(\dot{L}\xi_0)-\dot{Q}_s\xi_0$ 保持不变, 则生成元变化对 Mei 对称性没有影响.

4 算 例

本节给出一个完整系统 Mei 对称性的逆问题, 其中 Lagrange 函数、广义力分别为

$$
L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),\quad Q_1=q_1^2,\quad Q_2=q_2^2.\tag{32}
$$

方程 (8) 给出

$$
\ddot{q}_1=q_1^2,\quad \ddot{q}_2=q_2^2.\tag{33}
$$

取无限小变换的生成元

$$
\xi_0=1,\quad \xi_1=0,\quad \xi_2=0,\tag{34}
$$

则有

$$
X^{(1)}(L)=X^{(1)}(Q_1)=X^{(1)}(Q_2)=0,\tag{35}
$$

$$
E_1[X^{(1)}(L)]=E_2[X^{(1)}(L)]=0.\tag{36}
$$

从而满足 Mei 对称性确定方程 (12). 因此, 系统是 Mei 对称性的.

由命题 1, 结构方程 (15) 给出

$$
\dot{G}_{\rm N}=q_1^2\dot{q}_1+q_2^2\dot{q}_2,\tag{37}
$$

取

$$
G_{\rm N}=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3),\tag{38}
$$

(16) 式给出 Mei 对称性导致的 Noether 守恒量

$$
I_{\rm N}=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)=\text{const}.\tag{39}
$$

我们再讨论其逆问题:

假设完整系统 (32) 有 (39) 式给出的一个积分

$$
I=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)=\text{const}.\tag{40}
$$

由 (22) 式给出

$$
\bar{\xi}_1=-\dot{q}_1,\quad \bar{\xi}_2=-\dot{q}_2.\tag{41}
$$

再令积分 (40) 等于 Noether 守恒量 (16), 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\\
=&\,\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\xi_0-\dot{q}_1^2-\dot{q}_2^2+G_{\rm N}.
\end{aligned}\tag{42}
$$

由此可导出

$$
\begin{aligned}
G_{\rm N}&=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)+\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)(1-\xi_0)\\
&=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)+L(1-\xi_0),
\end{aligned}\tag{43}
$$

$$
\xi_0=\frac{\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)-G_{\rm N}}{L}+1.\tag{44}
$$

取规范函数不同的值并利用 (19) 式, 可得如下不同的无限小生成元, 它们对应系统的 Noether 对称性:

$$
\begin{aligned}
&G_{\rm N}=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3),\\
&\qquad\xi_0=1,\quad \xi_1=0,\quad \xi_2=0,
\end{aligned}\tag{45a}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_{\rm N}=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)+L,\\
&\qquad\xi_0=0,\quad \xi_1=-\dot{q}_1,\quad \xi_2=-\dot{q}_2,
\end{aligned}\tag{45b}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_{\rm N}=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)-L,\\
&\qquad\xi_0=2,\quad \xi_1=\dot{q}_1,\quad \xi_2=\dot{q}_2,
\end{aligned}\tag{45c}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_{\rm N}=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)+Lq_1,\\
&\qquad\xi_0=1-q_1,\quad \xi_1=-q_1\dot{q}_1,\\
&\qquad\xi_2=-q_1\dot{q}_2,
\end{aligned}\tag{45d}
$$

$$
\begin{aligned}
&G_{\rm N}=\frac{1}{3}(q_1^3+q_2^3)+Lt,\\
&\qquad\xi_0=1-t,\quad \xi_1=-t\dot{q}_1,\quad \xi_2=-t\dot{q}_2,\\
&\qquad\cdots
\end{aligned}\tag{45e}
$$

将所得到的 Noether 对称性的生成元代入 Mei 对称性确定方程 (12), 容易验证 (45a) 式满足. 因此,

(45a) 式是Mei对称性的生成元. 由命题6, 由于

$$E_s(\dot{L}\xi_0) - (\dot{Q}_s)\xi_0 = -2q_s\dot{q}_s\xi_0, \tag{46}$$

均随 ξ_0 而变, 故 (45b)—(45e) 式不是Mei对称性的生成元.

容易验证, (45a) 式之生成元 $\xi_0 = 1$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ 满足Lie对称性确定方程 (25), 从而也是Lie对称性的. 由命题5, ξ_0, ξ_s 的变化对Lie对称性没有影响. 因此, 上述生成元 (45a)—(45e) 均是Lie 对称性的生成元.

5 结　论

一般完整系统是一类重要而常用的约束力学系统, Mei对称性是一种新的对称性, 其动力学逆问题是一个既有理论又有应用的动力学问题. 完整系统的Mei对称性在一定条件下不仅可直接导致Mei守恒量, 而且还可间接导致Noether守恒量或Hojman守恒量. 为解Mei对称性的逆问题, 可先由Noether理论按已知守恒量找到相应的Noether对称性, 再由确定方程来判断所得对称性是否为Mei的. 生成元 ξ_0, ξ_s 变化对Noether对称性或Lie对称性没有影响, 但对Mei 对称性有影响.

参考文献

[1] Galiullin A S 1986 *Methods of solution of inverse problems of dynamics* (Moscow: Nauka) (in Russian)

[2] Mei F X 2009 *Inverse Problems of Dynamics*(Beijing: National Defense Industry Press) (in Chinese) [梅凤翔 2009 动力学逆问题 (北京: 国防工业出版社)]

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[4] Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1560

[5] Cai J L 2009 *Acta Phys. Pol. A* **115** 854

[6] Wang P, Fang J H, Wang X M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1312

[7] Cai J L 2010 *Chin. J. Phys.* **48** 728

[8] Jiang W A, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060201 (in Chinese) [姜文安, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 060201]

[9] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

[10] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese)[罗绍凯, 张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]

[11] Jia L Q, Zheng S W, Zhang Y Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5575 (in Chinese) [贾利群, 郑世旺, 张耀宇 2007 物理学报 **56** 5575]

[12] Cai J L, Luo S K, Mei F X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3170

[13] Luo Y P 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 2665

[14] Cai J L 2010 *Acta Phys. Pol. A* **117** 445

[15] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chinese Physics B* **19** 030304

[16] Cai J L 2010 *Int. J. Theor. Phy.* **49** 201

[17] Jiang W A, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 475

[18] Cai J L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 487

[19] Xia L L, Chen L Q 2012 *Nonlinear Dynamics* **70** 1223

[20] Jia L Q, Wang X X, Zhang M L, Han Y L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1807

[21] Jiang W A, Li L, Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 1075

[22] Cai J L, Shi S S, Fang H J, Xu J 2012 *Meccanica* **47** 63

[23] Cai J L, Mei F X 2012 *J. Mech.* **28** 589

[24] Cai J L, Shi S S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 030201 (in Chinese) [蔡建乐, 史生水 2012 物理学报 **61** 030201]

[25] Jiang W A, Li L, Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 1075

[26] Jiang W A, Li Z J, Luo S K 2011 *Chinese Physics B* **20** 030202

[27] Jia L Q, Wang X X, Zhang M L, Han Y L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1807

[28] Liu F L, Mei F X 1993 *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.* **14** 327

[29] Li G C, Mei F X 2006 *Chin. Phys. B* **15** 1669

[30] Ibort L A, Solano J M 1991 *Inverse Problems.* **7** 713

[31] Menini L, Tornambe A 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1965

Inverse problem of Mei symmetry for a general holonomic system*

Huang Wei-Li†

(*College of Communication and Electronic Engineering, Hunan City University, Yiyang 413000, China*)

(Received 20 April 2015; revised manuscript received 17 May 2015)

Abstract

Inverse problems in dynamics are the basic problems in astronautics, rocket dynamics, and motion planning theory, etc. Mei symmetry is a kind of new symmetry where the dynamical function in differential equations of motion still satisfies the equation's primary form under infinitesimal transformations of the group. Mei symmetry and its inverse problem of dynamics for a general holonomic system in generalized coordinates are studied. Firstly, the direct problem of dynamics of the system is proposed and solved. Introducing a one-parameter infinitesimal transformation group with respect to time and coordinates, the infinitesimal generator vector and its first prolonged vector are obtained. Based on the discussion of the differential equations of motion for a general holonomic system determined by n generalized coordinates, their Lagrangian and non-potential generalized forces are made to have an infinitesimal transformation, the definition of Mei symmetry about differential equation of motion for the system is then provided. Ignoring the high-order terms in the infinitesimal transformation, the determining equation of Mei symmetry is given. With the aid of a structure equation which the gauge function satisfies, the system's corresponding conserved quantities are derived. Secondly, the inverse problem for the Mei symmetry of the system is studied. The formulation of the inverse problem of Mei symmetry is that we use the known conserved quantity to seek the corresponding Mei symmetry. The method is: considering a given integral as a Noether conserved quantity obtained by Mei symmetry, the generators of the infinitesimal transformations can be obtained by the inverse Noether theorem. Then the question whether the obtained generators are Mei symmetrical or not is verified by the determining equation, and the effect of generators' changes on the symmetries is discussed. It has been shown from the studies that the changes of the generators have no effect on the Noether and Lie symmetries, but have effects on the Mei symmetry. However, under certain conditions, while adjusting the gauge function, changes of generators can also have no effect on the Mei symmetry. In the end of the paper, an example for the system is provided to illustrate the application of the result.

Keywords: general holonomic system, Mei symmetry, conserved quantity, inverse problem

PACS: 02.20.Sv, 02.30.Zz, 11.30.–j **DOI:** 10.7498/aps.64.170202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10932002), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China (Grant No. LY12A02008).

† Corresponding author. E-mail: amuu@163.com