

磁梯度张量不变量的椭圆误差消除方法研究

吕俊伟 迟铤 于振涛 毕波 宋庆善

Research on the asphericity error elimination of the invariant of magnetic gradient tensor

Lü Jun-Wei Chi Cheng Yu Zhen-Tao Bi Bo Song Qing-Shan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 190701 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.190701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.190701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I19>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

分布式反馈激光抽运铯磁力仪灵敏度相关参数研究

study on sensitivity-related parameters of distributed feedback laser-pumped cesium atomic magnetometer

物理学报.2014, 63(11): 110701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110701>

四面体磁梯度张量系统的载体磁干扰补偿方法

A vehicle magnetic noise compensation method for the tetrahedron magnetic gradiometer

物理学报.2014, 63(11): 110702 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.110702>

基于全光纤萨格纳克干涉仪的温度不敏感磁场测量

Temperature-insensitive magnetic-field measurement using all-fiber Sagnac interferometers

物理学报.2013, 62(13): 130701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.130701>

## 磁梯度张量不变量的椭圆误差消除方法研究\*

吕俊伟<sup>1)</sup> 迟铨<sup>1)†</sup> 于振涛<sup>2)</sup> 毕波<sup>1)</sup> 宋庆善<sup>3)</sup>

1)(海军航空工程学院控制工程系, 烟台 264001)

2)(海军潜艇学院遥感所, 青岛 266001)

3)(中国人民解放军91213部队装备部, 烟台 264001)

(2015年3月1日收到; 2015年5月25日收到修改稿)

基于磁梯度张量不变量定位方法, 可以实现对目标的单点实时定位, 且定位目标不限于静止目标, 这一方法目前得到了人们的广泛关注, 但该方法由于存在着椭圆系数导致目标定位误差较大的问题. 针对该问题, 提出了一种基于正六面体磁梯度张量测量系统的单点实时定位改进方法, 该方法通过消除原定位方法中不变量存在的椭圆系数, 从而克服椭圆误差对定位精度的影响. 具体做法是通过求解测量系统中正六面体的六个平面中心点处磁梯度张量的特征值, 并把这些特征值按照一定关系进行组合来消除椭圆系数, 来获得六个平面的新不变量, 再对这些新不变量求其梯度值, 根据这些梯度值对目标进行定位, 这样该定位方法可以有效的克服椭圆误差, 可对目标进行单点实时定位. 对改进定位方法进行了仿真实验分析, 结果表明改进方法可以实现目标的单点实时定位, 定位的平均相对误差较现有方法减少10.9%. 改进方法对所搭载平台的机动性要求较低, 其平台可做直线或曲线运动对目标实现单点实时定位.

关键词: 磁梯度张量, 不变量, 椭圆误差, 定位

PACS: 07.55.Ge, 52.70.Ds

DOI: 10.7498/aps.64.190701

## 1 引言

磁梯度张量探测技术<sup>[1-5]</sup>是对未知爆炸物(UXO)探测的重要手段, 具有重要的军事意义, 磁梯度张量定位方法最大的优点就是可以有效的克服地磁场的干扰, 提高磁性目标的定位精度. 磁梯度张量定位方法可实现对目标的精确定位, 但对搭载平台的运动要求较高<sup>[6]</sup>, 平台的机动会对定位结果带来很大的干扰.

磁梯度张量不变量<sup>[6-11]</sup>是磁梯度张量进行一定的运算得到一些不随坐标系变化而变化的标量, 常见的不变量有磁梯度张量的迹、特征值、Frobenius范数等, 因为磁梯度张量不变量具有不随坐标系的变化而改变的性质, 因此非常适合于移动平台对目标的定位, 现已经成为国内外的研究热点. 早在1985年, Wilson<sup>[8]</sup>就提出了一个与磁偶极子的

方向无关的不变量, 该不变量可直接由磁梯度张量的特征值求得, 并且在距离目标最近的点处达到最大值, 该定位方法通过测量沿着一条直线上的不同点处的不变量来对磁性目标进行定位; Clark<sup>[9]</sup>利用这个不变量, 来消除测量过程中的磁干扰, 其方法是通过测量一条直线上的连续点的不变量对目标进行精确定位, 该方法利用的不变量与磁偶极子的方向无关, 但是不能对磁性目标进行实时定位, 并且只能对静止目标进行定位. Wiegert<sup>[6,10,11]</sup>研制的正六面体磁梯度张量测量系统可以实现对UXO的单点实时定位, 且定位目标不限于静止目标, 但该方法利用的磁梯度张量的Frobenius范数存在椭圆系数, 对该不变量求梯度定位时, 给定位结果带来误差. 在此基础上, 陈谨飞等<sup>[12]</sup>利用正六面体磁梯度张量测量系统对不同方位的磁性目标进行定位分析, 分析结果表明影响目标距离矢量的误差的主要因素为椭圆系数. 为了消除这个椭圆

\* 国家高技术研究发展计划(批准号: 2010AAJ211)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: cheng.chihhu@163.com

系数所带来的椭圆误差, Sui 等<sup>[13]</sup>则设计一种迭代算法对正六面体磁梯度张量测量系统的椭圆误差进行矫正, 取得了较好的效果.

针对目前人们研究中所存在的椭圆误差对定位结果影响较大的问题, 本文通过研究椭圆系数消除方法, 提出一种基于正六面体磁梯度张量测量系统的改进定位方法, 该方法在前人方法的基础上通过构造一个新的不变量来对目标进行定位, 该不变量不包含椭圆系数, 因此该方法可以有效的克服椭圆误差, 且能对目标进行单点实时定位, 定位不限于静止目标, 计算过程简单, 容易实现. 该方法首先根据正六面体磁梯度张量测量系统所测量的六个平面中心点处的磁梯度张量值, 通过计算磁梯度张量的特征值来消除椭圆系数, 并根据这些特征值及磁梯度张量的分量值分别求得六个平面的不变量, 最后对正六面体中心处的不变量求其梯度值, 根据这些梯度值与不变量之间的比值相结合得到目标的位置坐标. 该方法可应用于移动平台, 可实现对磁性目标的实时点对点定位, 因此具有很高的应用价值.

## 2 正六面体磁梯度张量不变量定位理论

距离测量系统较远处的磁性目标可以视为一个磁偶极子, 磁偶极子模型可表示如下:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right], \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{m}$  为磁性目标的磁矩,  $r$  为目标到测量系统的距离矢量,  $\mu$  为磁导率, 在空气中  $\mu \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A}$ .

磁梯度张量定义为磁场三个分量值沿三个坐标轴的变化率, 表达式如下:

$$\mathbf{G} = \nabla \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial B_x / \partial x & \partial B_x / \partial y & \partial B_x / \partial z \\ \partial B_y / \partial x & \partial B_y / \partial y & \partial B_y / \partial z \\ \partial B_z / \partial x & \partial B_z / \partial y & \partial B_z / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

磁梯度张量共有 9 个分量组成, 各个分量的表达式如下所示:

$$G_{ij} = \frac{\partial B_i}{\partial r_j} = \frac{3\mu}{4\pi} \left[ \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\delta_{ij} + r_i m_j + r_j m_i}{r^5} - \frac{5r_i r_j (\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^7} \right], \quad (3)$$

式中,  $m$  为磁矩矢量的模,  $r$  为距离矢量的模, 下标  $i, j$  代表笛卡尔坐标系下的三个分量, 当  $i = j$  时,  $\delta_{ij} = 1$ , 当  $i \neq j$  时,  $\delta_{ij} = 0$ . 由上式可得磁梯度张量为对称二阶张量. 因为地磁场的梯度<sup>[2,3]</sup>小于等于  $0.02 \text{ nT}/\text{m}$ , 因此通过磁梯度张量进行定位可以消除地磁场的干扰. 磁梯度张量系统可有多种形式, 本文中采用正六面体磁梯度张量测量系统如图 1 所示.

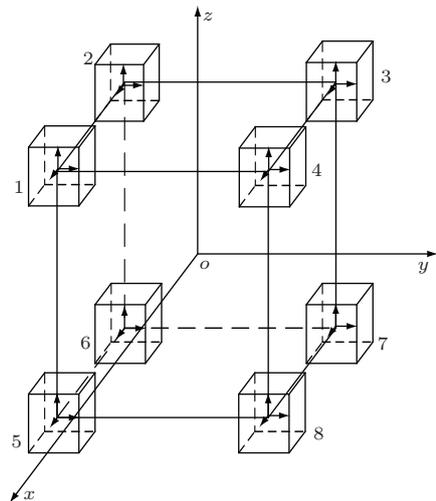


图 1 正六面体磁梯度张量测量系统结构图

Fig. 1. Structure chart of cube magnetic gradiometer system.

由图 1 可以看出, 坐标原点位于正六面体的中心, 三个坐标轴分别垂直穿过对应正六面体的两个平面的中心点, 八台磁力仪分别位于正六面体的八个顶点处, 磁力仪的三个轴与坐标系的三轴保持一致. 通过不同磁力仪的测量值可以求得各个面的磁梯度张量值如下式:

$$\mathbf{G}_{z+} = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} B_{x1} + B_{x4} - B_{x2} - B_{x3} & B_{x3} + B_{x4} - B_{x1} - B_{x2} \otimes \\ B_{y1} + B_{y4} - B_{y2} - B_{y3} & B_{y3} + B_{y4} - B_{y1} - B_{y2} \otimes \\ B_{z1} + B_{z4} - B_{z2} - B_{z3} & B_{z3} + B_{z4} - B_{z1} - B_{z2} \otimes \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$G_{z-} = \frac{1}{2d} \begin{bmatrix} B_{x5} + B_{x8} - B_{x6} - B_{x7} & B_{x7} + B_{x8} - B_{x5} - B_{x6} & \otimes \\ B_{y5} + B_{y8} - B_{y6} - B_{y7} & B_{y7} + B_{y8} - B_{y5} - B_{y6} & \otimes \\ B_{z5} + B_{z8} - B_{z6} - B_{z7} & B_{z7} + B_{z8} - B_{z5} - B_{z6} & \otimes \end{bmatrix}, \quad (5)$$

式中  $B_{x1}$  代表标号为1的磁力仪测量的  $x$  轴分量,  $G_{z+}$  代表  $z$  坐标轴正方向对应平面中心点处的磁梯度张量,  $d$  为系统的基线长度, 即正六面体的边长,  $\otimes$  代表的分量可由磁梯度张量的对称性求得. 依次可以写出沿  $x$  和  $y$  坐标轴对应平面中心点处的磁梯度张量的表达式, 通过测量数据可以得到正六面体的六个平面中心点对应的磁梯度张量.

磁梯度张量不变量是一些不随坐标系变化而变化的标量, 有多种定义方法, 常见的不变量有磁梯度张量的 Frobenius 范数、迹、特征值等, 文献 [6] 中定义的不变量为磁梯度张量的 Frobenius 范数, 即

$$C_T = \left[ \sum (G_{ij}^2) \right]^{0.5} = \frac{k\mu m}{4\pi r^4}. \quad (6)$$

上式中  $k$  称为椭圆系数,  $k$  的取值与磁偶极子的方向有关,  $k$  的值随着距离矢量与磁偶极子方向的夹角的变化而变化, 当其夹角一定时, 则  $k$  为常数, 例如在沿着磁偶极子的轴线方向时为 7.2, 在垂直于磁偶极子方向上时为 4.2.

文献 [9] 采用对正六面体中心点处的磁梯度张量不变量求梯度的方法对目标进行定位. 由空间中梯度的定义可得, 标量场的梯度是一个向量场, 标量场中某一点的梯度指向标量场增长最快的方向. 计算时分别利用三个坐标轴对应平面中心点处不变量的差分来近似表示正六面体中心点处不变量的梯度三分量, 为了计算的简便, 假设  $k$  值为常数, 表达式如下:

$$\begin{aligned} \nabla C_T &= \nabla \left( \frac{k\mu m}{4\pi r^4} \right) = -\frac{k\mu m}{\pi r^6} \mathbf{r} \\ &\approx \frac{C_{T,x+} - C_{T,x-}}{d} \hat{x} + \frac{C_{T,y+} - C_{T,y-}}{d} \hat{y} \\ &\quad + \frac{C_{T,z+} - C_{T,z-}}{d} \hat{z}, \end{aligned} \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{r}$  为目标到正六面体中心点的距离矢量,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  分别代表三个坐标轴的单位矢量,  $d$  为正六面体测量系统的基线长度.  $C_{T,x+}$  代表  $x$  坐标轴正方向对应平面中心点处的磁梯度张量不变量, 即其 Frobenius 范数. 由上式可得,  $\nabla C_T$  的方向沿着矢量  $\mathbf{r}$  反向指向目标, 而  $\nabla C_T$  可以通过对正六面体的六个平面中心点处不变量的差分得到. 令  $\mathbf{U}_0 = \frac{\nabla C_T}{|\nabla C_T|}$  代表不变量梯度方向上的单位矢量.

根据位置关系有下式:

$$\mathbf{r}_{z+} = \mathbf{r} + \frac{1}{2} d \hat{z}, \quad (8)$$

式中,  $r_{z+}$  代表目标指向正六面体  $z$  轴正向对应平面中心点的矢量. 对 (8) 式中的矢量求得

$$\begin{aligned} r_{z+} &= \sqrt{\left( r + \frac{1}{2} d \hat{z} \right)^2} \\ &= r \left[ 1 - \frac{d}{r} (U_0 \cdot \hat{z}) + \left( \frac{d}{2r} \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

由麦克劳林公式, (9) 式简化得  $r_{z+} \approx r - \frac{1}{2} d (U_0 \cdot \hat{z})$ . 依次可以求出  $r_{z-} \approx r + \frac{1}{2} d (U_0 \cdot \hat{z})$ , 则根据不变量与距离矢量模的关系, 有下式:

$$\frac{C_{T,z+}}{C_{T,z-}} = \left( \frac{r_{z-}}{r_{z+}} \right)^4 = \left( \frac{r + \frac{1}{2} d (U_0 \cdot \hat{z})}{r - \frac{1}{2} d (U_0 \cdot \hat{z})} \right)^4. \quad (10)$$

解上述方程, 求得

$$\begin{aligned} r &= \left\{ \frac{1}{2} d (U_0 \cdot \hat{z}) + d (U_0 \cdot \hat{z}) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \left( \frac{C_{T,z+}}{C_{T,z-}} \right)^{1/4} - 1 \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

通过上式可以求出磁性目标离测量系统的距离矢量的模, 则  $r \cdot \mathbf{U}_0$  即为在正六面体磁梯度张量测量系统坐标系下磁性目标的距离矢量.

### 3 椭圆误差消除方法

#### 3.1 原始方法的椭圆误差分析

目前广泛采用的基于磁梯度张量不变量的定位方法, 是 Wiegert 等 [6,10,11] 提出的方法, 本文称此方法为原始方法, 该方法的主要问题是存在着椭圆误差. 分析椭圆误差产生的原因, 可发现原始方法中定义的不变量为磁梯度张量的 Frobenius 范数, 即  $C_T = \left[ \sum (G_{ij}^2) \right]^{0.5} = \frac{k\mu m}{4\pi r^4}$ , 则存在椭圆系数  $k$ , 椭圆系数  $k$  是一个与磁偶极子方向有关的量, 其值随着距离矢量与磁偶极子方向的夹角的变化而变化, 因此在对磁梯度张量不变量求梯度进行定

位时导致椭圆误差的出现, 考虑到 $k$ 的变化, 对正六面体中心点处的不变量求梯度得

$$\begin{aligned} \nabla C_T &= \nabla \frac{k\mu m}{4\pi r^4} \\ &= \frac{k\mu m}{4\pi} \nabla \frac{1}{r^4} + \frac{\mu m}{4\pi r^4} \nabla k \\ &= -\frac{k\mu m}{\pi r^6} \mathbf{r} + \frac{\mu m}{4\pi r^4} \nabla k. \end{aligned} \quad (12)$$

由(12)式可得, 由于 $\nabla k$ 的存在, 目标的距离矢量 $\mathbf{r}$ 的方向与 $\nabla C_T$ 的方向不一致, 而原始定位方法中利用 $\nabla C_T$ 的方向来代替测量系统中心指向目标的方向, 忽略了 $\nabla k$ 的矢量方向, 因此就会产生方位误差; 另一方面, 在(10)式中, 为了简便, 原始方法假设正六面体 $z$ 轴对应两个平面中心点处的椭圆系数相等, 而在大多数情况下, 该椭圆系数不相等, 因此通过(11)式计算得到的距离矢量的模存在误差. 通过以上分析可知, 由于椭圆系数的存在, 导致了由原始方法计算得到的目标距离矢量的方向上及目标距离矢量的模都存在误差, 原始方法计算得到的正六面体磁梯度张量测量系统坐标系下磁性目标的距离矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{原始}} &= r \cdot \mathbf{U}_0 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} d \left( \frac{\nabla C_T}{|\nabla C_T|} \cdot \hat{z} \right) + d \left( \frac{\nabla C_T}{|\nabla C_T|} \cdot \hat{z} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \left( \frac{C_{T,z+}}{C_{T,z-}} \right)^{1/4} - 1 \right]^{-1} \right\} \cdot \frac{\nabla C_T}{|\nabla C_T|}. \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.2 椭圆误差消除方法

本文在前人研究的基础上, 对原定位方法进行改进, 构造了一个新的不变量 $C = \frac{C_T}{k} = \frac{k\mu m}{4\pi r^4}$ , 该不变量不包含椭圆系数 $k$ , 因此与磁偶极子方向无关, 对该不变量求梯度可得

$$\begin{aligned} \nabla C &= \nabla \frac{C}{k} = \nabla \frac{k\mu m}{4\pi r^4} \\ &= \frac{\mu m}{4\pi} \nabla \frac{1}{r^4} = -\frac{\mu m}{\pi r^6} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (14)$$

由上式可得, 由于该不变量不存在椭圆系数 $k$ , 因此目标的距离矢量 $\mathbf{r}$ 与不变量的梯度方向 $\nabla C$ 一致, 可以完全消除椭圆误差. 该不变量 $C$ 与原始方法中的不变量 $C_T$ 的等值线图如图2所示.

由等值线图可得,  $C$ 的等值线为一系列以磁偶极子为圆心的同心圆, 因此对 $C$ 求梯度得到的矢量指向位于圆心的磁偶极子. 而 $C_T$ 的等值线为一系列以磁偶极子为中心的椭圆, 对 $C_T$ 求梯度时得到的矢量会偏离中心, 因此定位时会产生椭圆误差.

下面讨论根据正六面体磁梯度张量的测量值, 如何求取新不变量 $C = \frac{\mu m}{4\pi r^4}$ , 为此, 建立目标磁矩与距离矢量所在的坐标系如图3所示.

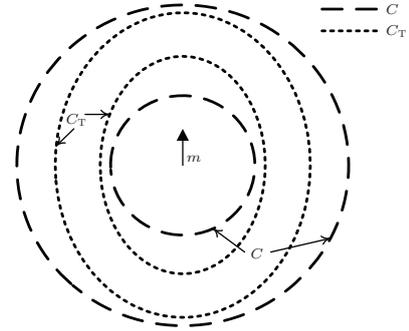


图2 不变量等值线示意图

Fig. 2. Schematic diagram of invariant contour.

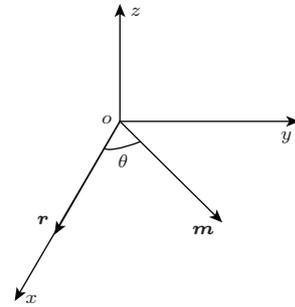


图3 空间直角坐标系

Fig. 3. the Cartesian coordinate system.

设目标的磁矩位于 $xoy$ 平面内 $\mathbf{m} = (m \cos \theta, m \sin \theta, 0)$ , 目标的距离矢量 $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$ . 根据(3)式依次求得磁梯度张量的各个分量的值如下:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\frac{3\mu m}{2\pi r^4} \cos \theta & \frac{3\mu m}{4\pi r^4} \sin \theta & 0 \\ \frac{3\mu m}{4\pi r^4} \sin \theta & \frac{3\mu m}{4\pi r^4} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\mu m}{4\pi r^4} \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

则根据上式求取原始算法的不变量得

$$\begin{aligned} C_T &= \left[ \sum (G_{ij}^2) \right]^{0.5} = \frac{k\mu m}{4\pi r^4} \\ &= 3C \sqrt{4 \cos^2 \theta + 2}. \end{aligned} \quad (16)$$

通过比较由(16)式可看出椭圆系数 $k = \frac{\mu m}{3\sqrt{4 \cos^2 \theta + 2}}$ . 根据不变量 $C = \frac{\mu m}{4\pi r^4}$ , (15)式

改写为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -6C \cos \theta & 3C \sin \theta & 0 \\ 3C \sin \theta & 3C \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 3C \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (17)$$

求得(17)式中磁梯度张量的三个特征值按大小依次排列如下:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{3}{2}C(-\cos \theta + \sqrt{4 + 5 \cos^2 \theta}), \\ \lambda_2 &= 3C \cos \theta, \\ \lambda_3 &= \frac{3}{2}C(-\cos \theta - \sqrt{4 + 5 \cos^2 \theta}). \end{aligned} \quad (18)$$

则通过计算可以得出

$$\begin{aligned} C &= \frac{\mu m}{4\pi r^4} \\ &= \frac{\sqrt{\sum (G_{ij})^2 \times \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 - 2\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_3^2}}}{3\sqrt{2\lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_3}}. \end{aligned} \quad (19)$$

由上式可得不变量与磁梯度张量及其特征值的关系, 因此可以通过(19)式来直接求得该不变量.

对正六面体中心点处的新不变量求梯度时, 则(7)式变为

$$\begin{aligned} \nabla C &= \nabla \left( \frac{\mu m}{4\pi r^4} \right) = -\frac{\mu m}{\pi r^6} \mathbf{r} \\ &\approx \frac{C_{x+} - C_{x-}}{d} \hat{x} + \frac{C_{y+} - C_{y-}}{d} \hat{y} \\ &\quad + \frac{C_{z+} - C_{z-}}{d} \hat{z}, \end{aligned} \quad (20)$$

式中,  $C_{x+}$  代表  $x$  轴正方向对应平面的新磁梯度张量不变量, 可由(19)式求得. 求得新不变量梯度方向上的单位矢量  $U_0 = \frac{\nabla C}{|\nabla C|}$ .

根据(11)式, 求得距离矢量的模的表达式如下:

$$\begin{aligned} r &= \left\{ \frac{1}{2}d(U_0 \cdot \hat{z}) + d(U_0 \cdot \hat{z}) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \left( \frac{C_{z+}}{C_{z-}} \right)^{1/4} - 1 \right]^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

则改进方法计算得到的正六面体磁梯度张量测量系统坐标系下磁性目标的距离矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{改进}} &= \mathbf{r} \cdot U_0 \\ &= \left\{ \frac{1}{2}d \left( \frac{\nabla C}{|\nabla C|} \cdot \hat{z} \right) + d \left( \frac{\nabla C}{|\nabla C|} \cdot \hat{z} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \left( \frac{C_{z+}}{C_{z-}} \right)^{1/4} - 1 \right]^{-1} \right\} \cdot \frac{\nabla C}{|\nabla C|}. \end{aligned} \quad (22)$$

## 4 仿真实验分析

(22)式与(13)式形式复杂, 在数学上不好比较, 所以通过仿真实验来分析. 根据本文提出的磁梯度张量不变量的改进定位方法, 利用正六面体磁梯度张量测量系统, 对磁性目标的探测定位进行仿真实验. 分析影响磁性目标定位的误差因素可能有: 1) 测量系统的方位误差; 2) 磁力仪的测量精度; 3) 测量系统基线  $d$  的大小.

仿真时原始方法计算的目标距离矢量通过(13)式求得, 改进方法计算的目标距离矢量通过(22)式求得. 仿真时误差为  $E = |r_{\text{真实}} - r_{\text{计算}}|$ , 同时定位的相对误差为  $\varepsilon = \frac{|r_{\text{真实}} - r_{\text{计算}}|}{|r_{\text{真实}}|}$ , 其中  $r_{\text{真实}}$  为目标位置的真实值,  $r_{\text{计算}}$  为目标位置的计算值. 则原始方法的定位误差  $E_{\text{原始}} = |r_{\text{真实}} - r_{\text{原始}}|$ , 定位的相对误差  $\varepsilon_{\text{原始}} = \frac{|r_{\text{真实}} - r_{\text{原始}}|}{|r_{\text{真实}}|}$ ; 改进方法的定位误差  $E_{\text{改进}} = |r_{\text{真实}} - r_{\text{改进}}|$ , 定位的相对误差  $\varepsilon_{\text{改进}} = \frac{|r_{\text{真实}} - r_{\text{改进}}|}{|r_{\text{真实}}|}$ .

仿真实验采用的初始参数设定为: 采用图1所示的正六面体磁梯度张量系统的坐标系, 坐标原点位于正六面体测量系统的中心, 磁性目标的磁矩取为(400000, 5000000, 200000) Am<sup>2</sup>, 系统的基线距离取为1 m, 磁力仪的精度取为0.01 nT.

### 1) 测量系统的方位误差.

为了分析磁偶极子方向与目标的距离矢量成不同的角度时, 原始方法与改进方法对磁性目标的定位误差, 仿真分析当磁性目标位于  $z = 50$  m 平面, 以点(0, 0, 50)为圆心, 半径为60 m的圆周上时, 磁性目标的定位误差与水平旋转角度的关系, 仿真时目标的运动轨迹以及目标与测量系统的相对位置示意图如图4所示,

图中  $\mathbf{m}$  为磁性目标的磁矩, 黑色箭头代表磁矩的方向. 水平旋转角度定义为圆心到磁性目标的连线与  $x$  轴正方向所成的角度的大小, 逆时针为正. 仿真实验结果如图5所示.

由仿真结果可得, 在与  $x$  轴成  $92.7^\circ$  和  $276.3^\circ$  的时候原始定位方法误差最小, 但其他的角度时, 定位误差迅速增大, 而改进定位方法并不存在方位误差, 误差始终保持在1 m以内. 定位的平均相对误差为  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i$ , 式中  $\varepsilon_i$  代表磁性目标运动到第  $i$  个位置点处对应的定位相对误差,  $N$  代表总的测量点数. 则由仿真结果计算可得, 原始算法的定

位平均相对误差为 11.3%，改进算法的定位平均相对误差为 0.4%，定位平均相对误差减少 10.9%。为了分析原始定位方法与改进方法对沿着某一特定角度向外运动的磁性目标的定位误差大小，分别选取  $50^\circ$  和  $92.7^\circ$  角这两个有代表性的角度进行分析。

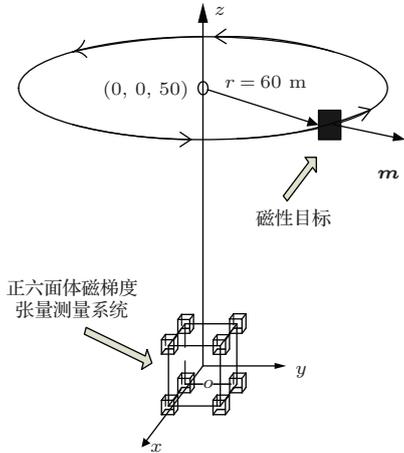


图 4 磁性目标运动轨迹示意图

Fig. 4. Trajectory diagram of the magnetic target.

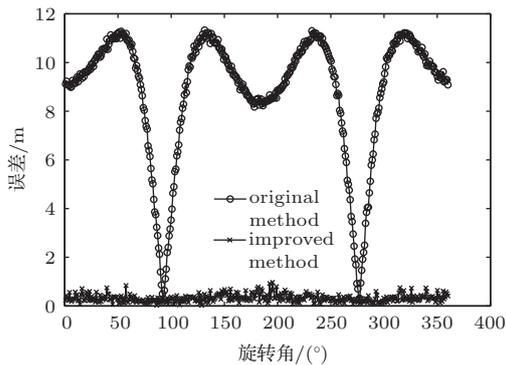


图 5 磁性目标的定位误差与水平旋转角度关系图

Fig. 5. The relationship between the location error and the horizontal rotation angle.

首先分析当磁性目标位于  $z = 50$  m 平面，目标沿着与  $x$  轴正方向成  $50^\circ$  角的方向向外运动，定位误差与距离的关系，仿真实验结果如图 6 所示。

由仿真结果可以看出，随着距离的增加原始方法的定位误差迅速增大，而改进方法的定位误差随着距离的增加缓慢增长，定位误差明显小于原始方法。进一步分析当磁性目标位于  $z = 50$  m 平面，目标沿着与  $x$  轴正方向成  $92.7^\circ$  角的方向向外运动，仿真实验结果如图 7 所示。

由仿真结果可得，当目标沿着与  $x$  轴正方向成  $92.7^\circ$  角的方向向外运动时，原始定位方法的定位误差较成  $50^\circ$  角的方向向外运动的误差明显减小，但大于改进方法的定位误差。

2) 磁力仪的测量精度与定位误差的关系。

仿真分析磁性目标位于  $z = 50$  m 的平面内，沿着与  $x$  轴成  $92.3^\circ$  的方向向外运动时，在不同的磁力仪精度下，改进定位方法对磁性目标的定位误差，磁力仪的精度分别取为 0.1 nT, 0.01 nT, 0.001 nT。仿真实验结果如图 8 所示。

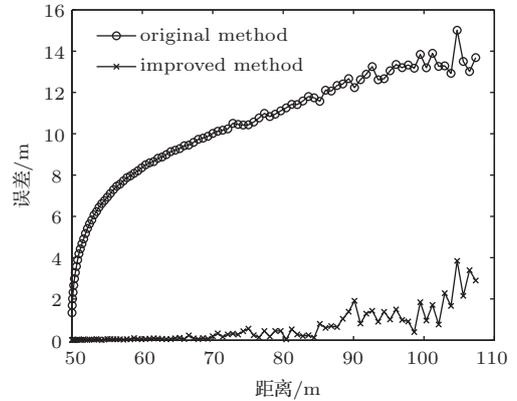


图 6 目标沿着特定方向运动时定位误差与距离的关系图  
Fig. 6. The relationship between the location error and the distance along a particular angle.

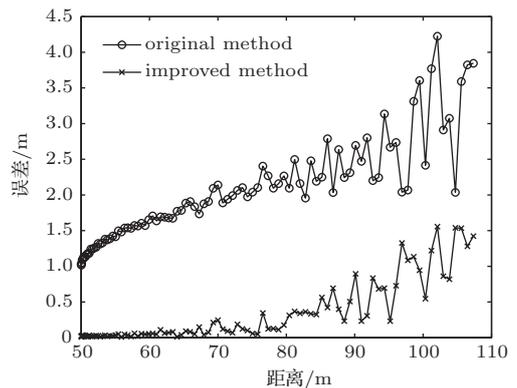


图 7 目标沿着特定方向运动时定位误差与距离的关系图  
Fig. 7. The relationship between the location error and the distance along a particular angle.

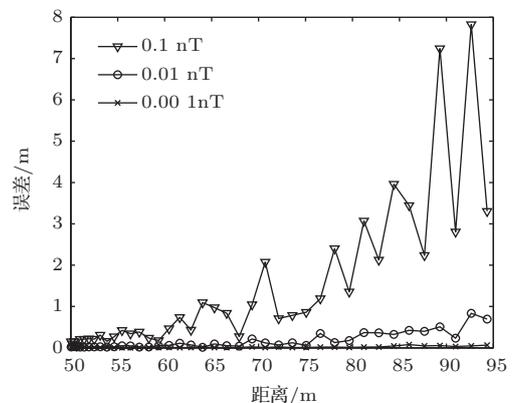


图 8 磁力仪的精度与定位误差关系图  
Fig. 8. The relationship between location error and magnetometer precision.

在近距离时,不同精度的磁力仪的定位误差差别不大,定位的误差较小,随着距离的增大,精度为0.1 nT的磁力仪就会出现较大的定位误差,在89.3 m时可以达到7.24 m,此时的定位相对误差为8.1%.而精度为0.001 nT的磁力仪的定位误差一直较小,对距离94 m处的磁性目标定位误差为0.06 m.

### 3) 测量系统基线 $d$ 的大小与定位误差的关系.

仿真分析磁性目标位于  $z = 50$  m 的平面内,沿着与  $x$  轴成  $92.3^\circ$  的方向向外运动时,正六面体磁梯度张量测量系统的基线分别取为0.3 m, 0.5 m, 1 m,改进定位算法对磁性目标的定位误差与距离的关系.仿真实验结果如图9所示.

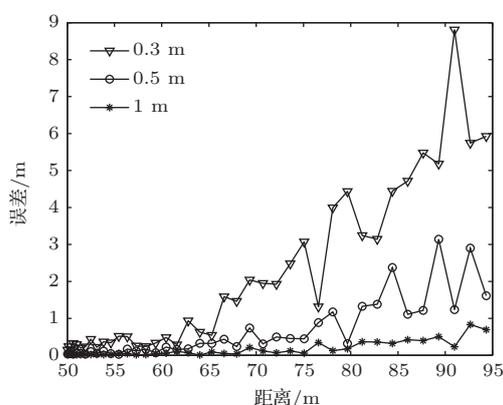


图9 系统基线与定位误差关系图

Fig. 9. The relationship between location error and baseline.

由仿真结果可得,基线距离越大,定位误差相对越小.当基线距离一定时,随着探测距离的增大,定位误差不断的增加.

## 5 结 论

由仿真实验分析可得,改进方法能实现对目标的单点实时定位,且改进方法不存在椭圆误差,定位误差明显小于原始方法的定位误差,因此非常适合于移动平台.改进方法的定位误差随着传感器的精度增加而减小,因此为了提高探测的精度,应当选择精度高的磁传感器;目标的定位误差随着系

统的基线的增加而减小,因此应增加传感器间的距离,但考虑到载体平台的大小,基线的距离不能无限增加,应当选择一个合适的基线距离.

本文提出的改进方法,能克服原定位算法的椭圆误差,且定位精度较原始方法有很大的提高,可以应用于移动平台对磁性目标的探测,具有很高的应用前景.缺点就是对磁力仪的精度以及基线的长度要求高,应进一步研究算法进行改进.

## 参考文献

- [1] Nara T, Suzuki S, Ando S 2006 *IEEE Transactions on Magnetics* **42** 3291
- [2] Yu Z T, Lü J W, Fan L H, Zhang B T 2014 *Systems Engineering and Electronics* **36** 1250 (in Chinese) [于振涛, 吕俊伟, 樊利恒, 张本涛 2014 系统工程与电子技术 **36** 1250]
- [3] Young J A, Clark D A 2010 *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications* Sydney, Australia, September 20–24, 2010 p701
- [4] Yu Z T, Lü J W, Bi B, Zhou J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 110702 (in Chinese) [于振涛, 吕俊伟, 毕波, 周静 2014 物理学报 **63** 110702]
- [5] Wang L Q, Wang W M 2014 *Chin. Phys. B* **23** 028703
- [6] Wiegert R, Lee K H, Oeschger J 2008 *IEEE Oceans 2008 Conference Proceedings* Quebec City, Canada, September 15–18, 2008 p1
- [7] Huang K Z, Xue M Z, Lu M W 2003 *Tensor Analysis* (Beijing: Tsinghua University Press) p55 (in Chinese) [黄克智, 薛明德, 陆明万 2003 张量分析 (北京: 清华大学出版社) 第55页]
- [8] Wilson H 1985 *Canada Technical Memorandum* **8513**
- [9] Clark D A 2012 *22<sup>th</sup> International Geophysical Conference and Exhibition* Brisbane, Australia, February 26–29, 2012 p1
- [10] Wiegert R, Oeschger J 2006 *IEEE Oceans 2006 Conference Proceedings* Boston, Massachusetts, September 18–21, 2006 p1
- [11] Wiegert R 2009 *Proc. SPIE 7303* Florida, USA, May 04, 2009 p1
- [12] Chen J F, Zhang Q, Pan M C, Weng F B, Chen D X, Pang H F 2012 *Chin. J. Sens. Actuators* **25** 1088 (in Chinese) [陈谨飞, 张琦, 潘孟春, 翁飞兵, 陈棣湘, 庞鸿锋 2012 传感技术学报 **25** 1088]
- [13] Sui Y Y, Li G, Wang S L 2012 *IEEE Transactions on Magnetics* **48** 4701

# Research on the asphericity error elimination of the invariant of magnetic gradient tensor\*

Lü Jun-Wei<sup>1)</sup> Chi Cheng<sup>1)†</sup> Yu Zhen-Tao<sup>2)</sup> Bi Bo<sup>1)</sup> Song Qing-Shan<sup>3)</sup>

1) (Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China)

2) (Institute of Remote Sensing, Naval Submarine Academy, Qingdao 266001, China)

3) (Department of Armament, The 91213<sup>th</sup> Unit of PLA, Yantai 264001, China)

( Received 1 March 2015; revised manuscript received 25 May 2015 )

## Abstract

Real-time, point-by-point localization of magnetic targets such as ferrous unexploded ordnance can be achieved by the cube magnetic gradiometer system designed by the Naval Surface Warfare Center. The localization method uses the Frobenius norm of the magnetic gradient tensor to calculate the location of the magnetic target. This method assumes that the potential field of the Frobenius norm of the magnetic gradient tensor is a perfect sphere. But the Frobenius norm of the magnetic gradient tensor has an asphericity parameter, and its potential field is an ellipsoid, which can cause asphericity error. Since the current localization method can be affected seriously by the asphericity error, an improved method is proposed in this paper to eliminate the asphericity error. The improved method is based on a new invariant, which does not contain asphericity parameter. The new invariant can be obtained by the combination of the Frobenius norm and eigenvalues of the magnetic gradient tensor. In detail the procedure is as follows: first, the magnetic gradient tensor of the center point of the regular hexahedron's six planes can be measured by the cube magnetic gradiometer system, then these eigenvalues can be calculated and combined according to a certain relationship to eliminate the asphericity parameter, then the new invariants of the six planes can be obtained, and the spatial gradient of the new invariant can be calculated from the six new invariants, then the localization of the magnetic target can be calculated from the spatial gradient of the new invariant. This improved method can overcome the asphericity error effectively, and it can be used for real-time, point-by-point localization and detection of unexploded ordnance. Simulation experiments show that the localization error of the improved method is much smaller than that of the original method, the average relative error can be reduced by 10.9%. The improved method can be deployed on the highly maneuverable platform. The platform motion will not be constrained, and the improved method will be made more effectively in detection and localization of the magnetic targets. Thus the improved method can be widely applied in naval mines localization, mineral exploration, ferrous resources exploration, moving magnetic target tracking, and other fields.

**Keywords:** magnetic gradient tensor, invariant, asphericity error, localization

**PACS:** 07.55.Ge, 52.70.Ds

**DOI:** [10.7498/aps.64.190701](https://doi.org/10.7498/aps.64.190701)

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2010AAJ211).

† Corresponding author. E-mail: [cheng.chihhu@163.com](mailto:cheng.chihhu@163.com)