

声子晶体中的半狄拉克点研究

曹惠娴 梅军

Semi-Dirac points in two-dimensional phononic crystals

Cao Hui-Xian Mei Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 194301 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.194301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.194301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I19>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

稳态损耗因子的衰减法识别研究

[Estimation of steady loss factor with decay rate method](#)

物理学报.2015, 64(18): 184301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184301>

一种含横向圆柱形空腔的声学覆盖层的去耦机理分析

[Analysis of decoupling mechanism of an acoustic coating layer with horizontal cylindrical cavities](#)

物理学报.2015, 64(15): 154301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154301>

一维亥姆霍兹共振腔声子晶体中缺陷模式的实验研究

[Experiments on defect mode of one-dimensional phononic crystal containing Helmholtz resonators](#)

物理学报.2013, 62(9): 094304 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.094304>

晶格中心插入体的对称性及取向对二维声子晶体带隙的影响

[The two-dimensional phononic crystal band gaps tuned by the symmetry and orientation of the additional rods in the center of unit cell](#)

物理学报.2012, 61(23): 234302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.234302>

一种新型声学超材料平板对机械波吸收性能的模拟与实验研究

[Simulation and experimental study of a metamaterial panel for mechanical wave absorption](#)

物理学报.2012, 61(15): 154302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.154302>

声子晶体中的半狄拉克点研究*

曹惠娴 梅军†

(华南理工大学物理与光电学院, 广州 510641)

(2015年4月19日收到; 2015年5月13日收到修改稿)

在本文中, 构建了一种易于实现的二维声子晶体: 截面为正方形的铁柱以三角晶格形式排列在水中. 研究发现, 在此声子晶体的布里渊区中心 Γ 点有半狄拉克点出现: 其带结构沿 ΓY 方向是线性的, 但沿着 ΓX 方向却是二次型的. 若散射体绕中心轴旋转角度 $\theta = 45^\circ$, 则半狄拉克点的二次型带结构则会转至 ΓY 方向, 与 ΓX 相互垂直. 接着, 本文采用 $k \cdot p$ 微扰法系统研究了在不同旋转角 θ 值下, 简并点附近的带结构特点, 并在此基础上分析了半狄拉克点的出现原因. 在半狄拉克点附近, 以布洛赫简并态为基矢, 文中构造了一个有效哈密顿量, 根据它能准确计算贝利相位, 并发现其值为零. 此外, 通过有限元仿真, 还研究了在半狄拉克点频率附近声波沿着不同方向穿过该声子晶体的透射现象. 本文可以为经典体系中半狄拉克点色散关系的起源、有关传播性质的研究以及其在声子晶体的应用提供理论参考.

关键词: 半狄拉克点, 声子晶体, 有效哈密顿量, 贝利相位

PACS: 43.40.+s, 43.20.+g, 46.40.-f, 62.30.+d

DOI: 10.7498/aps.64.194301

1 引言

近年来, 随着石墨烯和拓扑绝缘体的发现, 人们广泛关注并研究了狄拉克点色散关系, 无论是在量子体系^[1–9]还是经典体系^[10–22]中, 都得到了丰富的结果并发现了许多有趣的现象, 比如边缘态, 零折射现象, 赝散射现象等^[10–21]. 这些研究的对象多是各向同性狄拉克点色散关系, 即简并点附近 $E-k$ 色散关系呈线性, 同时线性项系数为常量, 其值不随波矢方向的变化而改变.

随着研究的深入, 人们又陆续发现了各向异性狄拉克点^[22–28], 半狄拉克点^[29–31]等特殊的色散关系. 各向异性狄拉克点色散关系的特点是, 尽管简并点附近的带的斜率随着波矢方向改变而改变, 但始终存在线性色散关系. 半狄拉克点色散关系的特点是, 简并点附近带结构在一个方向上是线性的, 而在与线性方向垂直的另一个方向上的带却呈二次型. 这些特点进一步丰富了拥有狄拉克点色散

关系的体系在实际应用中的潜力, 从而引起了人们的广泛关注. 文献^[18]中, 在一种光子晶体的带结构中发现了半狄拉克锥体, 且简并点附近会出现电磁拓扑相变, 从而在简并频率附近出现电磁波输运性质的显著变化. 文献^[29]发现在一种 $\text{VO}_2\text{-TiO}_2$ 纳米结构中, 在布里渊区的四个角上出现了半狄拉克点; 当引入外磁场后, 在同样的位置则会出现各向异性狄拉克点. 文献^[31]用螺旋铁氧化物在3D拓扑绝缘体表面形成螺旋磁场, 得到的表面能谱上同时出现两个狄拉克锥体, 以及多个半狄拉克锥体.

目前, 有关声子晶体(phononic crystals, PCs)的研究内容颇多, 如局域共振效应、低频带隙、低频滤波、缺陷态等^[32,33]. 但是, 关于声子晶体系统中的半狄拉克点的研究近年来才刚刚起步, 研究结果尚少^[34]. 本文中, 我们设计了一种易于实现的声子晶体, 在布里渊区中心有半狄拉克点的带结构: 其带结构沿 ΓY 方向是线性的, 但沿着 ΓX 方向却是二次型的. 若散射体绕中心轴旋转角度 $\theta = 45^\circ$, 并

* 国家自然科学基金面上项目(批准号: 11274120)和华南理工大学中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 2014ZG0032)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: phjunmei@scut.edu.cn

微调散射体边长, 则半狄拉克点的二次型带结构会转至 ΓY 方向, 与原来的 ΓX 相互垂直. 这是由于散射体的截面为正方形而不是圆形, 当散射体绕中心轴旋转时, 晶体对称性的变化会引起系统带结构的改变. 为了进一步研究所得的半狄拉克点色散关系的性质, 我们用 $k \cdot p$ 微扰法研究并确认了在不同旋转角 θ 值下, 简并点附近的带结构特点, 在此基础上分析了出现半狄拉克点的原因. $k \cdot p$ 微扰法的中心思想是, 选择特定布里渊区点 (比如 $\mathbf{k}_0$ 点) 上的本征态作为基矢, 并以此为基础来研究该点 ($\mathbf{k}_0$) 附近带结构中的本征态. 用 $k \cdot p$ 微扰法来计算带结构斜率, 无论是在量子体系还是经典体系中都已经相当成熟 [17,18,35]. 利用 $k \cdot p$ 方法, 我们能在半狄拉克点附近构造有效哈密顿量, 据此可准确计算相应的贝利相位 [36], 发现其值为零. 此外, 通过有限元仿真, 我们还研究了声波沿着不同方向穿过这些半狄拉克点体系的透射现象. 本文中的研究有助于拓展半狄拉克点色散关系在经典系统中的研究, 并且丰富了声子晶体的可能应用.

2 所研究的体系及其色散关系

2.1 一种二维声子晶体及其色散关系

我们将截面为正方形的铁柱子以三角晶格形式排列在水中, 形成了一个二维声子晶体. 散射体截面正方形的边长 $d = 0.68435a$, 其中 a 为晶格常数. 正方形的两边分别平行于 x 轴和 y 轴, 此时的旋转角 $\theta = 0^\circ$. 声波在铁、水中的纵向速度分别为 $c_2 = 6010$ m/s, $c_1 = 1490$ m/s. 计算所用的铁、水的密度分别为 $\rho_2 = 7670$ kg/m³, $\rho_1 = 1000$ kg/m³. 由于水和铁中的纵向速度相差很大, 所以这时铁柱子中的横波模式不重要, 可以忽略. 这就简化了我们的计算 [37].

图 1 (a) 显示了用 COMSOL Multiphysics 计算得到的该声子晶体的带结构图. COMSOL Multiphysics 是国际上广泛采用的一种基于有限元法的数值模拟仿真软件. 在布里渊区中心 Γ 点处, 我们

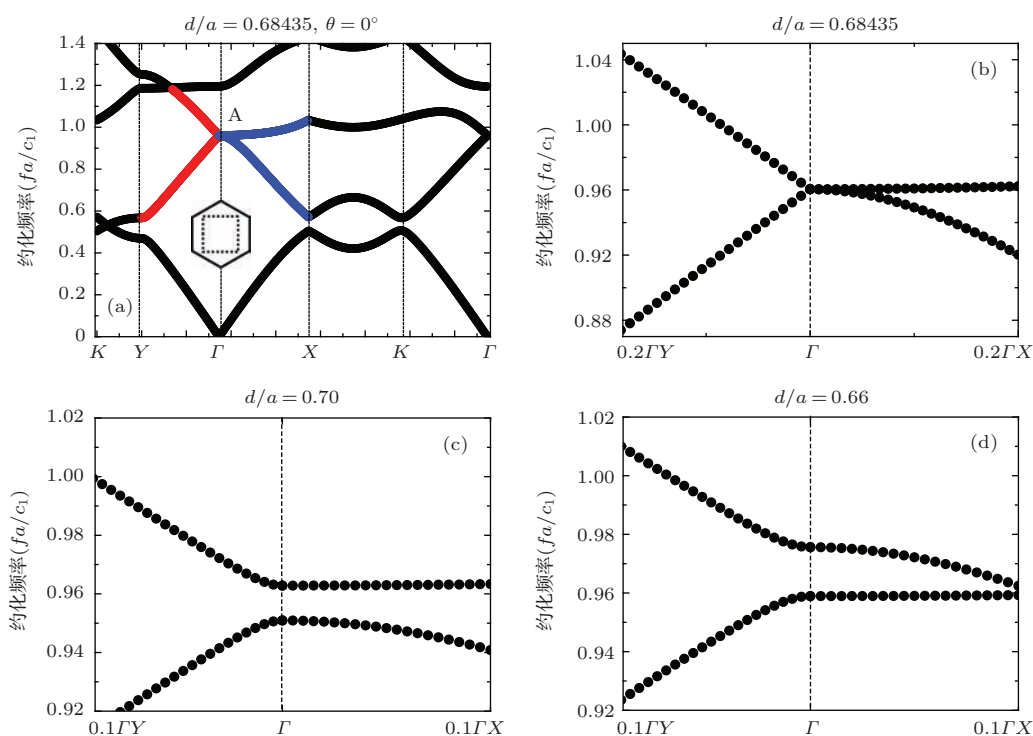


图 1 (网刊彩色) 将截面为正方形的铁柱子以三角晶格形式排列在水中所形成的二维声子晶体的带结构 (其中 d 是散射体截面正方形的边长, a 是晶格常数) (a) 显示了当 $d = 0.68435a$ 时的带结构 (内置小图中, 黑色虚线代表截面形状为正方形的散射体, 黑色实线是正六边形的声子晶体原胞); (b) 显示了 A 点附近放大的带结构; (c) 和 (d) 显示了散射体边长 d 分别为 $0.70a$ 和 $0.66a$ 时, Γ 点附近的带结构

Fig. 1. (color online) Band structures of the two-dimensional (2D) PCs composed of a triangle array of square iron cylinders embedded in water: (a) band structure for $d = 0.68435a$ where d is the side length of the iron cylinder, and a is the lattice constant, and inset shows the unit cell of the PC; (b) enlarged view of (a) around Point A; (c) and (d) show the band structures for different side lengths, with $d = 0.70a$ in (c) and $d = 0.66a$ in (d), respectively.

发现第二、三条带发生简并, 现将简并点标记为 A, 对应的约化频率 $\tilde{f}_A = f_A a/c_1 = 0.9604$, f_A 为 A 点的频率, 其他的态与 A 点的两个简并态相距较远. 发生简并的 ΓY 方向的带用红色标记, ΓX 方向的带用蓝色标记. 需要注意的是, A 点的简并是我们通过调节正方形散射体的边长, 有意地使两个布洛赫态 φ_1 和 φ_2 的频率在 Γ 点发生重合而得到的, 属于偶然简并^[38]. 图 1(b) 是 A 点附近放大的带结构图, 沿着 ΓY 方向则是线性的, 沿着 ΓX 方向的带结构呈二次型. 图 1(c) 和 (d) 分别显示了当散射体边长稍微增加到 $d = 0.70a$, 以及减小到 $d = 0.66a$ 后, Γ 点附近第二、三条带的变化情况. 显然, 图 1(c) 和 (d) 两图中, 在 Γ 点原来的简并被打破, 这两条带分开了. 因此, 图 1(a) 中 A 点的简并是偶然简并.

为了更清楚地分析简并点 A 点附近带结构, 图 2(a) 和 (b) 给出了从不同角度下观察 A 点附近两条带结构的三维视图. 图中约化频率 $\tilde{f} = fa/c_1$

范围为 0.5 到 1.2. 在约化频率 $\tilde{f}_A = f_A a/c_1 = 0.9604$ 处, 上下两条带结构在布里渊区中心 Γ 点发生简并, 也就是图 1 中的 A 点. 图 2(a) 和 (b) 中显示了发生简并的两条带结构的走势. 在简并点 A 下方的那条带沿着 ΓX 方向呈二次型, 沿着 ΓY 方向是线性的, 于是形成半狄拉克锥体. 在 A 点上方那条带沿着 ΓX 方向较平整, 但不是平带, 在其他方向都往上翘起. 图 2(c) 和 (d) 分别是图 2(a) 中下、上两条带结构的等频线. 约化波矢 kx 和 ky 的范围均为 $\left[-\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\right]$. 显然, 简并点 A 点附近的等频线都是闭合的.

值得一提的是, 只有当散射体中的波速小过基体中的波速时, 我们才有可能为相应的声子晶体/光子晶体系统建立起有效介质理论^[34,39]. 本文所研究的二维声子晶体, 散射体材料是铁, 基体材料是水. 因为铁的纵波速度大于水的纵波速度, 即使在布里渊区中心 Γ 点附近, 我们都无法用有效参数来描述这一体系.

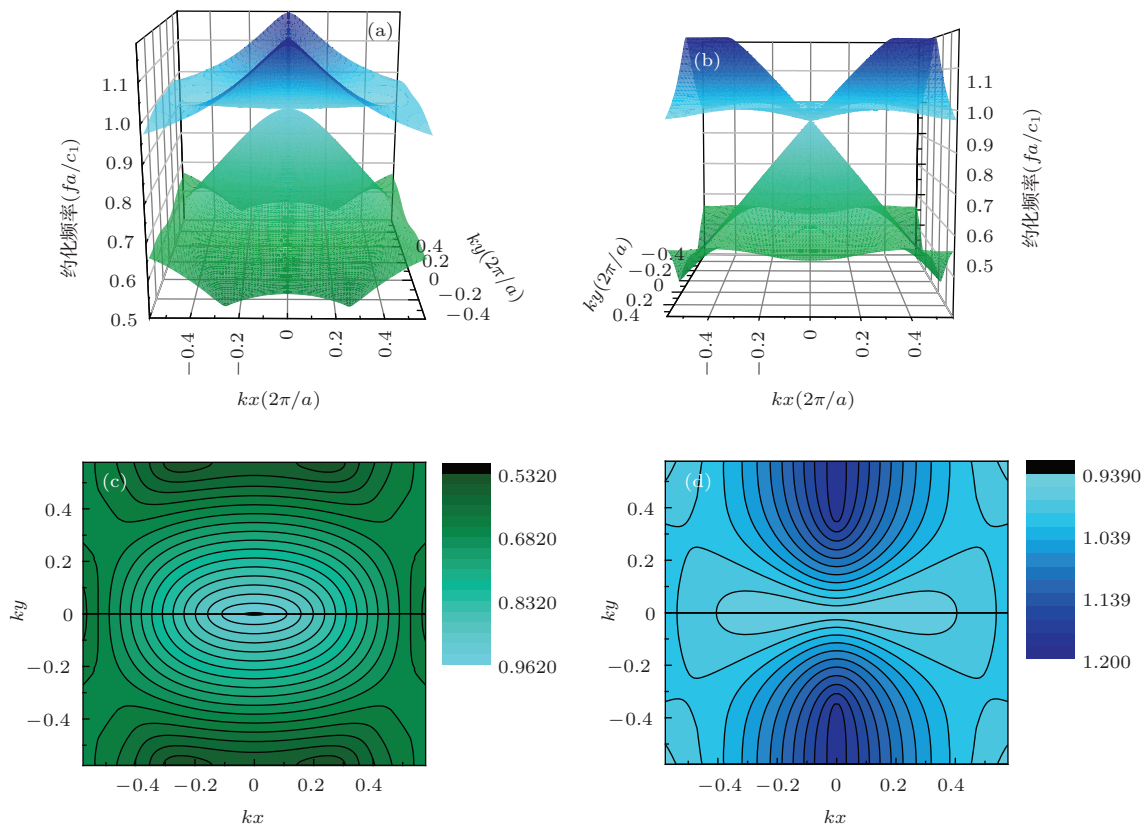


图 2 (网刊彩色) 简并点 A 点附近的三维带结构图及等频线图 (a) 和 (b) 显示了从不同角度观察简并点 A 附近两条带的三维视图; (c) 和 (d) 分别显示了 A 点下方带、A 点上方带的等频线图

Fig. 2. (color online) The three-dimensional version of band structures and iso-frequency surfaces around Point A: (a) and (d) show the three-dimensional version of band structures of the PC; (c) and (d) shows the iso-frequency surfaces of the lower and higher branches, respectively.

2.2 散射体绕中心轴旋转角 $\theta = 45^\circ$ 后体系的色散关系

若散射体绕中心轴旋转角度 $\theta = 45^\circ$, 但三角晶格结构保持不变, 原本在布里渊区中心 Γ 点发生简并的两个本征态几乎仍然是简并的, 它们彼此的频率仅相差 0.36%. 为了能够在 Γ 点得到频率完全重合的严格意义上的简并点, 只需要稍稍调整散射体的边长至 $b = 0.6803a$ 就可以了. 新的声子晶体的带结构如图 3(a) 所示, 我们把此时

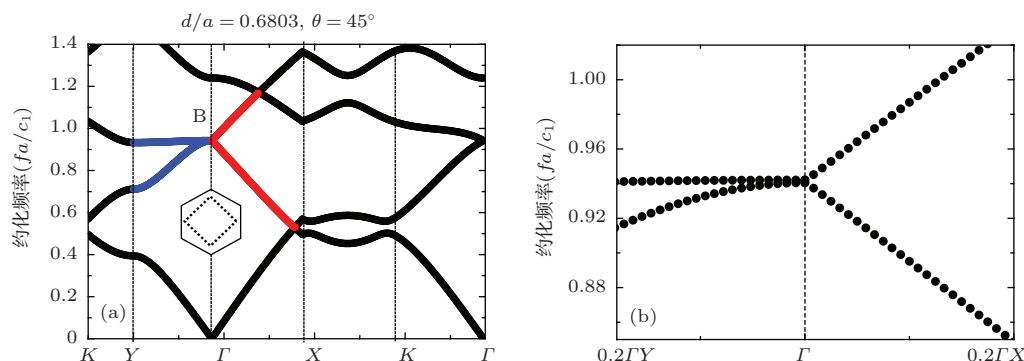


图 3 (网刊彩色) 在原声子晶体中散射体绕中心轴旋转 $\theta = 45^\circ$, 并微调散射体边长为 $b = 0.6803a$ 后系统的带结构 (a) 显示了当 $\theta = 45^\circ$ 并且 $b = 0.6803a$ 时的带结构, 内置小图中, 黑色虚线代表截面形状为正方形的散射体, 黑色实线是正六边形的声子晶体原胞; (b) 显示了 B 点附近放大的带结构

Fig. 3. (color online) Band structures of the 2D PCs with $\theta = 45^\circ$ and $b = 0.6803a$: (a) band structure for $\theta = 45^\circ$ and $b = 0.6803a$ (inset shows the unit cell of the PC); (b) enlarged view of (a) around Point B.

图 4(a), (b) 分别是不同视角下简并点 B 点附近的带结构的三维图, 其约化频率 $\tilde{f}$ 范围为 0.5 到 1.15. 约化波矢 k_x 和 k_y 的范围均为 $\left[-\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}\right]$. 在约化频率 $\tilde{f}_B = f_B a / c_1 = 0.9423$ 处, 上下两条带结构在布里渊区中心点 Γ 点发生简并, 也就是图 3 中简并点 B 点. 图 4(a), (b) 中显示了发生简并的 B 点附近的带结构的走势: 在 B 点下方的那条带沿着 ΓY 方向呈二次型, 而沿着 ΓX 方向是线性的, 于是形成半狄拉克锥体; 在 B 点上方的那条带沿着方向较平整, 但不是平带, 在其他方向都往上翘起. 图 4(c) 和 (d) 分别是图 4(a) 中下、上两条带结构的等频线. 与前面讨论的 A 点有所不同的是: A 点上方的那条带的等频线呈闭合的椭圆形, 但 B 点上方那条带的等频线却是开放的双曲线.

在本节中, 通过有意设计的二维声子晶体, 我们发现在其布里渊区中心 Γ 点有半狄拉克点的出现: 其带结构沿 ΓY 方向是线性的, 但沿着 ΓX 方向却是二次型的. 有趣的是, 若散射体绕中心轴旋转角度 θ 为 45° 的偶数倍, 则半狄拉克点的二次型

的二重简并点标记为 B 点, 其对应的约化频率为 $\tilde{f}_B = f_B a / c_1 = 0.9423$, f_B 为 B 点的频率. 我们发现尽管 $\tilde{f}_A \neq \tilde{f}_B$, 但简并点频率仅有非常微小的变化, 相对变化率仅为 1.88%. 在 B 点发生简并的带结构中, ΓY 方向带结构用蓝色标记, ΓX 方向带结构用红色标记. 有趣的是, B 点仍然是半狄拉克点: 在 B 点下方的那条带结构沿着 ΓY 方向是二次型, 沿着 ΓX 方向均为线性的. B 点也是由两个布洛赫态发生偶然简并得到的: 即通过调节散射体边长, 能够使得这两个布洛赫态的频率重合.

带结构沿着 ΓX 方向; 若 θ 等于 45° 的奇数倍, 并微调散射体边长, 则半狄拉克点的二次型带结构沿着 ΓY 方向, 与 ΓX 方向相互垂直. 在下节中, 我们将采用其他方法从另一个角度来研究这种半狄拉克色散关系.

3 $k \cdot p$ 微扰法和半狄拉克点色散关系

3.1 有效哈密顿量

根据 $k \cdot p$ 方法^[17,18,35], 我们从波动方程出发, 并利用布洛赫定理, 可以推出

$$\det \left| H + \frac{\omega_\beta^2 - \omega_{\mathbf{k}}^2}{c_1^2} \right| = 0, \quad (1)$$

H 就是体系的有效哈密顿量. 上式中 β 代表简并点 A 或者 B, ω_β 是简并点的角频率, $\omega_{\mathbf{k}}$ 是 (简并点 $\mathbf{k}_0$ 附近) $\mathbf{k}$ 点的角频率. 考虑到简并点 A, B 点以外的带距离简并点较远, 我们仅选用发生简并的两个本征态作为基矢, 那么所得到的有效哈密顿量是一个 2×2 矩阵. 系统有效哈密顿量的各个分量 H_{ij} 实际上是简并态之间的耦合积分, 其具体表达式

$$H_{lj} = (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{p}_{lj}, \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_{lj} = i \frac{(2\pi)^2}{\Omega} \int_{\text{unitcell}} \varphi_{l\mathbf{k}_0}^*(\mathbf{r}) \cdot \left[\frac{2\nabla \varphi_{j\mathbf{k}_0}(\mathbf{r})}{\rho_r(\mathbf{r})} + \left(\nabla \frac{1}{\rho_r(\mathbf{r})} \right) \varphi_{j\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}) \right] d\mathbf{r}, \quad (3)$$

其中, $\varphi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r})$ 是发生简并的本征态, $\rho_r = \rho/\rho_1$ 为相对质量密度, Ω 为原胞的面积, l 和 j 为简并态序号, 其取值范围是 $l, j = 1, 2$. 我们可以利用 COMSOL Multiphysics 软件来获得 $\mathbf{p}_{lj}$ 的具体数值, 并将结果代入到有效哈密顿量中. 具体来说, 当 $\theta = 0^\circ$ 时, 也就是简并点 A 点附近, 系统有效哈密顿量为

$$H_A = \Delta \mathbf{k} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i8.4663 \frac{1}{a} \cdot \mathbf{e}_{\Gamma Y} \\ i8.4662 \frac{1}{a} \cdot \mathbf{e}_{\Gamma Y} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

而当 $\theta = 45^\circ$ 时, 也就是在简并点 B 点附近, 系统有效哈密顿量为

$$H_B = \Delta \mathbf{k} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i7.7146 \frac{1}{a} \cdot \mathbf{e}_{\Gamma X} \\ -i8.5968 \frac{1}{a} \cdot \mathbf{e}_{\Gamma X} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

这里略去了二阶及更高阶的项. 其中 $\hat{\mathbf{e}}_{\Gamma X}$, $\hat{\mathbf{e}}_{\Gamma Y}$ 分别为 ΓX , ΓY 方向上的单位向量. a 表示晶格常数, 为了简洁起见, 在以下的推导及计算中将晶格常数取为单位长度, 即 $a = 1$ m. 另外, $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = \Delta k \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}}$ 为 $\Delta \mathbf{k}$ 方向上的单位向量.

显然, 这些有效哈密顿量的主对角线元素均为零. 更有趣的是, 有效哈密顿量 H_A , H_B 的副对角线上的矩阵元分别只有 $\hat{\mathbf{e}}_{\Gamma Y}$ 方向、 $\hat{\mathbf{e}}_{\Gamma X}$ 方向的分量. 这说明在旋转角 $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$ 情况下, 简并点 A, B 点各自的两个简并态的相互作用分别只存在于 $\hat{\mathbf{e}}_{\Gamma Y}$ 方向、 $\hat{\mathbf{e}}_{\Gamma X}$ 方向, 从而在这两个方向上形成了线性色散关系, 而与之垂直的方向则形成了二次型带结构.

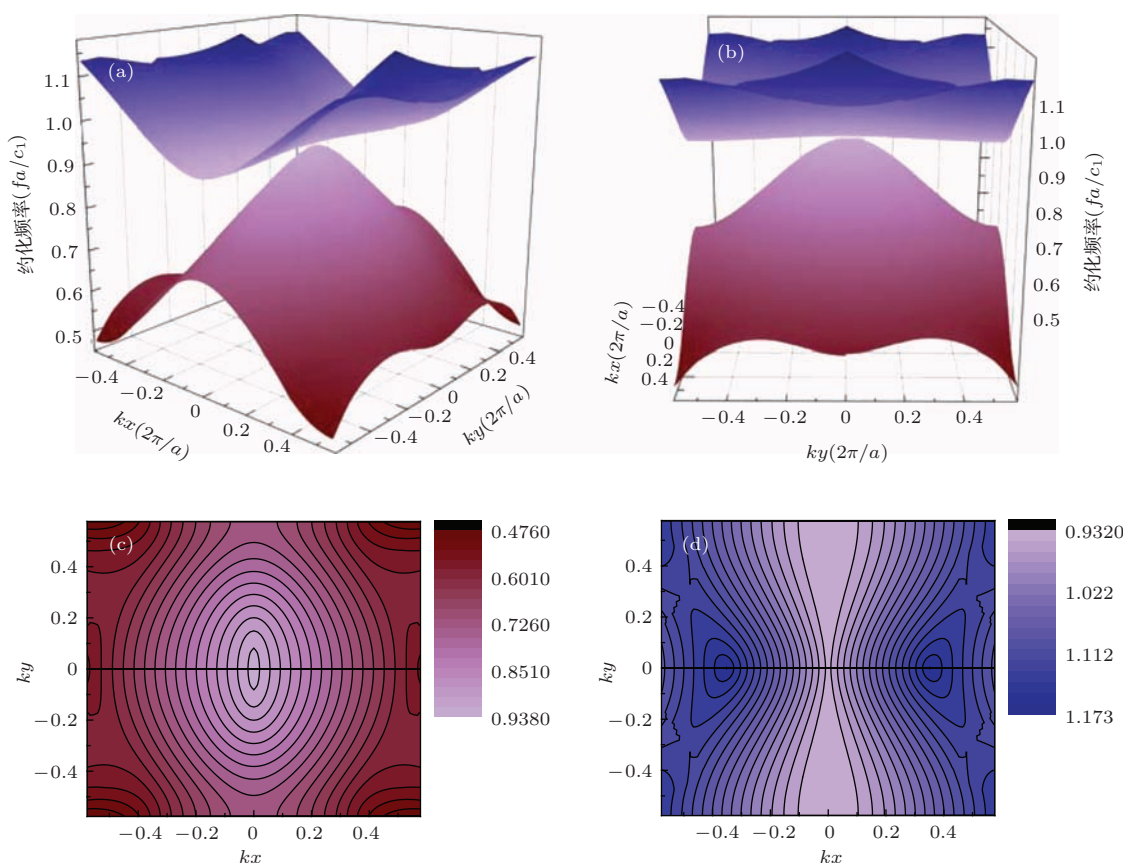


图4 (网刊彩色) 简并点 B 点附近的三维带结构图及等频线图 (a) 和 (b) 显示了从不同角度观察简并点 B 附近两条带的三维视图; (c) 和 (d) 分别显示了 B 点下方带、B 点上方带的等频线图

Fig. 4. (color online) The three-dimensional version of band structures and iso-frequency surfaces around Point B: (a) and (d) show the three-dimensional version of band structures of the PC; (c) and (d) shows the iso-frequency surfaces of the lower and higher branches, respectively.

3.2 简并点附近的半狄拉克点色散关系

将 p_{lj} 的数值解代入 (2) 式然后再代入 (1) 式中, 解本征值并作整理就可以得到:

$$\Delta \tilde{f}_\beta = \left(\pm \frac{c_1 \sqrt{p_{12} \cdot p_{21}}}{6\pi f_\beta} \right) \Delta \tilde{k} + O(\Delta \tilde{k}^2), \quad (6)$$

其中, 用到约化频率的定义,

$$\Delta \tilde{f}_\beta = \frac{a}{2\pi c_1} (\omega_{k_0} - \omega_\beta), \quad (7)$$

和约化波矢的关系,

$$\Delta \tilde{k} = \frac{3a}{4\pi} \Delta k. \quad (8)$$

请注意这里 $\Delta \tilde{f}_\beta$ 和 $\Delta \tilde{k}$ 均为无量纲的纯数字.

令

$$p_{12} = p_{12x} e_{\Gamma X} + p_{12y} e_{\Gamma Y}, \quad (9)$$

$$p_{21} = p_{21x} e_{\Gamma X} + p_{21y} e_{\Gamma Y}, \quad (10)$$

那么, 对应 H_A , 在简并点 A 点附近,

$$\Delta \tilde{f}_A = (\pm 0.4680 \sin \alpha) \Delta \tilde{k} + O(\Delta \tilde{k}^2), \quad (11)$$

式中 α 是 Δk 与 ΓX 方向的夹角. 所以, 当 $\alpha = 0^\circ$, 也就是 Δk 沿着 ΓX 方向时, $\Delta \tilde{k}$ 线性项系数等于

零, 也就是说, A 点附近带结构沿着 ΓX 方向呈二次型; 当 $\alpha = 90^\circ$, 也就是 Δk 沿着 ΓY 方向时, $\Delta \tilde{k}$ 线性项系数达到最大值. 当 Δk 绕着简并点旋转逐渐靠近 ΓX 方向时, $\Delta \tilde{k}$ 项系数逐渐减小.

对应 H_B , 在简并点 B 点附近,

$$\Delta \tilde{f}_B = (\pm 0.4585 \cos \alpha) \Delta \tilde{k} + O(\Delta \tilde{k}^2), \quad (12)$$

所以, 当 $\alpha = 90^\circ$, 也就是沿着 ΓY 方向时, $\Delta \tilde{k}$ 线性项系数等于零, 也就是说, B 点附近带结构沿着 ΓY 方向呈二次型; 当 $\alpha = 0^\circ$, 也就是 Δk 沿着 ΓX 方向时, $\Delta \tilde{k}$ 项系数达到最大值; 当 Δk 绕着简并点旋转逐渐靠近 ΓY 方向, $\Delta \tilde{k}$ 项系数逐渐减小.

由以上结果可知, 简并点附近带结构的斜率会随着 α 的改变而改变. 同一个 α 值下, 得到的带结构的斜率绝对值相等, 符号相反, 这与采用 COMSOL Multiphysics 进行严格计算所得到的带结构的特点相符. 当然, 这一结果也与系统有效哈密顿量形式相对应.

为了进一步验证 (11)–(12) 式的正确性, 在图 5 中将 (11), (12) 式给出的结果和基于 COMSOL

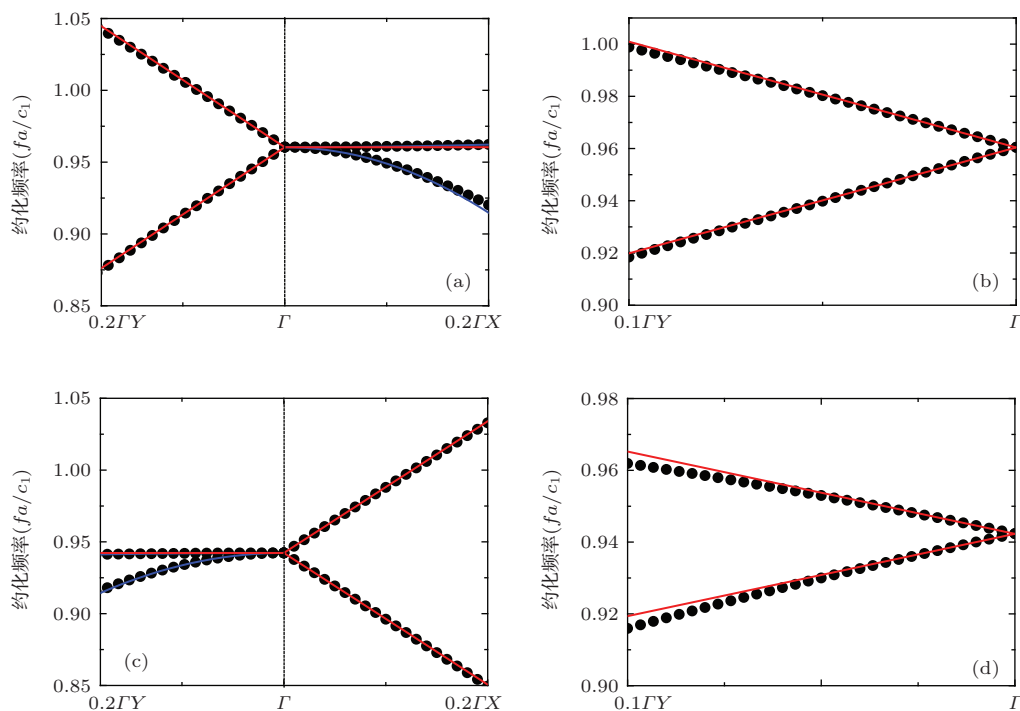


图 5 (网刊彩色) 简并点 A, B 点附近沿着不同方向的带结构 (黑点表示采用 COMSOL Multiphysics 得到的精确结果, 红色实线表示方程 (11), (12) 给出的 $k \cdot p$ 方法的预测结果, 而蓝色实线则代表采用二次函数拟合的结果) (a) A 点附近沿着 ΓX 和 ΓY 方向; (b) A 点附近沿着 ΓK 方向; (c) B 点附近沿着 ΓX 和 ΓY 方向; (d) B 点附近沿着 ΓK 方向

Fig. 5. (color online) Band structures near Points A and B. Black dots are the rigorous calculation results obtained by using COMSOL Multiphysics, red curves represent the results predicted by Eqs. (11) and (12), and blue curves are the fitting results: (a) for Point A, along ΓX and ΓY direction; (b) for Point A, along ΓK direction; (c) for Point B, along ΓX and ΓY direction; (d) for Point B, along ΓK direction.

Multiphysics 有限元方法的计算结果进行比较. 黑色实心点是采用 COMSOL 得到的计算结果, 红色实线是 (11), (12) 式预测的结果. 图 5(a) 和 (c) 横坐标范围均为 $0.2\Gamma X$ 到 $0.2\Gamma X$. 图 5(b) 和 (d) 横坐标范围均为 $0.1\Gamma K$ 到 Γ 点.

图 5(a) 和 (b) 是关于 A 点的计算结果: 图 5(a) 中沿着 ΓX 和 ΓY 方向的红色实线斜率分别是 ± 0.4680 和 0 ; 图 5(b) 中红色实线斜率是 ± 0.4053 . 图 5(c) 和 (d) 是关于 B 点的计算结果: 图 5(c) 中沿着 ΓX 和 ΓY 方向的红色实线斜率分别是 0 和 ± 0.4585 ; 图 5(d) 中红色实线斜率是 ± 0.2292 .

显然, (11), (12) 式所给出的结果与有限元方法的结果在线性带结构上符合的很好. 而我们的 $k \cdot p$ 方法只能准确到线性斜率, 所以对于二次型带结构, 其结果不甚理想.

现在用拟合方法来计算二次型带结构的斜率和曲率. 拟合函数为 $\Delta f_\beta = \gamma_1 \Delta \tilde{k} + \gamma_2 \Delta \tilde{k}^2$. 在图 5 中, 用蓝色实线表示拟合曲线. 简并点 A, B 点附近沿着 ΓX , ΓY 方向上平带的拟合结果与 (11) 和 (12) 式的计算结果十分接近, 所以在图 5(a), (c) 中, ΓX , ΓY 方向上平带的蓝色拟合实线被红色实线覆盖了.

而在 A 点附近沿着 ΓX 方向带的拟合结果如表 1 所示.

表 1 在 A 点附近沿着 ΓX 方向的带的拟合结果
Table 1. Fitting results for Point A along ΓX direction.

系数	下方的带	上方的带
γ_1	7.8680×10^{-16}	-1.8415×10^{-16}
γ_2	-1.1395	4.5550×10^{-2}

根据表 1 所示结果, 可以看出, 对于 A 点附近沿着 ΓX 方向的带, 其系数 γ_1 远小于 γ_2 , 因此, 我们可以忽略 ΓX 方向上相应的带中的 $\Delta \tilde{k}$ 项 (即含有 γ_1 的项).

在 B 点附近沿着 ΓY 方向的带的拟合结果列于表 2.

根据表 2 所示结果, 可以看出, 对于 B 点附近沿着 ΓY 方向的带, 其系数 γ_1 远小于 γ_2 , 因此, 我们可以忽略 ΓY 方向上相应的带中的 $\Delta \tilde{k}$ 项 (即含有 γ_1 的项).

表 2 在 B 点附近沿着 ΓY 方向的带的拟合结果
Table 2. Fitting results of Point A along ΓY direction.

系数	下方的带	上方的带
γ_1	1.4618×10^{-16}	4.1436×10^{-16}
γ_2	-0.8604	-3.2220×10^{-2}

4 贝利相位

根据简并点 A, B 点的耦合积分 p_{lj} 的数值特点, 可以确定系统的有效哈密顿量的形式:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \mathbf{k} \cdot i \text{Im} \mathbf{p}_{12} \\ -\Delta \mathbf{k} \cdot i \text{Im} \mathbf{p}_{21} & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

相应的本征值 E 表示为

$$E = \pm |\Delta \mathbf{k}| \sqrt{|\text{Im} \mathbf{p}_{12}| \cos v_{12} \cdot |\text{Im} \mathbf{p}_{21}| \cos v_{21}}, \quad (14)$$

式中 v_{12} , v_{21} 分别记为 $\Delta \mathbf{k}$ 和 $\text{Im} \mathbf{p}_{12}$, $\Delta \mathbf{k}$ 和 $\text{Im} \mathbf{p}_{21}$ 的夹角. 根据本征方程 $H\varphi = E\varphi$, 得到归一化后的波函数:

$$\varphi_{\pm} = \begin{pmatrix} \left(1 + G \frac{\cos(v_{12} + \zeta)}{\cos v_{12}}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \pm i \left(1 + \frac{1}{G} \frac{\cos v_{12}}{\cos(v_{12} + \zeta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (15)$$

式中 $G = \frac{|\text{Im} \mathbf{p}_{21}|}{|\text{Im} \mathbf{p}_{12}|}$. ζ 是 $\mathbf{p}_{12}$ 与 $\mathbf{p}_{21}$ 的夹角. 这时 v_{12} 是变量.

根据贝利相位的定义, 我们可推导以下结果^[40]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm} &= i \oint \langle \varphi_{\pm} | \nabla_{\Delta \mathbf{k}} | \varphi_{\pm} \rangle d\Delta \mathbf{k} \\ &= i \int_0^{2\pi} dv_{12} \left[\left(1 + G \frac{\cos(v_{12} + \zeta)}{\cos v_{12}}\right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \mp i \left(1 + \frac{1}{G} \frac{\cos v_{12}}{\cos(v_{12} + \zeta)}\right)^{-\frac{1}{2}} \Big] \\ &\quad \times \left[-\frac{G}{2} \left(1 + G \frac{\cos(v_{12} + \zeta)}{\cos v_{12}}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sin(-\zeta)}{\cos^2 v_{12}} \right. \\ &\quad \mp \frac{i}{2G} \left(1 + \frac{1}{G} \frac{\cos v_{12}}{\cos(v_{12} + \zeta)}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\sin \zeta}{\cos^2(v_{12} + \zeta)} \Big] \\ &= i \frac{G}{2} \int_0^{2\pi} dv_{12} \left(1 + G \frac{\cos(v_{12} + \zeta)}{\cos v_{12}}\right)^{-2} \frac{\sin \zeta}{\cos^2 v_{12}} \\ &\quad - \frac{i}{2G} \int_0^{2\pi} dv_{12} \left(1 + \frac{1}{G} \frac{\cos v_{12}}{\cos(v_{12} + \zeta)}\right)^{-2} \\ &\quad \times \frac{\sin \zeta}{\cos^2(v_{12} + \zeta)} \\ &= i \frac{G}{2} \int_0^{2\pi} dv_{12} (\cos v_{12} + G \cos(v_{12} + \zeta))^{-2} \sin \zeta \\ &\quad - \frac{i}{2G} \int_0^{2\pi} dv_{12} \left(\cos(v_{12} + \zeta) + \frac{1}{G} \cos v_{12} \right)^{-2} \\ &\quad \times \sin \zeta = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

积分结果为零, $\Gamma = 0$. 因此, 无论是 $\mathbf{p}_{12}$ 与 $\mathbf{p}_{21}$ 的夹角 ζ 取何值, 只要相应的有效哈密顿量为 (13) 式形式, 最后都会导致相应的贝利相位值均为零. 从这个意义上讲, 我们在这里所研究的半狄拉克与石墨烯中 K 点附近的狄拉克点有很大不同: 在石墨烯中, 贝利相位为 $\pm\pi$.

5 有限元仿真波的透射现象及带结构分析

5.1 简并点 A 点频率附近的波透射现象

图 6(a) 显示了简并点 A 点附近的带结构, 其约化频率 $\tilde{f}$ 的范围是 0.6 到 1.4. 图中左方内置小图是晶体样品示意图, 并标识了平面波的入射方向, x 和 y 方向; 右方内置小图是系统的第一布里渊区及其各个高对称点. A1 和 A4 是 ΓX 方向上的本征态, A2 是 ΓY 方向上的本征态, A3 是 KY 方向上的本征态. 标记为橙色的带是哑带, 也就是说, 由于对称性不匹配, 入射平面波无法激发这些带上的本征态 [22,41]. 以 A4 点为例. 当平面波以 A4 点频率 ($f_{A4} = 0.6437 \frac{c_1}{a}$) 沿着 y 方向入射到置于波导管中的声子晶体上, 图 6(c) 显示了压力场图的实部. 显然, 平面波此时不能透过声子晶体. 这是因为 A4 的实部 (图 6(g)) 和虚部 (图 6(k)) 均关于 x 轴反对称, 所以本征态 A4 无法被沿 y 方向入射的平面波所激发.

图 6(d)–(f) 分别为本征态 A1, A2, A3 的实部, (h)–(j) 分别为它们的虚部. 显然, A1 的实部和虚部均关于 x 轴反对称, 所以本征态 A1 无法被沿 y 方向入射的平面波激发. A2 的实部和虚部均关于 y 轴反对称, 故不能被沿着 x 方向入射的平面波激发. 而 A3 的实部关于 x 轴和 y 轴对称; A3 的虚部关于 x 轴对称, 关于 y 轴反对称. 所以沿着 y 方向入射的平面波会激发 KY 带结构上相应频率的本征态.

当平面波沿着 x 方向入射时, 入射波能够激发标记为黑色的 ΓY 方向的带上的本征态, 所以透射系数不为零. 但随着频率的进一步增加, 当约化频率大于 F 点频率 ($f_F = 1.2532 \frac{c_1}{a}$), ΓY 方向变成了带隙, 此时的透射系数变为零.

当平面波沿着 y 方向入射时, 若入射波的频率小于 A 点频率, 沿着 ΓX 方向的带为哑带, 而 KY 方向为带隙, 所以这时候平面波的透射系数为零. 当入射波的频率大于 A 点频率时, 入射的平面波激

发了标记为黑色的 ΓX , KY 方向的带上的本征态, 因此这时的透射系数不为零.

根据以上的讨论, 我们就能理解图 6(b) 中透射系数频谱在 x 和 y 方向展现出来的完全不同的行为. 图 6(b) 中黑色实线为平面波沿着 x 方向入射时的透射系数, 红色实线为平面波沿着 y 方向入射时的透射系数, 蓝色虚线标识 A 点对应的频率.

5.2 简并点 B 点频率附近的波透射现象

图 7(a) 为简并点 B 点附近的带结构, 图中约化频率范围 $\tilde{f}$ 是 0.6 到 1.4. B1, B2, B4 是 ΓX 方向上的本征态, B3 是 ΓY 方向上的本征态. 标记为橙色的带是哑带. 图 7(b) 是透射系数与频率的关系图, 其入射的平面波的频率范围与图 7(a) 一致. 其中黑色实线为平面波沿着 x 方向入射时的透射系数, 红色实线为平面波沿着 y 方向入射时的透射系数, 蓝色虚线标识 B 点对应的频率. 图 7(c)–(f) 分别为本征态 B1, B2, B3, B4 的实部, (g)–(j) 分别为它们的虚部. 显然, B1, B2, B4 的实部和虚部均关于 x 轴反对称, 所以本征态 B1, B2, B4 无法被沿 y 方向入射的平面波激发. B3 的实部和虚部均关于 y 轴反对称, 故不能被沿着 x 方向入射的平面波激发.

首先考虑平面波沿着 x 方向入射. ΓY 方向带结构在 E 点 ($f_E = 0.7126 \frac{c_1}{a}$) 之前是带隙, 所以透射系数为零; 当入射的平面波的频率处在 B 点和 E 点频率之间, ΓY 方向上的带可以被激发, 故透射不为零; 当入射的平面波的频率处在 B 点和 C 点 ($f_C = 1.2461 \frac{c_1}{a}$) 之间, 这时带结构的 ΓY 方向为带隙, 于是透射系数为零; 当入射的平面波的频率增加到大于 C 点频率, ΓY 方向带上的本征态被激发, 则透射系数再次不为零.

若平面波沿着 y 方向入射. 当入射的波频率小于 E 点频率时, 虽然带结构在 ΓX 方向处于带隙, 但沿 KY 方向上的带可以被激发, 故透射系数不为零. 当入射波的频率大于 E 点频率而小于 D 点频率 ($f_D = 0.9329 \frac{c_1}{a}$) 时, ΓX 方向的带为哑带, KY 方向为带隙, 于是透射系数为零. 当入射波的频率大于 D 点频率而小于 C 点频率, ΓX 方向和 KY 方向上标记为黑色的带被激发, 则透射系数再次不为零; 直到入射的平面波的频率大于 C 点频率, 带结构进入带隙状态, 透射系数又变为零.

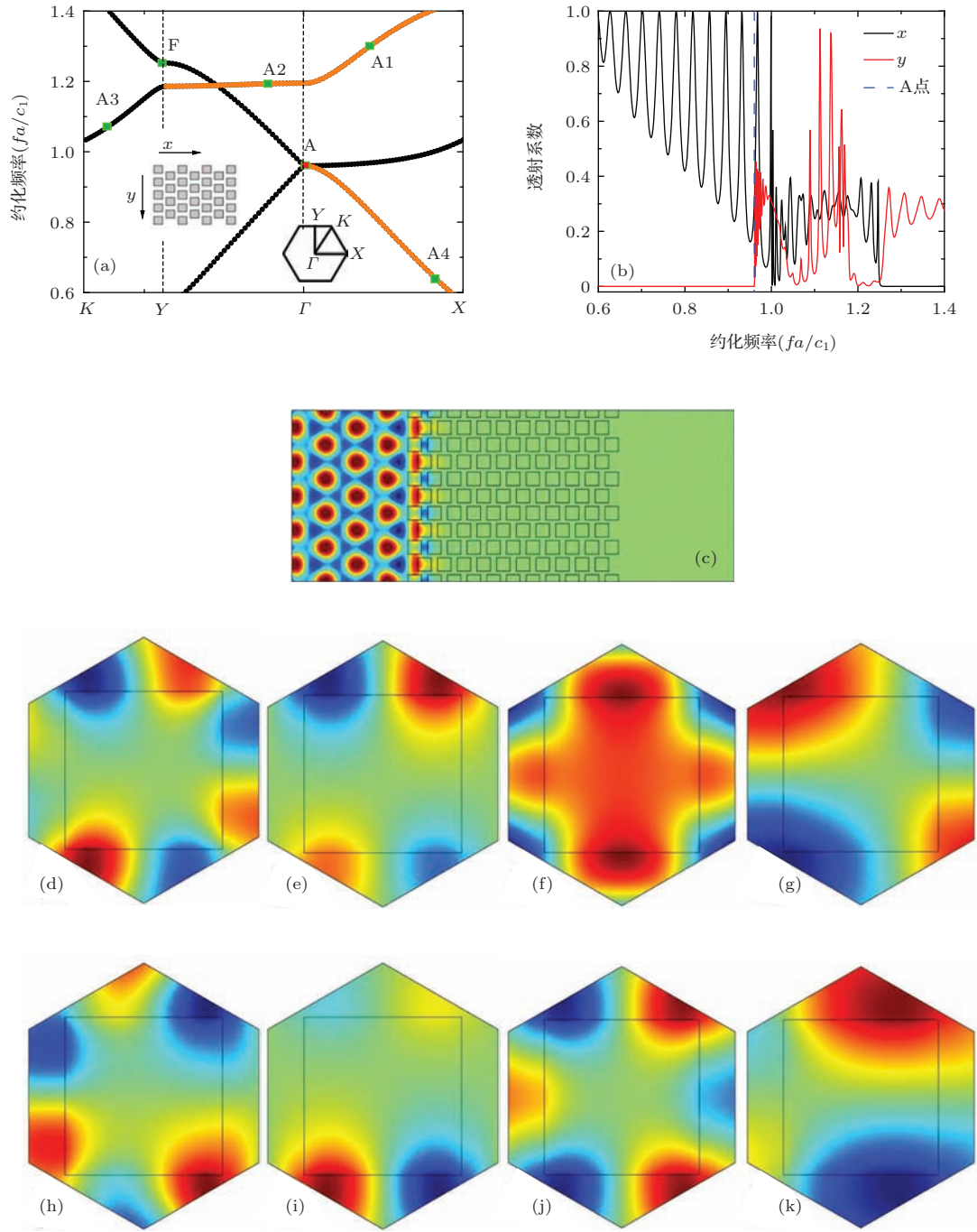


图6 (网刊彩色) A点频率附近的带结构, 透射系数频谱及本征态场图 (a) 简并点A频率附近的带结构(左方内
置小图是晶体样品示意图, 并标识了平面波的入射方向. 右方内置小图是系统的第一布里渊区及其各个
高对称点); (b) 透射系数频谱; (c) 平面波以A4点频率 $\left(f_{A4} = 0.6437 \frac{c_1}{a}\right)$ 沿着 y 方向入射到置于波导
管中声子晶体上时的压力场分布图, 由于A4处于哑带上, 故平面波不能透过声子晶体; (d)–(g) 分别为
A1, A2, A3, A4的本征态的实部; (h)–(k) 分别为A1, A2, A3, A4的本征态的虚部

Fig. 6. (color online) Band structure, transmission coefficients and eigenstates: (a) band structure around Point A, with frequency $\tilde{f}$ range from 0.6 to 1.4 (Inset on the left side is a sample of the PC, and the inset on the right side is the first Brillouin zone); (b) the transmission coefficient as a function of frequency; (c) the pressure field distribution for a y -direction plane wave impinging on a PC slab placed in a waveguide at the A4 frequency $\left(f_{A4} = 0.6437 \frac{c_1}{a}\right)$; (d)–(g) the real parts of the pressure field distributions for eigenstates A1, A2, A3 and A4, respectively; (h)–(k) the imaginary parts of the pressure field distributions for eigenstates A1, A2, A3 and A4, respectively.

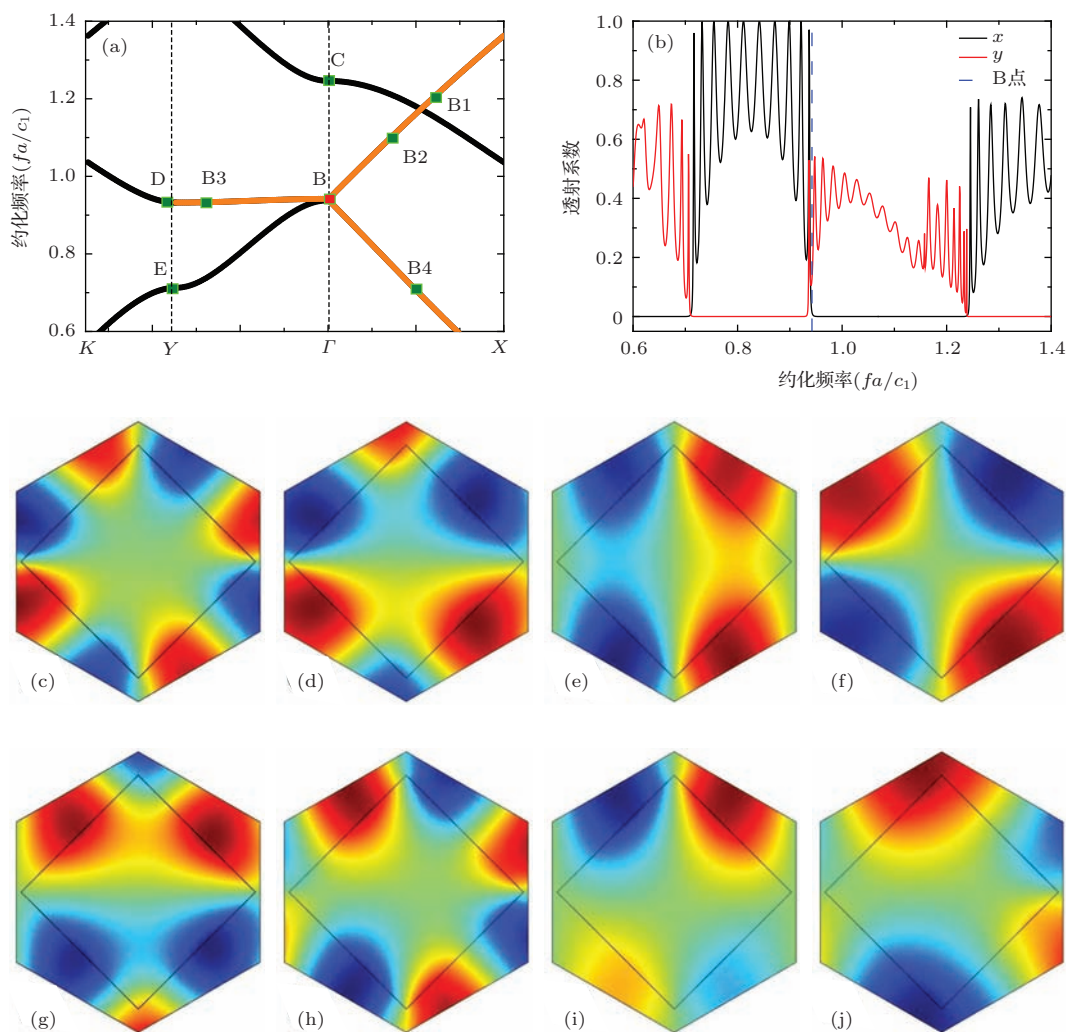


图7 (网刊彩色) B点频率附近的带结构, 透射系数频谱及本征态场图 (a) 简并点B频率附近的带结构; (b) 为透射系数频谱; (c)—(f) 分别为B1, B2, B3, B4的本征态的实部; (g)—(j) 分别为B1, B2, B3, B4的本征态的虚部
Fig. 7. (color online) Band structure, transmission coefficients and eigenstates: (a) band structure around Point B, with frequency $\tilde{f}$ range from 0.6 to 1.4; (b) the transmission coefficient as a function of frequency; (c)–(f) the real parts of the pressure field distributions for eigenstates B1, B2, B3 and B4, respectively; (g)–(j) The imaginary parts of the pressure field distributions for eigenstates B1, B2, B3 and B4, respectively.

综合上述结果, 我们发现平面波沿着 x, y 方向的透射现象在 C, B, D 点发生相对翻转. 例如在 E 点频率, 沿着 y 方向入射的平面波透射系数急剧地降为零, 同时沿着 x 方向入射的平面波透射系数由零急剧地增加接近 1. 也就是说, 我们在声子晶体体系中, 得到了一种“开关”的现象. 又如在 B 点频率, 沿着 x 方向入射的平面波透射系数为零, 同时沿着 y 方向入射的平面波透射系数非零. 更有趣的是, 这个“开关”现象能够在三个相隔较远的频率 $\left(f_E = 0.7126 \frac{c_1}{a}, f_B = 0.9423 \frac{c_1}{a}, f_C = 1.2461 \frac{c_1}{a}\right)$ 得到实现.

6 讨论与结论

我们设计了一种易于实现的二维声子晶体: 它是由截面为正方形的铁柱体以三角晶格形式排布于水中而形成的. 在其布里渊区中心 Γ 点有半狄拉克点的出现: 其带结构沿 ΓY 方向是线性的, 但沿着 ΓX 方向却是二次型的. 若散射体绕中心轴旋转角度 $\theta = 45^\circ$, 并微调散射体边长, 则半狄拉克点的二次型带结构则会沿着 ΓY 方向, 与 ΓX 相互垂直. 此外, 基于 $k \cdot p$ 微扰法, 我们发现在半狄拉克点 A, B 点附近, 有效哈密顿量的主对角线元素均为零, 而副对角线矩阵元上分别只有 $e_{\Gamma Y}$ 方向、 $e_{\Gamma X}$ 方向

的分量, 即简并点 A, B 点两个本征态的相互作用分别只存在于 $e_{\Gamma Y}$ 方向、 $e_{\Gamma X}$ 方向. 在这些存在相互作用的方向上形成了线性色散关系, 而与之垂直的方向则形成了二次型带结构. 另外, 简并点 A 及 B 点附近带结构的线性斜率会随着布洛赫波矢旋转远离二次型带结构的方向而增加, 在与二次型带结构方向垂直时达到最大值. 此外, 根据有效哈密顿量我们准确地计算出相应的贝利相位值为零, 这表明我们所研究的半狄拉克点与石墨烯中的狄拉克点有很大不同.

借助于有限元仿真, 我们可研究声波沿着不同方向穿过这些半狄拉克点体系的透射现象. 结合带结构分析, 我们发现, 旋转散射体会使得体系带结构性质发生变化, 部分能带会变成哑带. 另外, 散射体绕着中心轴旋转角 $\theta = 45^\circ$ 后得到声子晶体能够在简并点 B 点频率 $\left(f_B = 0.9423 \frac{c_1}{a}\right)$ 及其他两个频率 $\left(f_E = 0.7126 \frac{c_1}{a}, f_C = 1.2461 \frac{c_1}{a}\right)$ 附近展示出有趣的“开关”现象.

参考文献

- [1] Castro N A H, Guinea F, Peres N M R, Novoselov K S, Geim A K 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 109
- [2] Rowlands D A, Zhang Y Z 2014 *Chin. Phys. B* **23** 37101
- [3] Jung J, Raoux A, Qiao Z H, Mac-Donald A H 2014 *Phys. Rev. B* **89** 205414
- [4] Wang X X, Bian G, Wang P, Chiang T C 2015 *Phys. Rev. B* **91** 125103
- [5] Zhang Y P, Yin Y H, Lu H H, Zhang H Y 2014 *Chin. Phys. B* **23** 027202
- [6] Wen J, Guo H, Yan C H, Wang Z Y, Chang K, Deng P, Zhang T, Zhang Z D, Ji S H, Wang L L, He K, Ma X C, Chen X, Xue Q K 2014 *Chin. Phys. Lett.* **31** 116802
- [7] Li W F, Guo M, Zhang G, Zhang Y W 2014 *Phys. Rev. B* **89** 205402
- [8] Lin S Y, Chen M, Yang X B, Zhao Y J, Wu S C, Felser C, Ya B H 2015 *Phys. Rev. B* **91** 094107
- [9] Zhang D, Lin L Z, Zhu J J 2014 *Chin. Phys. Lett.* **31** 028102
- [10] Torrent A, Dehesa J S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 174301
- [11] Zhang X D, Liu Z Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 264303
- [12] Lu J Y, Qiu C Y, Xu S J, Ye Y T, Ke M Z, Liu Z Y 2014 *Phys. Rev. B* **89** 134302
- [13] Chen Z G, Ni X, Wu Y, He C, Sun X C, Zheng L Y, Lu M H, Chen Y F 2014 *Sci. Rep.* **4** 4613
- [14] Sun L, Gao J, Yang X D 2013 *Opt. Express* **21** 21542
- [15] Huang X Q, Lai Y, Hang Z H, Zheng H H, Chen C T 2011 *Nature Materials* **10** 1038
- [16] Sepkhanov R A, Bazaliy Y B, Beenakker C W J 2007 *Phys. Rev. A* **75** 063813
- [17] Mei J, Wu Y, Chan C T, Zhang Z Q 2012 *Phys. Rev. B* **86** 035141
- [18] Wu Y 2014 *Opt. Express* **22** 001906
- [19] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496** 12066
- [20] Wang X, Jiang H T, Yan C, Deng F S, Sun Y, Li Y H, Shi Y L, Chen H 2014 *Europhys. Lett.* **108** 14002
- [21] Deng F S, Sun Y, Wang X, Xue R, Li Y, Jiang H T, Shi Y L, Chang K, Chen H 2014 *Opt. Express* **22** 23605
- [22] Cao H X, Mei J 2014 *Proceedings of the ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* Montreal, Quebec, Canada November 14–20, 2014, 37422
- [23] Xiao X B, Yang S Y A, Liu Z F, Li H L, Zhou G H 2015 *Sci. Rep.* **5** 7898
- [24] Yang D Z, Si M S, Zhang G P, Xue D X 2014 *Europhys. Lett.* **107** 20003
- [25] Zhou X F, Dong X, Oganov A R, Zhu Q, Tian Y J, Wang H T 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 085502
- [26] Wang Q, Shen R, Sheng L, Wang B G, Xing D Y 2014 *Phys. Rev. A* **89** 022121
- [27] Feng Y, Wang Z J, Chen C Y, Shi Y G, Xie Z J, Yi H M, Liang A J, He S L, He J F, Peng Y Y, Liu X, Liu Y, Zhao L, Liu G D, Dong X L, Zhang J, Chen C T, Xu Z Y, Dai X, Fang Z, Zhou X J 2014 *Sci. Rep.* **4** 5385
- [28] Ortix C, Yang L P, Brink J V D 2012 *Phys. Rev. B* **86** 081405
- [29] Banerjee S, Singh R R P, Pardo V, Pickett W E 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 016402
- [30] Zhai F, Wang J 2014 *Appl. Phys. Lett.* **116** 063704
- [31] Zhai F, Mu P Y, Chang K 2011 *Phys. Rev. B* **83** 195402
- [32] Cheng C, Wu F G, Zhang X, Yao Y W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 024301 (in Chinese) [程聪, 吴福根, 张欣, 姚源卫 2014 物理学报 **63** 024301]
- [33] Hou L N, Hou Z L, Fu X J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 034305 (in Chinese) [侯丽娜, 侯志林, 傅秀军 2014 物理学报 **63** 034305]
- [34] Zhang X J, Wu Y 2014 *Proceedings of the ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* Montreal, Quebec, Canada November 14–20, 2014, 37421
- [35] Li Y, Wu Y, Chen C, Mei J 2013 *Opt. Express* **21** 7699
- [36] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. A* **392** 45
- [37] Kafesaki M, Economou E N 1999 *Phys. Rev. B* **60** 11993
- [38] Dresselhaus M S, Dresselhaus G, Jorio A 2008 *Group Theory: Application to the Physics of Condensed Matter* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag) pp209–235
- [39] Wu Y, Li J, Zhang Z Q, Chan C T 2006 *Phys. Rev. B* **74** 085111
- [40] Sakurai J J 1994 *Modern Quantum Mechanics* (Boston: Addison-Wesley, Reading, MA) pp465–480
- [41] Sakoda K 2005 *Optical Properties of Photonic crystals* (Second Edition) (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag) pp94–95

Semi-Dirac points in two-dimensional phononic crystals*

Cao Hui-Xian Mei Jun[†]

(School of Physics, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(Received 19 April 2015; revised manuscript received 13 May 2015)

Abstract

A two-dimensional phononic crystal (PC) composed of a triangular array of square iron cylinders embedded in water is designed, in which the accidental degeneracy of the Bloch eigenstates is utilized to realize a semi-Dirac point at the Brillouin zone center. In the vicinity of the semi-Dirac point, the dispersion relation is linear along the ΓY direction but quadratic along the ΓX direction. Rotating the iron cylinders around their axis by 45° and slightly tuning the side length of the cylinders, a new semi-Dirac point can be realized at the Brillouin zone center, where the dispersion relation is quadratic along the ΓY direction but linear along the ΓX direction. To gain a deeper understanding of the semi-Dirac point, a $k \cdot p$ perturbation method is used to investigate this peculiar dispersion relation and study how the semi-Dirac point is formed. The linear slopes of dispersion relations along any direction around the semi-Dirac point can be accurately predicted by the perturbation method, and the results agree very well with the rigorous band structure calculations. Furthermore, the mode-coupling integration between the degenerate Bloch eigenstates is zero in one direction but non-zero in the perpendicular direction, and this is the ultimate reason for the forming of a semi-Dirac point. With the help of the perturbation method, an effective Hamiltonian can be constructed around the semi-Dirac point, so that the Berry phase can be calculated, which is found to be zero. Actually, the different values of Berry phase indicate an important distinction between the semi-Dirac points and Dirac points. In addition, the acoustic wave transmission through the corresponding PC structure has been studied, and a switch-like behavior of the transmittance is observed along different directions. Along some particular direction, there exist deaf bands around the semi-Dirac point, and these bands cannot be excited by the externally incident plane waves due to the mismatch in mode symmetry. But the situation is different along the other direction, where the bands are active ones and therefore can be excited by the incident plane waves. Actually, such properties of the bands can be easily changed as long as the iron cylinders are rotated around their axis. The work described in this paper is helpful to the understanding of semi-Dirac point in phononic crystals and suggests possible applications in diverse fields.

Keywords: semi-Dirac points, phononic crystals, effective Hamiltonian, Berry phase**PACS:** 43.40.+s, 43.20.+g, 46.40.-f, 62.30.+d**DOI:** 10.7498/aps.64.194301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11274120), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant No. 2014ZG0032).

[†] Corresponding author. E-mail: phjunmei@scut.edu.cn