物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

一类非线性发展方程的复合型双孤子新解

套格图桑　伊丽娜

New complexion two-soliton solutions of a class of nonlinear evolution equation

Taogetusang　Yi Li-Na

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 020201 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.020201
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.020201
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I2

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 64, No. 2 (2015) 020201

一类非线性发展方程的复合型双孤子新解*

套格图桑† 伊丽娜

(内蒙古师范大学, 数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2014 年 7 月 2 日收到; 2014 年 9 月 2 日收到修改稿)

通过下列步骤, 构造了一类非线性发展方程的无穷序列复合型双孤子新解: 步骤一, 给出两种函数变换, 把一类非线性发展方程化为二阶非线性常微分方程; 步骤二, 再通过函数变换, 二阶非线性常微分方程转化为一阶非线性常微分方程组, 并获得了该方程组的首次积分; 步骤三, 利用首次积分与两种椭圆方程的新解与 Bäcklund 变换, 构造了一类非线性发展方程的无穷序列复合型双孤子新解.

关键词: 非线性发展方程, 函数变换, 首次积分, 复合型双孤子新解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.64.020201

1 引　言

文献 [1] 研究了著名的短脉冲方程 (1), 获得了新成果. 所谓的脉冲现象就是在机械钟摆运动、电流中的电脉冲和飞行物飞行中的脉冲控制等许多实际问题的发展变化过程中瞬间突变的现象.

$$u_{xt} = u + \frac{1}{6}(u^3)_{xx}, \tag{1}$$

这里 $u = u(x,t)$ 表示电场的大小.

文献 [2] 通过零曲率方程, 将短脉冲方程 (1) 的求解问题, 转化为形如 (2)—(4) 式的非线性发展方程的求解问题. 文献 [3, 4] 研究了构造如下一类非线性发展方程的双孤子解问题, 并获得了新成果:

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u + \frac{1}{6}\left(u^3 + 3uv^2\right)_{xx}, \\ v_{xt} &= v + \frac{1}{6}\left(v^3 + 3u^2v\right)_{xx}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u + \frac{1}{6}\left(u^3 - 3uv^2\right)_{xx}, \\ v_{xt} &= v - \frac{1}{6}\left(v^3 - 3u^2v\right)_{xx}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u + \frac{1}{6}\left(u^3\right)_{xx}, \\ v_{xt} &= v + \frac{1}{2}\left(u^2v\right)_{xx}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u + \frac{1}{6}\left(u^3 + uv^2\right)_{xx}, \\ v_{xt} &= v + \frac{1}{6}\left(v^3 + u^2v\right)_{xx}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u + \frac{1}{6}\left(u^3\right)_{xx}, \\ v_{xt} &= v + \frac{1}{6}\left(u^2v\right)_{xx}. \end{aligned} \tag{6}$$

非线性发展方程 (1)—(6) 描述某些运动状态在固定或不固定时刻的脉冲现象等非线性科学问题的数学模型. 研究此类非线性发展方程的求解问题, 在理论和应用方面有着重要意义.

构造非线性发展方程的多孤子解是孤子理论的重要研究内容之一. 文献 [5—8] 用达布变换法、双线性法与 Bäcklund 变换法等不同的方法, 获得了一些非线性发展方程的多孤子新解. 比如: 文献 [5] 用达布变换法, 构造了变系数 Schrödinger 方程的多孤子新解. 文献 [6] 用 Bäcklund 变换法, 研究了一类变系数耦合 Schrödinger 系统的求解问题, 获得了多孤子新解. 文献 [7] 通过双线性方法, 获得了耦合 KdV 方程与 Neumann 系统的多孤子新解.

文献 [5—8] 用达布变换法与双线性法等方法, 获得了 Schrödinger 系统等非线性发展方程的指数函数型多孤子新解. 文献 [4] 给出了一种方法, 获得

* 国家自然科学基金资助项目 (批准号: 11361040) 和内蒙古自治区高等学校科学研究基金 (批准号: NJZY12031) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: tgts@imnu.edu.cn

了非线性发展方程(2)的由椭圆函数和双曲函数两两组成的有限多个双孤子解.

本文以文献[1—8]为基础, 研究了如下一类非线性发展方程的求解问题, 通过几个步骤, 获得了无穷序列复合型双孤子新解. 步骤一, 给出两种函数变换, 把一类非线性发展方程化为二阶非线性常微分方程; 步骤二, 再通过函数变换, 二阶非线性常微分方程转化为一阶非线性常微分方程组, 并获得了该方程组的首次积分; 步骤三, 利用首次积分与两种椭圆方程的新解与Bäcklund变换, 构造了一类非线性发展方程的Riemann θ函数、Jacobi椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数两两组成的无穷序列复合型双孤子新解.

$$\begin{aligned} u_{xt} &= \alpha_1 u + \gamma_1\big(\alpha_2 u^3 + \alpha_3 u v^2\big)_{xx},\\ v_{xt} &= \beta_1 v + \gamma_2\big(\beta_2 v^3 + \beta_3 u^2 v\big)_{xx}, \end{aligned} \tag{7}$$

这里α_j, $\beta_i (i = j = 1, 2, 3)$, γ_1, γ_2是任意常数.

2 方法介绍

2.1 函数变换与二阶非线性常微分方程

假设一类非线性发展方程(7)的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[P_1(\xi_1) + Q_1(\eta_1)\big], \tag{8}$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big[P_1(\xi_1) - Q_1(\eta_1)\big], \tag{9}$$

这里$\xi_1 = \lambda_1 x + \mu_1 t$, $\eta_1 = \nu_1 x + \omega_1 t$; λ_1, μ_1, ν_1和ω_1是待定常数, 而且$\lambda_1 \neq \nu_1$, $\mu_1 \neq \omega_1$.

情形1 一类非线性发展方程存在双孤子解的条件

当$\alpha_3 = 3\alpha_2$, $\beta_3 = 3\beta_2$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2$时, 一类非线性发展方程(7)存在双孤子解, 而且解由下列二阶非线性常微分方程组来确定:

$$\begin{aligned} P_1''(\xi_1) &= \frac{d^2 P_1(\xi_1)}{d\xi_1^2}\\ &= -\frac{\alpha_1 P_1(\xi_1) + 6\gamma_1\beta_2\lambda_1^2 P_1(\xi_1)\big(P_1'(\xi_1)\big)^2}{-\lambda_1\mu_1 + 3\gamma_1\beta_2\lambda_1^2 P_1^2(\xi_1)}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} Q_1''(\eta_1) &= \frac{d^2 Q_1(\eta_1)}{d\eta_1^2}\\ &= -\frac{\alpha_1 Q_1(\eta_1) + 6\gamma_1\beta_2\nu_1^2 Q_1(\eta_1)\big(Q_1'(\eta_1)\big)^2}{-\nu_1\omega_1 + 3\gamma_1\beta_2\nu_1^2 Q_1^2(\eta_1)}. \end{aligned} \tag{11}$$

情形2 二阶非线性常微分方程的首次积分

把非线性常微分方程(10)和(11)转化为如下两个常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}\xi_1} = Y_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}\xi_1} = -\dfrac{\alpha_1 P_1 + 6\gamma_1\beta_2\lambda_1^2 P_1 Y_1^2}{-\lambda_1\mu_1 + 3\gamma_1\beta_2\lambda_1^2 P_1^2}, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}\eta_1} = X_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}\eta_1} = -\dfrac{\alpha_1 Q_1 + 6\gamma_1\beta_2\nu_1^2 Q_1 X_1^2}{-\nu_1\omega_1 + 3\gamma_1\beta_2\nu_1^2 Q_1^2}. \end{cases} \tag{13}$$

通过下列函数变换(14)和(15), 把两个常微分方程组(12)和(13)表示成(16)和(17)的形式:

$$\mathrm{d}\xi_1 = \big(-\lambda_1\mu_1 + 3\gamma_1\beta_2\lambda_1^2 P_1^2\big)\,\mathrm{d}\tau_1, \tag{14}$$

$$\mathrm{d}\eta_1 = \big(-\nu_1\omega_1 + 3\gamma_1\beta_2\nu_1^2 Q_1^2\big)\,\mathrm{d}\zeta_1, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}\tau_1} = Y_1\big(-\lambda_1\mu_1 + 3\gamma_1\beta_2\lambda_1^2 P_1^2\big),\\ \dfrac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}\tau_1} = -(\alpha_1 P_1 + 6\gamma_1\beta_2\lambda_1^2 P_1 Y_1^2), \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}\zeta_1} = X_1\big(-\nu_1\omega_1 + 3\gamma_1\beta_2\nu_1^2 Q_1^2\big),\\ \dfrac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}\zeta_1} = -\big(\alpha_1 Q_1 + 6\gamma_1\beta_2\nu_1^2 Q_1 X_1^2\big). \end{cases} \tag{17}$$

经计算获得了常微分方程组(16)和(17)的如下首次积分:

$$Y_1^2 = \frac{2\lambda_1 c_1 + 2\mu_1\alpha_1 P_1^2 - 3\lambda_1\alpha_1\beta_2\gamma_1 P_1^4}{2\lambda_1(\mu_1 - 3\lambda_1\beta_2\gamma_1 P_1^2)^2}, \tag{18}$$

$$X_1^2 = \frac{2\nu_1 c_2 + 2\omega_1\alpha_1 Q_1^2 - 3\nu_1\alpha_1\beta_2\gamma_1 Q_1^4}{2\nu_1(\omega_1 - 3\nu_1\beta_2\gamma_1 Q_1^2)^2}, \tag{19}$$

这里c_1和c_2是任意常数.

将首次积分(18)和(19)式分别代入常微分方程组(16)和(17)的第一方程后得到下列两个第一种椭圆方程:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}\tau_1}\right)^2 &= \lambda_1^2 c_1 + \lambda_1\mu_1\alpha_1 P_1^2\\ &\quad - \frac{3}{2}\lambda_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1 P_1^4, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}\zeta_1}\right)^2 &= \nu_1^2 c_2 + \omega_1\nu_1\alpha_1 Q_1^2\\ &\quad - \frac{3}{2}\nu_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1 Q_1^4. \end{aligned} \tag{21}$$

2.2 改进的方法

假设一类非线性发展方程(7)的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{\exp\left[\int P_2(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2\right]\right.$$

$$+\exp\left[\int Q_2(\eta_2)\mathrm{d}\eta_2\right]\Big\}, \tag{22}$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\Big\{\exp\left[\int P_2(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\right]$$
$$-\exp\left[\int Q_2(\eta_2)\mathrm{d}\eta_2\right]\Big\}, \tag{23}$$

这里 $\xi_2=\lambda_2 x+\mu_2 t$, $\eta_2=\nu_2 x+\omega_2 t$; λ_2, μ_2, ν_2 和 ω_2 是待定常数, 而且 $\lambda_2\neq\nu_2$, $\mu_2\neq\omega_2$.

情形 1 一类非线性发展方程存在双孤子解的条件

当 $\alpha_3=3\alpha_2$, $\beta_3=3\beta_2$, $\beta_1=\alpha_1$, $\gamma_2=\gamma_1$, $\alpha_2=\beta_2$ 时, 一类非线性发展方程 (7) 存在双孤子解. 并解由下列一阶非线性常微分方程组来确定:

$$P_2'(\xi_2)=\frac{\mathrm{d}P_2(\xi_2)}{\mathrm{d}\xi_2}$$
$$=-\Big\{\alpha_1+9\gamma_1\lambda_2^2\beta_2\exp\left[2\int P_2(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\right]$$
$$\times P_2^2(\xi_2)-\lambda_2\mu_2P_2^2(\xi_2)\Big\}\times\Big\{\lambda_2\Big[3\gamma_1\beta_2\lambda_2$$
$$\times\exp\left[2\int P_2(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\right]-\mu_2\Big]\Big\}^{-1}, \tag{24}$$

$$Q_2'(\eta_2)=\frac{\mathrm{d}Q_2(\eta_2)}{\mathrm{d}\eta_2}$$
$$=-\Big\{\alpha_1+9\gamma_1\nu_2^2\beta_2\exp\left[2\int Q_2(\eta_2)\mathrm{d}\eta_2\right]$$
$$\times Q_2^2(\eta_2)-\nu_2\omega_2Q_2^2(\eta_2)\Big\}\times\Big\{\nu_2\Big[3\gamma_1\beta_2\nu_2$$
$$\times\exp\left[2\int Q_2(\eta_2)\mathrm{d}\eta_2\right]-\omega_2\Big]\Big\}^{-1}. \tag{25}$$

常微分方程 (24) 和 (25) 可以写成下列形式:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}\xi_2}=2P_2Y_2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}\xi_2}=-\dfrac{\alpha_1+9\gamma_1\lambda_2^2\beta_2Y_2P_2^2-\lambda_2\mu_2P_2^2}{\lambda_2(3\gamma_1\beta_2\lambda_2Y_2-\mu_2)},\end{cases} \tag{26}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}\eta_2}=2Q_2X_2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}\eta_2}=-\dfrac{\alpha_1+9\gamma_1\nu_2^2\beta_2X_2Q_2^2-\nu_2\omega_2Q_2^2}{\nu_2(3\gamma_1\beta_2\nu_2X_2-\omega_2)},\end{cases} \tag{27}$$

再通过变换 (28) 和 (29) 式, 把两个常微分方程组 (26) 和 (27) 写成 (30) 和 (31) 的形式:

$$\mathrm{d}\xi_2=\lambda_2(3\gamma_1\beta_2\lambda_2Y_2-\mu_2)\mathrm{d}\tau_2, \tag{28}$$

$$\mathrm{d}\eta_2=\nu_2(3\gamma_1\beta_2\nu_2X_2-\omega_2)\mathrm{d}\zeta_2, \tag{29}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}\tau_2}=2P_2Y_2\lambda_2(3\gamma_1\beta_2\lambda_2Y_2-\mu_2),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}\tau_2}=-(\alpha_1+9\gamma_1\lambda^2\beta_2Y_2P_2^2-\lambda_2\mu_2P_2^2),\end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}\zeta_2}=2Q_2X_2\nu_2(3\gamma_1\beta_2\nu_2X_2-\omega_2),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}\zeta_2}=-(\alpha_1+9\gamma_1\nu_2^2\beta_2X_2Q_2^2-\nu_2\omega_2Q_2^2).\end{cases} \tag{31}$$

情形 2 二阶非线性常微分方程的首次积分

经计算获得了常微分方程组 (30) 和 (31) 的如下首次积分:

$$P_2^2=\frac{2c_3\lambda_2+\alpha_1(2\mu_2-3\lambda_2\beta_2\gamma_1Y_2)Y_2}{2\lambda_2(-\mu_2+3\lambda_2\beta_2\gamma_1Y_2)^2Y_2}, \tag{32}$$

$$Q_2^2=\frac{2c_4\nu_2+\alpha_1(2\omega_2-3\nu_2\beta_2\gamma_1X_2)X_2}{2\nu_2(-\omega_2+3\nu_2\beta_2\gamma_1X_2)^2X_2}, \tag{33}$$

这里 c_3 和 c_4 是任意常数.

将首次积分 (32) 和 (33) 式分别代入常微分方程组 (30) 和 (31) 的第一个方程后得到下列第二种椭圆方程:

$$\left(\frac{\mathrm{d}Y_2}{\mathrm{d}\tau_2}\right)^2=4c_3\lambda_2^2Y_2+4\alpha_1\mu_2\lambda_2Y_2^2$$
$$-6\lambda_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1Y_2^3, \tag{34}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}\zeta_2}\right)^2=4c_4\nu_2^2X_2+4\alpha_1\omega_2\nu_2X_2^2$$
$$-6\nu_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1X_2^3. \tag{35}$$

2.3 两种椭圆方程的相关结论

根据文献 [5—8] 给出的结论, 获得了两种椭圆方程的相关结论. 利用这些结论, 构造一类非线性发展方程 (7) 的无穷序列复合型双孤子新解.

$$\left(\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\left(z'(\xi)\right)^2=a+bz^2(\xi)+cz^4(\xi), \tag{36}$$

当 $A=4a$, $B=4b$ 和 $C=4c$ 时, 第一种椭圆方程 (36), 通过下列函数变换 (37) 式, 化为第二种椭圆方程 (38). 因此, 利用第一种椭圆方程 (36) 的相关结论, 获得第二种椭圆方程 (38) 相应的结论.

$$z^2(\xi)=y(\xi), \tag{37}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\left(y'(\xi)\right)^2$$
$$=Ay(\xi)+By^2(\xi)+Cy^3(\xi). \tag{38}$$

2.3.1 第一种椭圆方程的相关结论

情形 1 第一种椭圆方程的新解

根据 Jacobi 椭圆函数的周期性, 可以获得第一种椭圆方程的多种新解, 这里列出几种新解.

当 $a=1$, $b=-1-k^2$, $c=k^2$ 时, 第一种椭圆方程 (36) 有如下解:

$$z(\xi)=\begin{cases}\mathrm{sn}(\xi,k), & (4p-1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+3)K(k) \quad p\in Z,\\ -1, & \text{其他};\end{cases}\tag{39}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\leqslant(4p+1)K(k),\\ \mathrm{sn}(\xi,k), & (4p+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+3)K(k),\\ -1, & (4p+1)3K(k)\leqslant\xi;\end{cases}\tag{40}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}-1, & \xi\leqslant(4p+3)K(k),\\ \mathrm{sn}(\xi,k), & (4p+3)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+5)K(k),\\ 1, & (4p+5)K(k)\leqslant\xi \quad p\in Z.\end{cases}\tag{41}$$

当 $a=1-k^2$, $b=2k^2-1$, $c=-k^2$ 时, 第一种椭圆方程 (36) 有如下解:

$$z(\xi)=\begin{cases}\mathrm{cn}(\xi,k), & (4p+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+6)K(k),\\ -1, & \text{其他};\end{cases}\tag{42}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\leqslant 4pK(k),\\ \mathrm{cn}(\xi,k), & 4pK(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+2)K(k),\\ -1, & \xi\geqslant(4p+2)K(k);\end{cases}\tag{43}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}-1, & \xi\leqslant(4p+2)K(k),\\ \mathrm{cn}(\xi,k), & (4p+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(4p+4)K(k),\\ 1, & \xi\geqslant(4p+4)K(k).\end{cases}\tag{44}$$

当 $a=-1+k^2$, $b=2-k^2$, $c=-1$ 时, 第一种椭圆方程 (36) 有如下解:

$$z(\xi)=\begin{cases}\mathrm{dn}(\xi,k), & 2pK(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+2)K(k),\\ 1, & \text{其他};\end{cases}\tag{45}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\mathrm{dn}(\xi,k), & (2p+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+3)K(k),\\ \sqrt{1-k^2}, & \text{其他};\end{cases}\tag{46}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}\sqrt{1-k^2}, & \xi\leqslant(2p+1)K(k)\\ \mathrm{dn}(\xi,k), & (2p+1)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+2)K(k),\\ 1, & \xi\geqslant(2p+2)K(k);\end{cases}\tag{47}$$

$$z(\xi)=\begin{cases}1, & \xi\leqslant(2p+2)K(k),\\ \mathrm{dn}(\xi,k), & (2p+2)K(k)\leqslant\xi\leqslant(2p+3)K(k),\\ \sqrt{1-k^2}, & \xi\geqslant(2p+3)K(k).\end{cases}\tag{48}$$

这里

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\mathrm{d}x,\quad 0\leqslant k\leqslant 1.$$

第一种椭圆方程 (36) 有如下 Riemann θ 函数解 [9].

当 $a=\theta_4^2(0)\theta_2^2(0)$, $b=\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0)$, $c=-\theta_4^2(0)\theta_2^2(0)$ 时, 第一种椭圆方程 (36) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\theta_1(\xi)}{\theta_3(\xi)}.\tag{49}$$

当 $a=\theta_3^2(0)\theta_2^2(0)$, $b=-\big(\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)\big)$, $c=\theta_3^2(0)\theta_2^2(0)$ 时, 第一种椭圆方程 (36) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\theta_1(\xi)}{\theta_4(\xi)}. \tag{50}$$

当 $a=\theta_4^2(0)\theta_3^2(0)$, $b=\theta_3^4(0)+\theta_4^4(0)$, $c=\theta_4^2(0)\theta_3^2(0)$ 时, 第一种椭圆方程 (36) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\theta_1(\xi)}{\theta_2(\xi)}. \tag{51}$$

这里

$$\theta\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^*\end{pmatrix}(z,\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\Big\{\Big(n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big[\pi\mathrm{i}\tau\Big(n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)+2\Big(z+\frac{\varepsilon^*}{2}\Big)\Big]\Big\},$$

$\binom{\varepsilon}{\varepsilon^*}$ 是二维向量, n 为整数. 另外, $\theta_1(z)=\theta\binom{1}{1}(z;\tau)$, $\theta_2(z)=\theta\binom{1}{0}(z;\tau)$, $\theta_3(z)=\theta\binom{0}{0}(z;\tau)$, $\theta_4(z)=\theta\binom{0}{1}(z;\tau)$.

当 $b^2-4ac=0$ 时, 第一种椭圆方程 (36) 有如下解:

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2c}}\tan\Big(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}|\xi|\Big)\quad(b>0,c>0), \tag{52}$$

$$z(\xi)=\frac{\sqrt{-b}\big[1+\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\big]}{\sqrt{2c}\big[1-\exp(\sqrt{-2b}|\xi|)\big]}\quad(b<0,c>0). \tag{53}$$

情形2 第一种椭圆方程的Bäcklund变换

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆方程 (36) 的非常数解, 则 $z_n(\xi)$ 也是第一种椭圆方程 (36) 的解:

$$z_n(\xi)=\left[\frac{d+sz_{n-1}^2(\xi)}{-s+s\Big(-\dfrac{b}{a}+\dfrac{s}{d}\Big)z_{n-1}^2(\xi)}\right]^{1/2}\quad(n=1,2,\cdots), \tag{54}$$

这里 d 和 s 是不为零的任意常数; a 和 b 是第一种椭圆方程 (36) 的系数.

若 $z_{n-1}(\xi)$ 是第一种椭圆方程 (36) 的非常数解, 则下列 $z_n(\xi)$ 也是方程 (36) 的解:

$$z_n^2(\xi)=\mp\frac{2a+(b\pm\sqrt{b^2-4ac})z_{n-1}^2(\xi)}{\pm b+\sqrt{b^2-4ac}\pm 2cz_{n-1}^2(\xi)}\quad(n=1,2,\cdots), \tag{55}$$

这里 a, b 和 c 是第一种椭圆方程 (36) 的系数.

2.3.2 特殊的两种椭圆方程与Riccati方程的Bäcklund变换

当 $a=A=0$ 时, 两种椭圆方程 (36) 和 (38) 分别转化为如下常微分方程. 下面给出特殊两种椭圆方程与Riccati 方程的Bäcklund变换.

$$\Big(\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2=\big(z'(\xi)\big)^2=bz^2(\xi)+cz^4(\xi), \tag{56}$$

$$\Big(\frac{\mathrm{d}y(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\Big)^2=\big(y'(\xi)\big)^2=By^2(\xi)+Cy^3(\xi). \tag{57}$$

常微分方程 (56) 和 (57), 通过如下函数变换 (58) 和 (59) 转化为Riccati方程 (60) 和 (61):

$$z(\xi)=\frac{b-U^2(\xi)}{2\sqrt{c}U(\xi)}, \tag{58}$$

$$y(\xi)=\frac{B^2-2BV^2(\xi)+V^4(\xi)}{4CV^2(\xi)}, \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}U(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=U'(\xi)=\epsilon\big(U^2(\xi)+b\big)\ \Big(\epsilon=\pm\frac{1}{2}\Big), \tag{60}$$

$$\frac{\mathrm{d}V(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=V'(\xi)=\epsilon(V^2(\xi)-B)\ \Big(\epsilon=\pm\frac{1}{4}\Big). \tag{61}$$

2.4 Riccati方程的相关结论

情形1 Riccati方程的解

获得了Riccati方程 (62) 的如下解

$$Z'(\xi)=\frac{\mathrm{d}Z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=\alpha Z^2(\xi)+\beta, \tag{62}$$

$$Z(\xi)=-\frac{1}{\alpha}\sqrt{-\beta\alpha}\tanh(\sqrt{-\beta\alpha}\xi)\quad(\beta\alpha<0), \tag{63}$$

$$Z(\xi)=-\frac{1}{\alpha}\sqrt{-\alpha\beta}\coth(\sqrt{-\alpha\beta}\xi)\quad(\alpha\beta<0), \tag{64}$$

$$Z(\xi)=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha\beta}\tan(\sqrt{\alpha\beta}\xi)\quad(\alpha\beta>0), \tag{65}$$

$$Z(\xi)=-\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha\beta}\cot(\sqrt{\alpha\beta}\xi)\quad(\alpha\beta>0), \tag{66}$$

$$Z(\xi)=\big[\beta\big(d_1\exp(\sqrt{-4\alpha\beta}\xi)+d_2\big)\big]\times\Big[(\sqrt{-\alpha\beta})\big(d_1\exp(\sqrt{-4\alpha\beta}\xi)+d_2\big)-d_2\sqrt{-4\alpha\beta}\Big]^{-1}\quad(\alpha\beta<0), \tag{67}$$

$$Z(\xi)=\big\{\beta\big[d_1\cos(\sqrt{\alpha\beta}\xi)+d_2\sin(\sqrt{\alpha\beta}\xi)\big]\big\}\times\Big\{\sqrt{\alpha\beta}[d_2\cos(\sqrt{\alpha\beta}\xi)-d_1\sin(\sqrt{\alpha\beta}\xi)]\Big\}^{-1}\quad(\alpha\beta>0), \tag{68}$$

$$Z(\xi)=-\frac{1}{d_1+\alpha\xi}\quad(\beta=0), \tag{69}$$

这里 d_1, d_2 是任意常数.

情形2 Riccati方程的Bäcklund变换

若 $Z_{n-1}(\xi)$ 是Riccati方程 (62) 的非常数解, 则下列 $Z_n(\xi)$ 也是Riccati方程 (62) 的解:

$$Z_n(\xi)=\Big[-\beta F+(2\alpha E-2\beta G)Z_{n-1}(\xi)+F\alpha Z_{n-1}^2(\xi)\mp\sqrt{F^2-4(G+\alpha d)(E+\beta d)}$$

$$\times Z'_{n-1}(\xi)\Big] \times \Big(2\alpha\{E+\beta d+[F+(G+\alpha d) \times Z_{n-1}(\xi)]Z_{n-1}(\xi)\}\Big)^{-1}, \tag{70}$$

这里 E, F, G d, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是不全为零的任意常数.

情形3 Riccati方程解的非线性叠加公式

若 $Z_{n-1}(\xi)$, $Z_{n-2}(\xi)$, $Z_{n-3}(\xi)$ 是Riccati方程 (62) 的三个解, 则下面给出的 $Z_n(\xi)$ 也是Riccati方程 (62) 的解:

$$\begin{aligned} &Z_n(\xi)\\ =&\Big\{\beta N Z_{n-1}(\xi)-[\beta(L+N)+\beta H Z_{n-2}(\xi)\\ &+\beta K Z_{n-1}(\xi)]Z_{n-3}(\xi)+\varUpsilon(\xi)Z_{n-2}(\xi)\Big\}\\ &\times\Big\{\beta H Z_{n-1}(\xi)+[-\beta(K+H)+\alpha N Z_{n-2}(\xi)\\ &+\alpha L Z_{n-1}(\xi)]Z_{n-1}(\xi)+\varPsi(\xi)Z_{n-2}(\xi)\Big\}^{-1}, \end{aligned} \tag{71}$$

其中 $\varUpsilon(\xi) = \beta L + [\beta(K + H)]Z_{n-1}(\xi)$, $\varPsi(\xi) = [\beta K-\alpha(L+N)Z_{n-1}(\xi)]$; α, β, N, L, H, K, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是不全为零的任意常数.

以上已给出了第一种椭圆方程 (36) 的新解和Bäcklund变换, 以及两种椭圆方程的Bäcklund变换 (37). 因此, 通过Bäcklund变换 (37), 可以获得第二种椭圆方程 (38) 的新解和Bäcklund变换.

根据Riccati方程 (62) 的解、Bäcklund变换和解的非线性叠加公式, 获得Riccati方程 (60) 和 (61) 的相应的结论. 再通过关系式 (58) 和 (59), 获得特殊的两种椭圆方程 (56) 和 (57) 的相应结论.

3 一类非线性发展方程的无穷序列复合型双孤子新解

利用两种椭圆方程的相关结论, 构造一类非线性发展方程 (7) 的无穷序列复合型双孤子新解.

3.1 第一种椭圆方程与一类非线性发展方程 (7) 的无穷序列复合型双孤子新解

根据常数 c_1 和 c_2 的任意性, 在几种情形下, 用第一种椭圆方程 (20) 和 (21), 构造一类非线性发展方程 (7) 的无穷序列复合型双孤子新解 (这里列出几种解, 其余解未列出).

1) 当 $c_1c_2 \neq 0$ 时, 构造一类非线性发展方程 (7) 的无穷序列复合型双孤子新解.

情形1 两个Riemann θ 函数组成的无穷序列复合型双孤子新解.

通过下列叠加公式, 得到一类非线性发展方程 (7) 的Riemann θ 函数型无穷序列复合型双孤子新解.

$$\begin{cases} u_n(x,t)=\dfrac{1}{2}\big[(P_1)_n(\xi_1)+(Q_1)_n(\eta_1)\big] \quad (n=1,2,\cdots),\\ v_n(x,t)=\dfrac{1}{2}\big[(P_1)_n(\xi_1)-(Q_1)_n(\eta_1)\big] \quad (n=1,2,\cdots),\\ \mathrm{d}\xi_1=\big(-\lambda_1\mu_1+3\gamma_1\beta_2\lambda_1^2(P_1)_n^2\big)\mathrm{d}\tau_1, \quad \mathrm{d}\eta_1=\big(-\nu_1\omega_1+3\gamma_1\beta_2\nu_1^2(Q_1)_n^2\big)\mathrm{d}\zeta_1, \end{cases} \tag{72}$$

这里的 $(P_1)_n(\xi_1)$ 和 $(Q_1)_n(\eta_1)$ 由下列叠加公式来确定:

$$\begin{cases} (P_1)_n(\tau_1)=\left[\dfrac{d+s(P_1)_{n-1}^2(\tau_1)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_0}{a_0}+\dfrac{s}{d}\Big)(P_1)_{n-1}^2(\tau_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots),\\ (P_1)_0(\tau_1)=\dfrac{\theta_1(\tau_1)}{\theta_3(\tau_1)}, \quad a_0=\lambda_1^2c_1=\theta_4^2(0)\theta_2^2(0),\\ b_0=\lambda_1\mu_1\alpha_1=\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0), \quad c_0=-\dfrac{3}{2}\lambda_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=-\theta_4^2(0)\theta_2^2(0); \end{cases} \tag{73}$$

$$\begin{cases} (Q_1)_n(\zeta_1)=\left[\dfrac{d+s(Q_1)_{n-1}^2(\zeta_1)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_{01}}{a_{01}}+\dfrac{s}{d}\Big)(Q_1)_{n-1}^2(\zeta_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots),\\ (Q_1)_0(\zeta_1)=\dfrac{\theta_1(\zeta_1)}{\theta_4(\zeta_1)}, \quad a_{01}=\nu_1^2c_2=\theta_3^2(0)\theta_2^2(0),\\ b_{01}=\omega_1\nu_1\alpha_1=-\big(\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)\big), \quad c_{01}=-\dfrac{3}{2}\nu_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=\theta_3^2(0)\theta_2^2(0). \end{cases} \tag{74}$$

情形2 Riemann θ 函数与Jacobi椭圆函数组成的无穷序列复合型双孤子新解.

将下列叠加公式(75)—(78)式确定的解代入(72)式后得到一类非线性发展方程(7)的Riemann θ 函数与Jacobi椭圆函数组成的无穷序列复合型双孤子新解:

$$\begin{cases} (P_1)_n(\tau_1)=\left[\dfrac{d+s(P_1)^2_{n-1}(\tau_1)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_0}{a_0}+\dfrac{s}{d}\Big)(P_1)^2_{n-1}(\tau_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots), \\ (P_1)_0(\tau_1)=\dfrac{\theta_1(\tau_1)}{\theta_3(\tau_1)}, \quad a_0=\lambda_1^2c_1=\theta_4^2(0)\theta_2^2(0), \\ b_0=\lambda_1\mu_1\alpha_1=\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0), \quad c_0=-\dfrac{3}{2}\lambda_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=-\theta_4^2(0)\theta_2^2(0); \end{cases} \tag{75}$$

$$\begin{cases} (Q_1)_n(\zeta_1)=\left[\dfrac{d+s(Q_1)^2_{n-1}(\zeta_1)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_{01}}{a_{01}}+\dfrac{s}{d}\Big)(Q_1)^2_{n-1}(\zeta_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots), \\ (Q_1)_0(\zeta_1)=\mathrm{sn}(\zeta_1,k), \quad a_{01}=\nu_1^2c_2=1, \\ b_{01}=\omega_1\nu_1\alpha_1=-1-k^2, \quad c_{01}=-\dfrac{3}{2}\nu_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=k^2 \quad 0\leqslant k\leqslant 1; \end{cases} \tag{76}$$

$$\begin{cases} (P_1)_n(\tau_1)=\left[\dfrac{d+s(P_1)^2_{n-1}(\tau_1)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_0}{a_0}+\dfrac{s}{d}\Big)(P_1)^2_{n-1}(\tau_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots), \\ (P_1)_0(\tau_1)=\dfrac{\theta_1(\tau_1)}{\theta_3(\tau_1)}, \quad a_0=\lambda_1^2c_1=\theta_4^2(0)\theta_2^2(0), \\ b_0=\lambda_1\mu_1\alpha_1=\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0), \quad c_0=-\dfrac{3}{2}\lambda_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=-\theta_4^2(0)\theta_2^2(0); \end{cases} \tag{77}$$

$$\begin{cases} (Q_1)_n(\zeta_1)=\left[\dfrac{d+s(Q_1)^2_{n-1}(\zeta_1)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_{01}}{a_{01}}+\dfrac{s}{d}\Big)(Q_1)^2_{n-1}(\zeta_1)}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots), \\ (Q_1)_0(\zeta_1)=\begin{cases}\mathrm{sn}(\zeta_1,k), & (4p-1)K(k)\leqslant\zeta_1\leqslant(4p+3)K(k) \quad p\in Z, \\ -1, & \text{其他}, \end{cases} \\ a_{01}=\nu_1^2c_2=1, \quad b_{01}=\omega_1\nu_1\alpha_1=-1-k^2, \quad c_{01}=-\dfrac{3}{2}\nu_1^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=k^2, \quad 0\leqslant k\leqslant 1. \end{cases} \tag{78}$$

情形3 两个Jacobi椭圆函数组成的无穷序列复合型双孤子新解.

2) 当 $c_1=-\dfrac{\mu_1^2\alpha_1}{6\lambda_1^2\beta_2\gamma_1}$, $c_2=-\dfrac{\omega_1^2\alpha_1}{6\nu_1^2\beta_2\gamma_1}$ 时, 构造无穷序列复合型双孤子新解.

情形1 两个双曲函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形2 双曲函数与三角函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形3 双曲函数与有理函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形4 两个三角函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形5 三角函数与有理函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形6 两个有理函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

3) 当 $c_1=0$, $c_2\neq 0$ (或 $c_1\neq 0$, $c_2=0$) 时, 构造无穷序列复合型双孤子新解.

情形1 Riemann θ 函数解与双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形2 Riemann θ 函数解与三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形3 Riemann θ 函数解与有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形4 Jacobi椭圆函数解与双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形5 Jacobi椭圆函数解与三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形6 Jacobi椭圆函数解与有理函数解组

合的无穷序列复合型双孤子新解.

4) 当 $c_1=0,\ c_2=0$ 时, 构造无穷序列复合型双孤子新解.

情形 1 两个双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 2 双曲函数解与三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 3 双曲函数解与有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 4 两个三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 5 三角函数解与有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 6 两个有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

3.2 第二种椭圆方程与一类非线性发展方程 (7) 的无穷序列复合型双孤子新解

根据常数 c_3 和 c_4 的任意性, 分几种情形构造无穷序列复合型双孤子解 (这里列出几种解, 其余解未列出).

1) 当 $c_3c_4\neq 0$ 时, 构造一类非线性发展方程 (7) 的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 1 两个 Riemann θ 函数组成的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 2 Riemann θ 函数与 Jacobi 椭圆函数组成的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 3 两个 Jacobi 椭圆函数组成的无穷序列复合型双孤子新解.

$$\begin{cases} u_n(x,t)=\dfrac{1}{2}\Big\{\exp\Big[\displaystyle\int(P_2)_n(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\Big]+\exp\Big[\displaystyle\int(Q_2)_n(\eta_2)\mathrm{d}\eta_2\Big]\Big\}\ (n=1,2,\cdots),\\ v_n(x,t)=\dfrac{1}{2}\Big\{\exp\Big[\displaystyle\int(P_2)_n(\xi_2)\mathrm{d}\xi_2\Big]-\exp\Big[\displaystyle\int(Q_2)_n(\eta_2)\mathrm{d}\eta_2\Big]\Big\}\quad(n=1,2,\cdots),\\ \dfrac{\mathrm{d}(Y_2)_n}{\mathrm{d}\xi_2}=2(P_2)_n(Y_2)_n,\quad \mathrm{d}\xi_2=\lambda_2(3\gamma_1\beta_2\lambda_2(Y_2)_n-\mu_2)\mathrm{d}\tau_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}(X_2)_n}{\mathrm{d}\eta_2}=2(Q_2)_n(X_2)_n,\quad \mathrm{d}\eta_2=\nu_2(3\gamma_1\beta_2\nu_2(X_2)_n-\omega_2)\mathrm{d}\zeta_2. \end{cases}\tag{79}$$

这里的 $(P_2)_n(\xi_2)$ 和 $(Q_2)_n(\eta_2)$ 由下列叠加公式来确定:

$$\begin{cases} (Y_2)_n(\tau_2)=\dfrac{d+s(Y_2)^2_{n-1}(\tau_2)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_0}{a_0}+\dfrac{s}{d}\Big)(Y_2)^2_{n-1}(\tau_2)}\quad(n=1,2,\cdots),\\ (Y_2)_0(\tau_2)=\begin{cases}\mathrm{sn}^2(\tau_2,k), & 2nK(k)\leqslant\tau_2\leqslant 2K(k)(1+n)\quad n\in\mathbb{Z},\\ 0, & 其他,\end{cases}\\ a_0=4c_3\lambda_2^2=4,\quad b_0=4\alpha_1\mu_2\lambda_2=-4(1+k^2),\quad c_0=-6\lambda_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=4k^2; \end{cases}\tag{80}$$

$$\begin{cases} (X_2)_n(\zeta_2)=\dfrac{d+s(X_2)^2_{n-1}(\zeta_2)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_{01}}{a_{01}}+\dfrac{s}{d}\Big)(X_2)^2_{n-1}(\zeta_2)}\quad(n=1,2,\cdots),\\ (X_2)_0(\zeta_2)=\begin{cases}0, & \zeta_2\leqslant 2nK(k)-K(k)\quad n\in\mathbb{Z},\\ \mathrm{cn}^2(\zeta_2,k), & 2nK(k)-K(k)\leqslant\zeta_2\leqslant 2nK(k)\quad n\in\mathbb{Z},\\ 1, & \zeta_2\geqslant 2nK(k)\quad n\in\mathbb{Z},\end{cases}\\ a_{01}=4c_4\nu_2^2=4(1-k^2),\quad b_{01}=4\alpha_1\omega_2\nu_2=4(-1+2k^2),\quad c_{01}=-6\nu_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=-4k^2; \end{cases}\tag{81}$$

$$\begin{cases} (Y_2)_n(\tau_2)=\dfrac{d+s(Y_2)^2_{n-1}(\tau_2)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_0}{a_0}+\dfrac{s}{d}\Big)(Y_2)^2_{n-1}(\tau_2)}\quad(n=1,2,\cdots),\\ (Y_2)_0(\tau_2)=\mathrm{sn}^2(\tau_2,k),\\ a_0=4c_3\lambda_2^2=4,\quad b_0=4\alpha_1\mu_2\lambda_2=-4(1+k^2),\quad c_0=-6\lambda_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=4k^2; \end{cases}\tag{82}$$

$$\begin{cases}(X_2)_n(\zeta_2)=\dfrac{d+s(X_2)_{n-1}^2(\zeta_2)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_{01}}{a_{01}}+\dfrac{s}{d}\Big)(X_2)_{n-1}^2(\zeta_2)} \quad (n=1,2,\cdots)\\ (X_2)_0(\zeta_2)=\mathrm{cn}^2(\zeta_2,k),\quad a_{01}=4c_4\nu_2^2=4(1-k^2),\\ b_{01}=4\alpha_1\omega_2\nu_2=4(-1+2k^2),\quad c_{01}=-6\nu_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=-4k^2.\end{cases}\tag{83}$$

这里 $K(k)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\mathrm{d}x, 0\leqslant k\leqslant 1$; $\mathbb{Z}$表示整数集合.

2) 当 $c_3=-\dfrac{\alpha_1\mu^2}{6\lambda^2\beta_2\gamma_1}$, $c_4=-\dfrac{\alpha_1\omega^2}{6\nu^2\beta_2\gamma_1}$ 时, 构造无穷序列复合型双孤子新解.

情形1 两个指数函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

把叠加公式(84), (85)确定的解代入(79)式后得到一类非线性发展方程(7)的两个指数函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解:

$$\begin{cases}(Y_2)_n(\tau_2)=\dfrac{-a_0b_0-4a_0c_0(Y_2)_{n-1}(\tau_2)-b_0c_0(Y_2)_{n-1}^2(\tau_2)}{2a_0c_0+2b_0c_0(Y_2)_{n-1}(\tau_2)+2c_0^2(Y_2)_{n-1}^2(\tau_2)} \quad (n=1,2,\cdots),\\ (Y_2)_0(\tau_2)=\left\{\dfrac{\sqrt{-b_0}\Big[1+\exp\Big(\dfrac{\sqrt{-2b_0}}{2}|\tau_2|\Big)\Big]}{\sqrt{2c_0}\Big[1-\exp\Big(\dfrac{\sqrt{-2b_0}}{2}|\tau_2|\Big)\Big]}\right\}^2 \quad (c_0>0, b_0<0),\\ a_0=4c_3\lambda_2^2,\quad b_0=4\alpha_1\mu_2\lambda_2,\quad c_0=-6\lambda_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1;\end{cases}\tag{84}$$

$$\begin{cases}(X_2)_n(\zeta_2)=\dfrac{-a_{01}b_{01}-4a_{01}c_{01}(X_2)_{n-1}(\zeta_2)-b_{01}c_{01}(X_2)_{n-1}^2(\zeta_2)}{2a_{01}c_{01}+2b_{01}c_{01}(X_2)_{n-1}(\zeta_2)+2c_{01}^2(X_2)_{n-1}^2(\zeta_2)} \quad (n=1,2,\cdots),\\ (X_2)_0(\zeta_2)=\left\{\dfrac{\sqrt{-b_{01}}\Big[1+\exp\Big(\dfrac{\sqrt{-2b_{01}}}{2}|\zeta_2|\Big)\Big]}{\sqrt{2c_{01}}\Big[1-\exp\Big(\dfrac{\sqrt{-2b_{01}}}{2}|\zeta_2|\Big)\Big]}\right\}^2 \quad (c_{01}>0,\quad b_{01}<0),\\ a_{01}=4c_4\nu_2^2,\quad b_{01}=4\alpha_1\omega_2\nu_2,\quad c_{01}=-6\nu_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1.\end{cases}\tag{85}$$

情形2 指数函数与三角函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形3 指数函数与有理函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形4 两个三角函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形5 三角函数与有理函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

情形6 两个有理函数组成的尖峰形式的无穷序列复合型双孤子新解.

3) 当 $c_3=0$, $c_4\neq 0$ (或 $c_3\neq 0$, $c_4=0$) 时, 构造无穷序列复合型双孤子新解.

情形1 Riemann θ 函数解与双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形2 Riemann θ 函数解与三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形3 Riemann θ 函数解与有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形4 Jacobi 椭圆函数解与双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

把叠加公式(86), (87)确定的解代入(79)式后得到一类非线性发展方程(7)的Jacobi椭圆函数解与双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解:

$$\begin{cases}(Y_2)_n(\tau_2)=\dfrac{d+s(Y_2)_{n-1}^2(\tau_2)}{-s+s\Big(-\dfrac{b_0}{a_0}+\dfrac{s}{d}\Big)(Y_2)_{n-1}^2(\tau_2)}\\ \qquad (n=1,2,\cdots),\\ (Y_2)_0(\tau_2)=\mathrm{sn}^2(\tau_2,k),\\ a_0=4c_3\lambda_2^2=4,\\ b_0=4\alpha_1\mu_2\lambda_2=-4(1+k^2),\\ c_0=-6\lambda_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1=4k^2,\end{cases}\tag{86}$$

$$\begin{cases}(X_2)_n(\zeta_2)=\dfrac{B^2-2BV_n^2(\zeta_2)+V_n^4(\zeta_2)}{4CV_n^2(\zeta_2)}\\ \qquad\qquad(n=1,2,\cdots),\\ V_n(\zeta_2)=\Big[-\beta F+(2\alpha E-2\beta G)V_{n-1}(\zeta_2)\\ \qquad\qquad+F\alpha V_{n-1}^2(\zeta_2)\\ \qquad\qquad\mp\sqrt{F^2-4(G+\alpha d)(E+\beta d)}V'_{n-1}(\zeta_2)\Big]\\ \qquad\qquad\times\Big\{2\alpha\big[E+\beta d+[F+(G+\alpha d)\\ \qquad\qquad\times V_{n-1}(\zeta_2)]V_{n-1}(\zeta_2)\big]\Big\}^{-1},\\ V_0(\zeta_2)=-\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{-\beta\alpha}\tanh(\sqrt{-\beta\alpha}\zeta_2)\quad(\beta\alpha<0),\\ \alpha=\dfrac{1}{4},\quad\beta=-\dfrac{1}{4}B,\quad B=4\alpha_1\omega_2\nu_2,\\ C=-6\nu_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1,\end{cases}\tag{87}$$

这里 E, F, G, d, $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 是不全为零的任意常数.

情形 5 Jacobi 椭圆函数解与三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 6 Jacobi 椭圆函数解与有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

4) 当 $c_3=0$, $c_4=0$ 时, 构造无穷序列复合型双孤子新解.

情形 1 两个双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

把叠加公式 (88), (89) 确定的解代入 (79) 式后得到一类非线性发展方程 (7) 的 Jacobi 椭圆函数解与双曲函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解:

$$\begin{cases}(Y_2)_n(\tau_2)=\dfrac{b_0^2-2b_0(V_1)_n^2(\tau_2)+(V_1)_n^4(\tau_2)}{4c_0(V_1)_n^2(\tau_2)}\quad(n=1,2,\cdots),\\ (V_1)_n(\tau_2)=\Big[-\beta_0F+(2\alpha_0E-2\beta_0G)(V_1)_{n-1}(\tau_2)+F\alpha_0(V_1)_{n-1}^2(\tau_2)\\ \qquad\qquad\mp\sqrt{F^2-4(G+\alpha_0d)(E+\beta_0d)}(V_1)'_{n-1}(\tau_2)\Big]\\ \qquad\qquad\times\Big\{2\alpha_0\big[E+\beta_0d+[F+(G+\alpha_0d)(V_1)_{n-1}(\tau_2)](V_1)_{n-1}(\tau_2)\big]\Big\}^{-1},\\ (V_1)_0(\tau_2)=-\dfrac{1}{\alpha_0}\sqrt{-\beta_0\alpha_0}\tanh(\sqrt{-\beta_0\alpha_0}\tau_2)\quad(\beta_0\alpha_0<0),\\ \alpha_0=\dfrac{1}{4},\quad\beta_0=-\dfrac{1}{4}b_0,\quad b_0=4\alpha_1\mu_2\lambda_2,\quad c_0=-6\lambda_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1,\end{cases}\tag{88}$$

$$\begin{cases}(X_2)_n(\zeta_2)=\dfrac{B^2-2B(V_2)_n^2(\zeta_2)+(V_2)_n^4(\zeta_2)}{4C(V_2)_n^2(\zeta_2)}\qquad(n=1,2,\cdots),\\ (V_2)_n(\zeta_2)=\Big[-\beta F+(2\alpha E-2\beta G)(V_2)_{n-1}(\zeta_2)+F\alpha(V_2)_{n-1}^2(\zeta_2)\\ \qquad\qquad\mp\sqrt{F^2-4(G+\alpha d)(E+\beta d)}(V_2)'_{n-1}(\zeta_2)\Big]\\ \qquad\qquad\times\Big\{2\alpha\big[E+\beta d+[F+(G+\alpha d)(V_2)_{n-1}(\zeta_2)](V_2)_{n-1}(\zeta_2)\big]\Big\}^{-1},\\ (V_2)_0(\zeta_2)=-\dfrac{1}{\alpha}\sqrt{-\beta\alpha}\tanh(\sqrt{-\beta\alpha}\zeta_2)\quad(\beta\alpha<0),\\ \alpha=\dfrac{1}{4},\quad\beta=-\dfrac{1}{4}B,\quad B=4\alpha_1\omega_2\nu_2,\quad C=-6\nu_2^2\alpha_1\beta_2\gamma_1,\end{cases}\tag{89}$$

这里 E, F, G, d, $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 是不全为零的任意常数.

情形 2 双曲函数解与三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 3 双曲函数解与有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 4 两个三角函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 5 三角函数解与有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

情形 6 两个有理函数解组合的无穷序列复合型双孤子新解.

4 结　论

辅助方程法, 在构造非线性发展方程的精确解领域已获得了以下 4 个特点的新解 [9–22], 但是未能获得无穷序列双孤子解: 1) 单函数型有限多个单孤

子解; 2) 复合函数型有限多个单孤子解; 3) 单函数型无穷序列单孤子解; 4) 复合函数型无穷序列单孤子解.

文献[1—4]研究了非线性发展方程(1)—(6), 并获得了新结论. 文献[4]获得了非线性发展方程(2)的由椭圆函数与双曲函数组合的有限多个双孤子新解. 文献[5—8]用达布变换法与双线性法等求解方法, 获得了一些非线性发展方程的单函数组成的多孤子解, 但是, 未获得多个函数组成的复合型多孤子解.

本文在文献[1—8]的基础上, 利用辅助方程与函数变换相结合的方法, 获得了一类非线性发展方程(7)的无穷序列复合型双孤子新解. 首先, 给出了一类非线性发展方程(7)存在无穷序列复合型双孤子新解的条件. 然后, 通过函数变换与三种辅助方程的相关结论, 构造了一类非线性发展方程(7)的无穷序列复合型双孤子新解. 这些解包括了由Riemann θ 函数、Jacobi椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数两两组合的复合型双孤子新解. 这些解的物理意义有待于进一步研究.

非线性发展方程(2)的系数 $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 1$, $\alpha_3 = \beta_3 = 3$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1/6$满足存在复合型双孤子解的条件 $\alpha_3 = 3\alpha_2$, $\beta_3 = 3\beta_2$, $\beta_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \gamma_1$, $\alpha_2 = \beta_2$. 因此, 能够获得Riemann θ函数、Jacobi椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数两两组合的复合型双孤子新解. 这些解包含了文献[5]获得的结论.

参考文献

[1] Schäfer T, Wayne C E 2004 *Physica D* **196** 90
[2] Pietrzyk M, Kanattšikov I, Bandelow U 2008 *J. Nonlinear Math. Phys.* **15** 162
[3] Sakovich S 2008 *J. Phys. Soc. Jpn.* **77** 123001
[4] Rui W G 2013 *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.* **18** 2678
[5] Sun W R, Tian B, Jiang Y, Zhen H L 2014 *Annals. Phys.* **343** 215
[6] Wang Y F, Tian B, Li M, Wang P, Wang M 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **19** 1783
[7] Zuo D W, Gao Y T, Meng G Q, Shen Y J, Yu X 2014 *Nonlinear Dyn.* **75** 701
[8] Sun Z Y, Gao Y T, Yu X, Liu Y 2013 *Phys. Lett. A* **377** 3283
[9] Taogetusang, Bai Y M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 060201 (in Chinese) [套格图桑, 白玉梅 2012 物理学报 **61** 060201]
[10] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 949
[11] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M 2010 *Chin. Phys.* **19** 080303
[12] Taogetusang 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050201 (in Chinese) [套格图桑 2011 物理学报 **60** 050201]
[13] Wang J M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080201 (in Chinese) [王军民 2012 物理学报 **61** 080201]
[14] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 940
[15] Li Z L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 4074
[16] Chen Y, Li B, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 135
[17] Zhang L, Zhang L F, Li C Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 403
[18] Xie F D, Gao X S 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 353
[19] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Chin. Phys.* **15** 1143
[20] Li D S, Zhang H Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* **40** 143
[21] Xu G Q, Li Z B 2003 *Commun. Theor. Phys.* **39** 39
[22] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett. A* **372** 417

New complexion two-soliton solutions of a class of nonlinear evolution equation*

Taogetusang† Yi Li-Na

(*The College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China*)

(Received 2 July 2014; revised manuscript received 2 September 2014)

Abstract

New infinite sequence complexion two-soliton solutions of a kind of nonlinear evolution equation are constructed with the help of function transformations and two kinds of elliptic equations. Step one，according to two function transformations, a kind of nonlinear evolution equation is changed into a nonlinear ordinary differential equation of second order. Step two, using function transformation, the nonlinear ordinary differential equation of second order is transformed into a set of nonlinear ordinary differential equations of first order, and the first integral of the set of equations is obtained. Finally, the first integral with new solutions and Bäcklund transformation of two kinds of elliptic equations are used to search for new infinite sequence complexion two-soliton solutions of a kind of nonlinear evolution equation.

Keywords: nonlinear evolution equation, function transformation, first integral, complexion two-soliton solutions

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.64.020201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11361040) and the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZY12031).

† Corresponding author. E-mail: tgts@imnu.edu.cn