物理学报 Acta Physica Sinica
Chinese Physical Society
Institute of Physics, CAS

横向各向同性固体材料中含定向非均匀体的有效弹性模量

许松　唐晓明　苏远大

Effective elastic modulus of a transverse isotropy solid with aligned inhomogeneity

Xu Song　Tang Xiao-Ming　Su Yuan-Da

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 64, 206201 (2015)　DOI: 10.7498/aps.64.206201
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.206201
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I20

横向各向同性固体材料中含定向非均匀体的有效弹性模量*

许松 唐晓明 苏远大†

(中国石油大学 (华东) 地球科学与技术学院, 青岛 266580)

(2014 年 12 月 21 日收到; 2015 年 3 月 27 日收到修改稿)

针对含定向非均匀体的横向各向同性复合材料 (即 TI 介质), 采用球形有效体散射等效的方法, 根据 TI 材料下的 D, N_{ij} 表达式, 对横向各向同性条件下 Eshelby 张量的积分通用表达式进行化简, 推导出了复合材料的具有横向各向同性特性的有效弹性模量的表达式, 并依此进行了数值分析. 计算结果表明: 利用本方法计算的有效模量随非均匀体含量的增大而减小; 定向排列的非均匀体影响横向各向同性介质的固有各向异性, 水平指向的非均匀体会增大材料的横向各向同性, 模拟结果对评价含非均匀体各向异性介质的特征具有指导意义.

关键词: 横向各向异性, 定向排列, 非均匀体, 有效模量

PACS: 62.20.de, 91.60.Ba, 81.05.Rm, 91.55.Ax **DOI:** 10.7498/aps.64.206201

1 引 言

多相复合材料的有效弹性模量研究一直是人们比较关心的问题, 尤其是在地球岩石弹性性质的模拟方面更是如此, 孔隙介质的弹性波理论一直是非常重要的研究课题. 针对弹性波在孔隙介质中的传播特性与引起的电特性已有相关的报道 [1,2]. 此外, 地球表面的岩石介质含有大量的非均匀体 (如孔隙和裂隙), 非均匀体的定向分布可以引起地层的各向异性 [3−5], 从而对声波在地层中的传播产生重要影响. 因此, 对地层各向异性, 尤其是对横向各向同性 (transverse isotropy, TI) 的研究分析对地震勘探和声波测井领域具有极为重要的意义 [6−11]. Eshelby [12] 就非均匀体对基质的弹性性质的影响进行了研究, 给出了椭球形非均匀体的弹性场解. Walsh [13] 对球形孔隙与细长裂隙的可压缩性进行了对比分析. O'Connel 和 Budiansky [14−18] 指出裂隙的存在会在外力作用下产生挤喷流现象. Kuster 和 Toksöz [19] 基于一阶弹性波散射理论推导出了含非均匀体介质材料的有效弹性模量公式, 得到双相介质有效模型 (K-T 模型). 在 Biot [20−22] 孔隙介质波动理论基础上, Tang 等 [23,24] 提出一种含孔隙、裂隙介质弹性波动的统一理论, 具体分析了孔隙与裂隙之间的挤喷流效应. 但 Kuster 与 Tang 讨论的是随机取向的非均匀体, 没有考虑非均匀体定向排列对各向异性的影响. 应用比较广泛的有效介质模型, 如 Gassman 模型 [25], Budiansky [26] 和 Hill [27] 的自洽模型 (SCA)、微分有效模型 (DEM) [28−30], Xu-White [31] 模型等针对的均是各向同性介质, 也未考虑各向异性的影响.

对于非均匀体定向引起各向异性情况, 国际上已有的有效介质模型包括 Hudson 模型 [3,32], Eshelby-Cheng 模型 [33] 及 Schoenberg 模型 [34−36]. 国内学者也针对此类问题进行了相关研究. 孔丽云等 [37,38] 针对裂隙诱导 HTI (horizontal transverse

∗ 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2014CB239006)、国家自然科学基金 (批准号: 41474092, 41174088) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: 14CX06076A) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: syuanda@sina.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

isotropic) 双孔隙介质的裂缝参数及波场特性进行了相关分析. 张广智等[39]和陈怀震等[40]提出适用于裂缝型碳酸盐岩的岩石物理模型, 并进行了理论分析. 宋永佳和胡恒山[41]基于弹性波散射理论, 针对含指向定向的非均匀体的复合材料, 利用球形有效体等效散射的方法给出了具有TI特性的有效弹性模量表达式. 值得注意的是, 该方法计算简便且精度高, 将K-T模型推广到了各向异性情况. 但以上所述的研究仅适用于背景基质为各向同性的复合材料, 对于页岩、泥岩或泥质砂岩等背景基质为复杂的各向异性情况, 此类方法不再适用.

在已有的各向异性有效介质模型中, 应用比较广泛的有Hornby模型[42]和Brown-Korringa[43]模型(B-K模型). 结合SCA与DEM模型, Hornby提出页岩TI有效介质模型, 用于预测具有横向各向同性特性页岩的有效弹性性质, 但由于自洽理论的局限性, 该方法只适用于高频测试结果. Sarout和Guéguen[44,45]基于Hornby模型, 对页岩进行了实验研究和理论分析. Brown和Korringa将Gassman模型推广到各向异性情况, 用于评价干燥各向异性岩石和饱和流体有效弹性张量之间的关系, 但需要岩石骨架的弹性刚度张量作为参考.

本文旨在前人研究基础上, 提出一种简便、适用性强且精度高的评价各向异性有效介质的方法. 基于球形有效体等效散射的方法, 在横向各向同性材料中引入定向排列的非均匀体. 通过推导椭球形非均匀体在各向异性材料中的Eshelby张量, 修正了有效弹性模量在各向异性地层中的表达式. 通过数值模拟分析了该模型随非均匀体形态及不同填充物的影响, 提出定向非均匀体影响材料的各向异性的假设, 并通过数值模拟进行验证. 模拟结果对于评价裂隙地层各向异性的变化有着理论指导意义.

2 TI介质定向非均匀体的弹性波理论

实际材料往往具有一定的各向异性, 横向各向同性介质作为最普遍的各向异性模型, 在地震勘探与人工合成材料方面有着重要应用. TI材料中往往存在非均匀体, 例如地层中的页岩就是强各向异性介质, 其中往往存在裂隙, 在应力的作用下这些裂隙往往是定向排列的; 很多情况下, 油气就存储在这些定向排列的裂隙中; 此外, 在人工合成材料时, 往往在具有各向异性材料中添加定向的非均匀体, 使得复合材料具有一定的特性, 但同时在一定程度上也影响了横向各向同性材料的性质. 根据上述介质特征, 我们在横向各向同性材料中引入定向排列的非均匀体, 并考察因此而造成的介质弹性性质的变化. 图1给出了含定向非均匀体的TI模型示意图, 在各向异性基质中引入定向的各向同性的非均匀体. 椭球形非均匀体半轴$a = a_1 = a_2 \neq a_3$, 定义$\gamma = a_3/a$为纵横比. 非均匀体的裂隙密度ε、非均匀体占有的体积分数c表达式

$$\varepsilon = \begin{cases} Na_1^3/V, & \gamma \leqslant 1, \\ Na_3^3/V, & \gamma > 1, \end{cases} \tag{1}$$

$$c = \begin{cases} 4/(3\pi\varepsilon\gamma), & \gamma \leqslant 1, \\ 4/(3\pi\varepsilon/\gamma^2), & \gamma > 1, \end{cases} \tag{2}$$

其中, N表示在体积为V的区域内的非均匀体的个数.

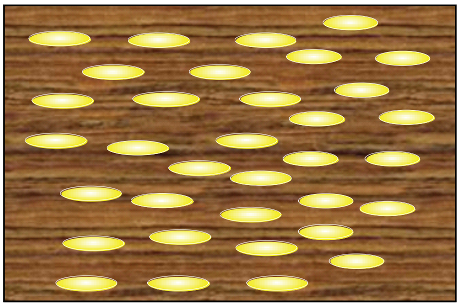

图1 (网刊彩色) 含定向非均匀体的横向各向同性模型

Fig. 1. (color online) Transversely isotropic compound model containing aligned ellipsoidal inhomogeneities.

宋永佳和胡恒山[41]基于弹性波散射理论, 考察了在各向同性介质中引入定向排列的非均匀体特性. 其研究表明: 非均匀体定向指向, 可导致等效介质呈现横向各向同性的有效弹性模量. 其研究思路为抽取一块包含有非均匀体的球形体区域作为有效体, 将非均匀体的散射等效为球形有效体的散射, 将求得的球形有效体模量等效为材料的有效模量. 本文采用其研究思路, 将非均匀体引入到各向异性基质中, 通过求取各向异性介质中非均匀体的Eshelby张量, 考察定向排列非均匀体在各向异性介质的特性.

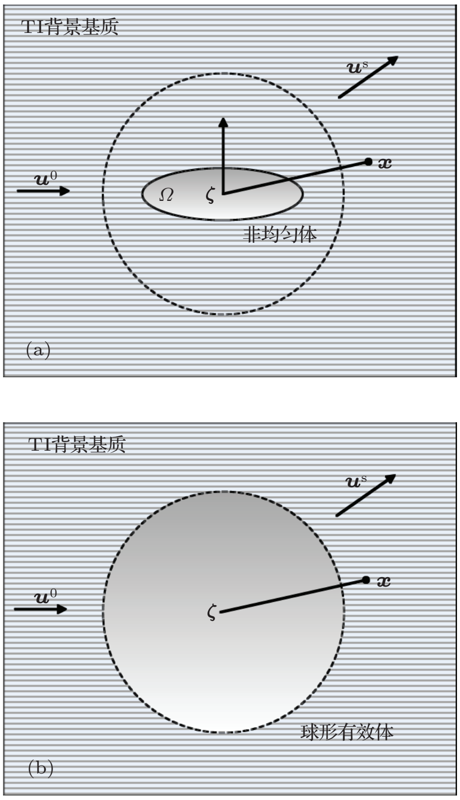

图2 弹性波散射示意图 (a) 非均匀体散射; (b) 球形有效体散射

Fig. 2. The schematic diagram of elastic-wave scattering: (a) ellipsoidal inhomogeneity scattering; (b) sphere-equivalency of effective scattering.

将图1中的模型抽象成简单的数学物理模型, 选取包含非均匀体的球形区域作为有效体, 如图2所示. 其中, 非均匀体体积占有效球体体积分数可近似为c. 类似于各向同性介质的情况, 各向异性介质中椭球形非均匀体和球形有效体的散射位移场表达式[46,47]分别如下:

$$u_k(\boldsymbol{x}) = V\bigg[\Delta\rho\omega^2 u_i^0(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{G}_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta}) - \Delta L_{ijpq}\boldsymbol{U}_{pqrs}e_{rs}^0\frac{\partial \mathrm{G}_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})}{\partial\zeta_j}\bigg], \tag{3}$$

$$u_k^*(\boldsymbol{x}) = V^*\bigg[\Delta\rho^*\omega^2 u_i^0(\boldsymbol{\zeta})\,\mathrm{G}_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta}) - \Delta L_{ijpq}^*\boldsymbol{U}_{pqrs}^*e_{rs}^0\frac{\partial \mathrm{G}_{ki}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})}{\partial\zeta_j}\bigg], \tag{4}$$

其中, u_k和u_k^*分别表示非均匀体和有效体的散射位移场; V和V^*分别表示非均匀体与球形有效体的体积; $\Delta\rho$和$\Delta\rho^*$分别表示非均匀体和有效体与TI基质的密度差; ω为角频率; u_i^0为小体积散射子元的内部位移, 近似于无散射子之时的位移; G_{ki}为格林函数; 四阶张量$\boldsymbol{U}_{pqrs}$与非均匀体指向有关; ΔL_{ijpq}和ΔL_{ijpq}^*分别表示非均匀体和有效体与TI基质的弹性模量差

$$\begin{aligned}\Delta L_{ijpq} &= L_{ijpq} - L_{ijpq}^{\mathrm{TI}},\\ \Delta L_{ijpq}^* &= L_{ijpq}^* - L_{ijpq}^{\mathrm{TI}},\end{aligned} \tag{5}$$

其中, L_{ijpq}为非均匀体的弹性模量, L_{ijpq}^{TI}为TI基质的弹性模量, L_{ijpq}^{TI}与弹性常数C_{ij}^{TI}之间具有一定转换关系, L_{ijpq}^*为待求的有效弹性模量.

张量$\boldsymbol{U}$与应变集中张量$\boldsymbol{T}$满足坐标变换关系: $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}$; $\boldsymbol{T}$的表达式为[48] $\boldsymbol{T} = \big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{C}^{\mathrm{TI}})^{-1}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{TI}})\big]^{-1}$. 类似地, 对于球形有效体, 宏观系与有效体坐标系是重合的, 因此, $\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{T}^* = \big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}^*\,(\boldsymbol{C}^{\mathrm{TI}})^{-1}(\boldsymbol{C}^* - \boldsymbol{C}^{\mathrm{TI}})\big]^{-1}$. 其中, $\boldsymbol{I}$为四阶单位张量, $\boldsymbol{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$; $\boldsymbol{S}$ 和$\boldsymbol{S}^*$分别为非均匀体和球形有效体的Eshelby张量; $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^*$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{TI}}$分别表示非均匀体、球形有效体及基质的弹性常数.

宋永佳和胡恒山考虑的是各向同性介质的情况, 与前人的工作不同, 对于背景基质为各向异性的情况, Eshelby张量的求解较为复杂. 有关TI基质下Eshelby张量表达式的求解目前已有相关工作, 但其精度受裂隙形态的限制[49], 或积分表达过于繁琐[50−53]. 我们从本征应变入手, 由格林函数得到总应变, 结合希尔极化张量求出背景基质为TI时的非均匀体的Eshelby张量, 具体的求导过程比较冗繁, 放在附录A中给出. 该张量的表达式如下

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{ijkl} = {}& L_{mnkl}\frac{a_1a_2a_3}{4\pi}\int_{\hat{S}} H_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})\\ &\times\Big[(a_1\xi_1)^2 + (a_2\xi_2)^2 + (a_3\xi_3)^2\Big]^{-3/2}\\ &\times D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned} \tag{6}$$

对于球形有效体, $a_1 = a_2 = a_3$, Eshelby张量的表达式为

$$\boldsymbol{S}_{ijkl}^* = L_{mnkl}\frac{1}{4\pi}\int_{\hat{S}} H_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}). \tag{7}$$

将非均匀体的散射等效于球形有效体的散射, 即令(3)与(4)式中的位移场相等, 结合(1)—(7)式, 化简得到TI背景介质的含定向非均匀体的有效弹性模量表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^* = {}& \boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}} + c\Big\{\boldsymbol{I} - c(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}})\boldsymbol{P}^{-1}\\ &\times\big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}})^{-1}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}})\big]^{-1}\\ &\times\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}^*(\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}})^{-1}\Big\}^{-1}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}})\boldsymbol{P}^{-1}\\ &\times\big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}})^{-1}(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}})\big]^{-1}\boldsymbol{P}.\end{aligned} \tag{8}$$

若非均匀体局部系与宏观系一致,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{*}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}+c\Big\{&\boldsymbol{I}-c\left(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}\right)\\&\times\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}\right)\right]^{-1}\\&\times\boldsymbol{S}^{*}\left(\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}\right)^{-1}\Big\}^{-1}\left(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}\right)\\&\times\left[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{TI}}\right)\right]^{-1}.\end{aligned}\tag{9}$$

3 模拟结果

为了对比引入定向排列的非均匀体后对横向各向同性材料的影响, 我们选取一横向各向同性介质, 介质的对称轴为竖直方向且具有20%的各向异性, 具体参数见表1. 由横向各向同性TI 介质的Chistoffel方程给出该介质的平面波的慢度图, 如图3(a)所示, 90°方向为对称轴的方向. 模拟可知, 准P波与准SH平面波慢度在0°水平方向与90°垂直方向上有明显差异, 体现了介质的各向异性特征. 在介质中引入定向非均匀体, 裂隙密度ε为0.15, 纵横比γ大小为0.10, 该非均匀体长轴的指向平行于水平面, 非均匀体的模量参数由表1给出. 图3(b)为引入非均匀体后的平面波慢度图, 模拟结果表明, 裂隙的存在使得平面波慢度增大; 水平方向与垂直方向的准P波与准SH慢度差异变大, 且水平方向准SH波与准SV波慢度差异也变大, 表明水平排列的裂隙使得TI材料各向异性进一步增大. 这一现象符合客观物理规律, 可用于解释裂隙地层中的各向异性变化.

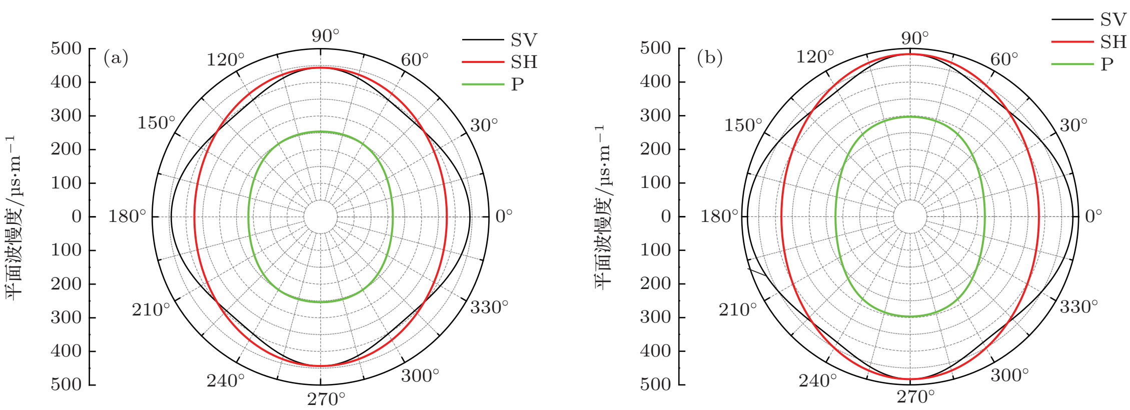

图3 (网刊彩色) 介质平面波慢度 (a) 横向各向同性介质计算结果; (b) 含定向非均匀体的横向各向同性介质结算结果

Fig. 3. (color online) The slowness surfaces for the three modes: (a) Transversely isotropic media; (b) transversely isotropic media containing aligned ellipsoidal inhomogeneities.

表1 含定向非均匀体的横向各向同性复合材料的基本参数在各图中的计算取值

Table 1. Numeration parameters of transversely isotropic compound material containing aligned ellipsoidal inhomogeneities.

参数	图3(a)	图3(b)	图4	图5(a)	图5(b)	图6
C_{11}/GPa	57.624	57.624	57.624	81.367	81.367	57.624
C_{33}/GPa	41.160	41.160	41.160	81.367	81.367	41.160
C_{13}/GPa	14.200	14.200	14.200	16.167	16.167	14.200
C_{44}/GPa	13.480	13.480	13.480	32.600	32.600	13.480
C_{66}/GPa	18.872	18.872	18.872	32.600	32.600	18.872
K_f/GPa	—	2.9	2.9	0	2.20	0
μ_f/GPa	—	2.7	2.7	0	0	0
ρ_s/kg·m^{-3}	2650	2650	2650	2650	2650	—
ρ_f/kg·m^{-3}	—	1250	1250	1.293	1000	—
ε	—	0.15	0.05	0.10	0.10	0—0.5
γ	—	0.10	0.10	0.01	0.01	10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10, 10^{2}

进一步研究非均匀体排列方向与基质各向异性取向之间方位变化, 利用与材料宏观系有关的张量$\boldsymbol{U}$ 与非均匀体的局部系有关的张量$\boldsymbol{T}$之间的坐标转换, 模拟了不同非均匀体指向是介质有效弹性模量的变化规律, 模拟结果如图4所示, 裂隙密度ε为0.05, 纵横比γ大小为0.10, 具体模拟参数由表1给出. 通过模拟可知, 在指向为0°, 即非均匀体短轴方向平行于背景基质对称轴方向时, $C_{11} = C_{22}$, $C_{44} = C_{55}$, $C_{13} = C_{23}$, 满足VTI介质弹性模量之间的关系; 当角度增大时, 与水平向波传播有关的C_{11}, C_{66}逐渐减小, 而与垂直向波传播有关的C_{33}, C_{44} 逐渐增大; 这种变化在90°时最为明显, 此时, 非均匀体的排列使得介质各向异性减小, 体现在C_{11}与C_{33}, C_{44}与C_{66}之间的差异与0°时相比要小, 当非均匀体的含量增多时, 甚至会使得介质固有的各向异性消失.

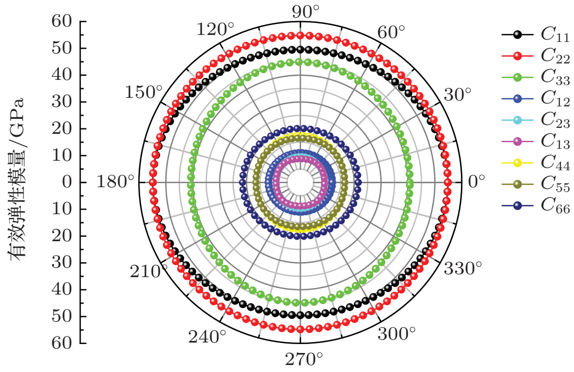

图4 (网刊彩色) 不同非均匀体排列方位下介质的有效模量变化

Fig. 4. (color online) The effective moduli of different aligned ellipsoidal inhomogeneities.

为了验证本文理论, 对宋永佳和胡恒山[41] "各向同性" 介质非均匀体模型和结果进行了对比. 图5给出了定向排列的干燥非均匀体与含水非均匀体的平面波慢度, 具体参数由表1给出. 模拟结果与文献[41]中的结果一致, 验证了本方法的可靠性.

为了研究裂隙形态对有效模量的影响, 图6给出了在不同裂隙纵横比情况下的有效模量随裂隙密度的变化规律, 裂隙为干燥状态, 具体参数由表1给出. 由模拟结果可知, 随裂隙密度的增大, 介质的有效弹性模量减小, 直到模量减小为零, 材料崩溃; 对于扁状裂隙($\gamma < 1$), 裂隙增多主要使得C_{33}, C_{13}降低, 而对C_{11}, C_{66}影响很小, 这与均质背景材料含定向非均匀体的变化规律是相似的(见文献[41]). 对于细长裂隙($\gamma > 1$), 随裂隙增多, 所有模量均减小, 其中C_{11}, C_{66}最为敏感. 相比于均质材料, 背景介质为TI材料时, 随扁状裂隙增多, C_{33}, C_{13}, C_{44}变化不大, 而C_{11}, C_{66}对裂隙的敏感度增大.

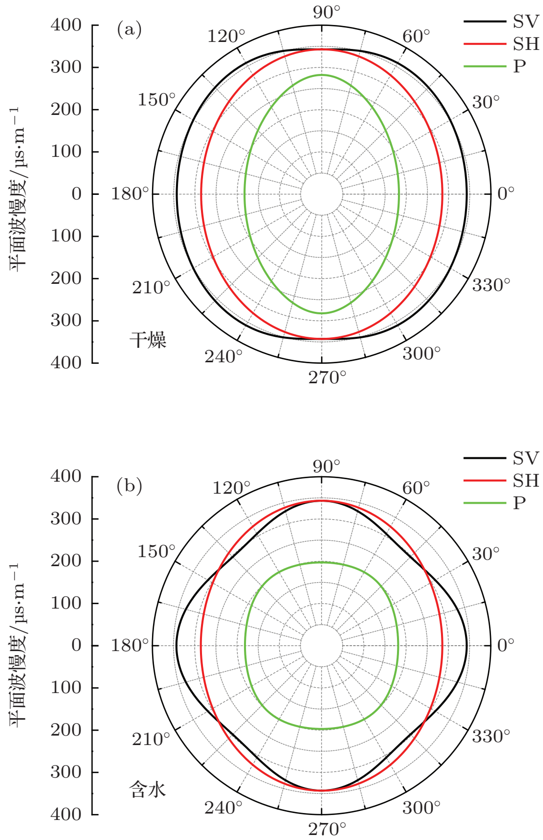

图5 (网刊彩色) 基质退化各向同性介质的平面波慢度 (a) 非均匀体干燥情况计算结果; (b) 非均匀体饱含水情况计算结果

Fig. 5. (color online) The slowness surfaces for the three modes of propagation in an isotropic media containing aligned ellipsoidal inhomogeneties: (a) Inhomogeneity is dry; (b) inhomogeneity contains water.

4 结 论

基于球形有效体等效散射方法, 本文推导出了横向各向同性介质中含定向非均匀体复合材料的有效模量. 该理论分析表明, 介质模量随裂隙含量的增加而减小, 符合客观规律; 定向排列裂隙的指向对各向异性也有很大的影响. 相对于已有的理论, 该理论更适用于较高裂隙含量的情况、计算简便且精度高, 对于评价解释含裂隙地球岩石各向异性的变化有一定的理论指导意义.

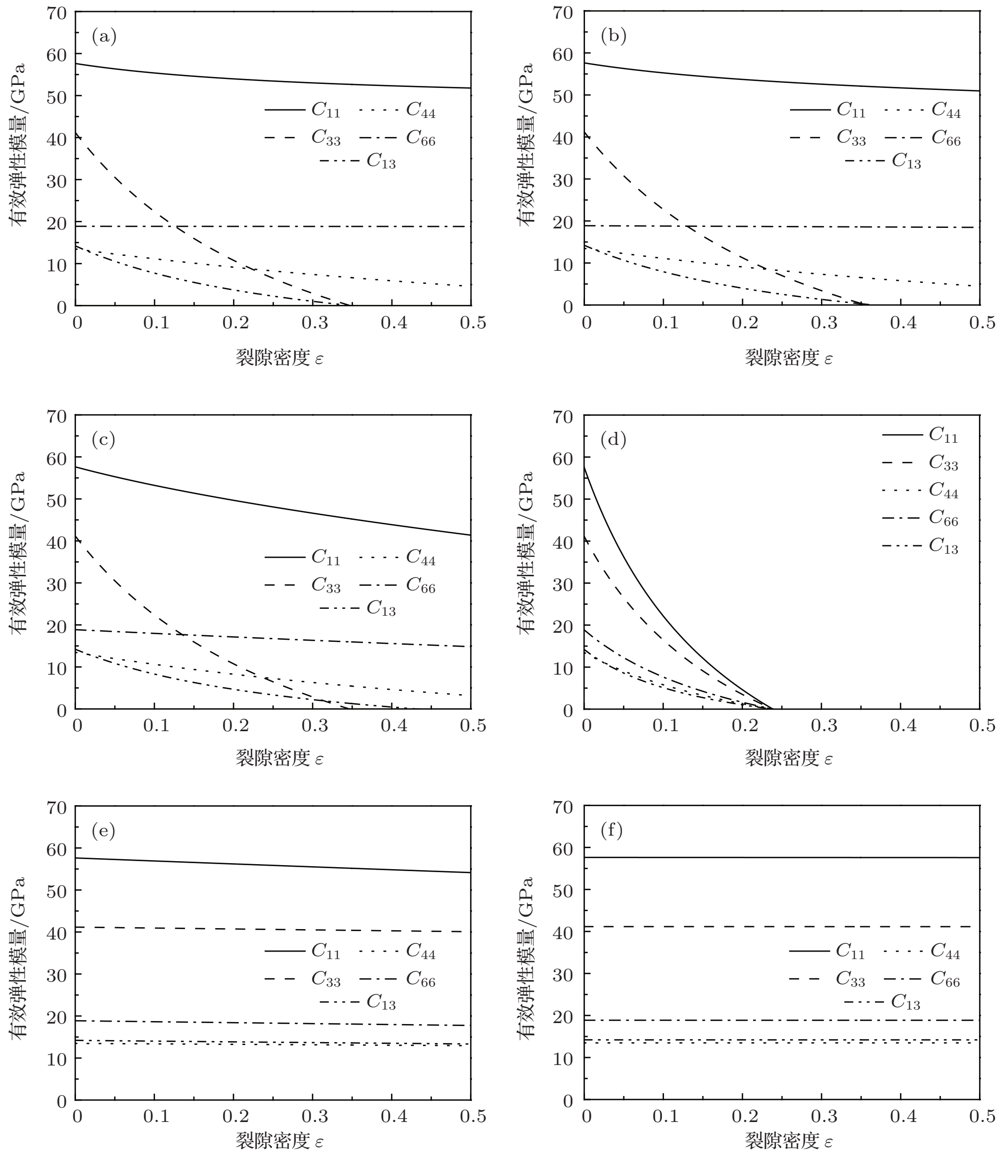

图6　随裂隙密度变化的弹性模量　(a) 裂隙纵横比 $\gamma = 0.001$; (b) 裂隙纵横比 $\gamma = 0.01$; (c) 裂隙纵横比 $\gamma = 0.1$; (d) 裂隙纵横比 $\gamma = 1$; (e) 裂隙纵横比 $\gamma = 10$; (f) 裂隙纵横比 $\gamma = 100$

Fig. 6. Simulation of the effective moduli with varied crack density: (a) Crack aspect ratio $\gamma = 0.001$; (b) crack aspect ratio $\gamma = 0.01$; (c) crack aspect ratio $\gamma = 0.1$; (d) crack aspect ratio $\gamma = 1$; (e) crack aspect ratio $\gamma = 10$; (f) crack aspect ratio $\gamma = 100$.

但本方法也有不足和需要改进的方面, 由于介质的复杂性, 各向异性材料中的Eshelby张量只给出了积分表达式, 还有待进一步研究, 将其解析式求解出来.

感谢哈尔滨工业大学航天科学与力学系胡恒山教授的指导与建议.

附录A　背景基质各向异性情况下Eshelby张量推导

弹性模量为 L_{ijkl} 的背景基质内夹杂的非均匀体 (inclusion) $\boldsymbol{\Omega}$ 可以表述为

$$\boldsymbol{\Omega} = \{x_1, x_2, x_3; (x_1/a_1)^2 + (x_2/a_2)^2 + (x_3/a_3)^2 \leqslant 1\}. \tag{A1}$$

设非均匀体的本征应变 (eigenstrain) 为 ε'_{ij}:

$$\varepsilon'_{ij}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \varepsilon'_{ij}, & x \subset \Omega, \\ 0, & x \not\subset \Omega. \end{cases} \tag{A2}$$

由格林函数公式可得到总应变 ε_{ij} (total strain) 的表达式:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x}) = L_{klmn}\varepsilon'_{mn}P^{\Omega}_{ijkl}(\boldsymbol{x}), \tag{A3}$$

其中,

$$P_{ijkl}^{\Omega}\left(\boldsymbol{x}\right)=\frac{1}{4}\int_{\Omega}\frac{\partial^{2}\mathrm{G}_{ki}^{\infty}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}{\partial x_{j}\partial y_{l}}+\frac{\partial^{2}\mathrm{G}_{kj}^{\infty}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}{\partial x_{i}\partial y_{l}}+\frac{\partial^{2}\mathrm{G}_{li}^{\infty}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}{\partial x_{j}\partial y_{k}}+\frac{\partial^{2}\mathrm{G}_{lj}^{\infty}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)}{\partial x_{i}\partial y_{k}}\mathrm{d}V\left(\boldsymbol{y}\right),$$

$\mathrm{G}_{kj}^{\infty}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ 为无限域格林函数.

由 Eshelby 张量的定义 $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{x})=S_{ijkl}(\boldsymbol{x})\varepsilon'_{kl}$, 以及 (A3) 可得

$$S_{ijkl}\left(\boldsymbol{x}\right)=L_{mnkl}P_{ijmn}^{\Omega}\left(\boldsymbol{x}\right). \tag{A4}$$

给出希尔极化张量 $\boldsymbol{P}_{ijkl}$ (Hill polarization tensor) 的具体表达式 [48]

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}_{ijkl}=P_{ijkl}^{\Omega}(\boldsymbol{x})\\&=\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{4\pi}\int_{\hat{S}}H_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})a^{-3}D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),\\&\boldsymbol{x}\subset\Omega,\end{aligned}\tag{A5}$$

其中, 该积分是在单位球面进行曲面积分, 如图 (a1) 所示, 表达式

$$a=\sqrt{\left(a_{1}\hat{\xi}_{1}\right)^{2}+\left(a_{2}\hat{\xi}_{2}\right)^{2}+\left(a_{3}\hat{\xi}_{3}\right)^{2}},$$

其中,

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|=\boldsymbol{\xi}/\sqrt{\xi_{1}^{2}+\xi_{2}^{2}+\xi_{3}^{2}},$$

由于该积分是在单位球面进行积分, 因此 $\xi_{1}^{2}+\xi_{2}^{2}+\xi_{3}^{2}=1$. a 的表达式可简化为

$$a=\sqrt{\left(a_{1}\xi_{1}\right)^{2}+\left(a_{2}\xi_{2}\right)^{2}+\left(a_{3}\xi_{3}\right)^{2}}. \tag{A6}$$

$H_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})=N_{ik}(\boldsymbol{\xi})\xi_{j}\xi_{l}+N_{jk}(\boldsymbol{\xi})\xi_{i}\xi_{l}+N_{il}(\boldsymbol{\xi})\xi_{j}\xi_{k}+N_{jl}(\boldsymbol{\xi})\xi_{i}\xi_{k}$, 对于背景基质为TI材料, 其 N_{mn} 与 D 表达式为

$$\begin{aligned}D(\boldsymbol{\xi})=&\left(C_{66}\eta^{2}+C_{44}\xi_{3}^{2}\right)\left[\left(C_{44}\eta^{2}+C_{33}\xi_{3}^{2}\right)\right.\\&\left.\times\left(C_{11}\eta^{2}+C_{44}\xi_{3}^{2}\right)-\left(C_{13}+C_{44}\right)^{2}\eta^{2}\xi_{3}^{2}\right],\\N_{11}(\boldsymbol{\xi})=&\left(C_{66}\xi_{1}^{2}+C_{11}\xi_{2}^{2}+C_{44}\xi_{3}^{2}\right)\left(C_{44}\eta^{2}+C_{33}\xi_{3}^{2}\right)\\&-\left(C_{13}+C_{44}\right)^{2}\xi_{2}^{2}\xi_{3}^{2},\\N_{22}(\boldsymbol{\xi})=&\left(C_{11}\xi_{1}^{2}+C_{66}\xi_{2}^{2}+C_{44}\xi_{3}^{2}\right)\left(C_{44}\eta^{2}+C_{33}\xi_{3}^{2}\right)\\&-\left(C_{13}+C_{44}\right)\xi_{1}^{2}\xi_{3}^{2},\\N_{33}(\boldsymbol{\xi})=&\left(C_{11}\xi_{1}^{2}+C_{66}\xi_{2}^{2}+C_{44}\xi_{3}^{2}\right)\left(C_{66}\xi_{1}^{2}+C_{11}\xi_{2}^{2}\right.\\&\left.+C_{44}\xi_{3}^{2}\right)-\left(C_{11}-C_{66}\right)^{2}\xi_{1}^{2}\xi_{2}^{2},\\N_{12}(\boldsymbol{\xi})=&N_{21}(\boldsymbol{\xi})=\left(C_{13}+C_{44}\right)^{2}\xi_{1}\xi_{2}\xi_{3}^{2}\\&-\left(C_{11}-C_{66}\right)\xi_{1}\xi_{2}\left(C_{44}\eta^{2}+C_{33}\xi_{3}^{2}\right),\\N_{13}(\boldsymbol{\xi})=&N_{31}(\boldsymbol{\xi})=\left(C_{11}-C_{66}\right)\left(C_{13}+C_{44}\right)\xi_{1}\xi_{2}^{2}\xi_{3}\\&-\left(C_{13}+C_{44}\right)\xi_{1}\xi_{3}\left(C_{66}\xi_{1}^{2}+C_{11}\xi_{2}^{2}+C_{44}\xi_{3}^{2}\right),\\N_{23}(\boldsymbol{\xi})=&N_{32}(\boldsymbol{\xi})=\left(C_{13}+C_{44}\right)\xi_{2}\xi_{3}\left[\left(C_{11}-C_{66}\right)\xi_{1}^{2}\right.\\&\left.-\left(C_{11}\xi_{1}^{2}+C_{66}\xi_{2}^{2}+C_{44}\xi_{3}^{2}\right)\right],\end{aligned}\tag{A7}$$

其中, $\eta^{2}=\xi_{1}^{2}+\xi_{2}^{2}$.

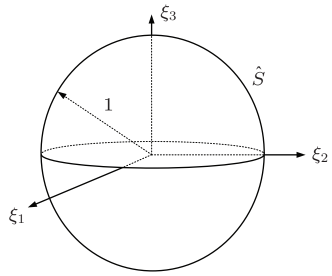

图 a1　单位球示意图

Fig. a1. The schematic diagram of unit sphere.

结合 (A4)—(A7) 式, 可得背景基质为TI地层的 Eshelby 张量的表达式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{ijkl}=&L_{mnkl}\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{4\pi}\int_{\hat{S}}H_{ijkl}(\boldsymbol{\xi})\\&\times\left[\left(a_{1}\xi_{1}\right)^{2}+\left(a_{2}\xi_{2}\right)^{2}+\left(a_{3}\xi_{3}\right)^{2}\right]^{-3/2}\\&\times D^{-1}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}\tag{A8}$$

给出张量 $\boldsymbol{S}$ 的详细表达式

$$\begin{aligned}&S_{1111}=S_{2222}\\&=\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{\pi}\int_{\hat{S}}\xi_{1}(\alpha\tau(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{1}+(\alpha-2\alpha_{1})\varpi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{2}\\&+(\varphi_{1}-\varphi)\vartheta(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})z)/\psi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),\\&S_{1122}=S_{2211}\\&=\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{\pi}\int_{\hat{S}}\xi_{1}((\alpha-2\alpha_{1})\tau(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})x+\alpha\varpi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{2}\\&+(\varphi_{1}-\varphi)\vartheta(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})z)/\psi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),\\&S_{1133}=S_{2233}\\&=\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{\pi}\int_{\hat{S}}\xi_{1}((\varphi_{1}-\varphi)\tau(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{1}\\&+(\varphi_{1}-\varphi)\varpi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{2}\\&+\beta\vartheta(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{3})/\psi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),\\&S_{3311}=S_{3322}\\&=\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{\pi}\int_{\hat{S}}\xi_{3}(\alpha\vartheta(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{1}+(\alpha-2\alpha_{1})\vartheta(\xi_{2},\xi_{1},\xi_{3})\xi_{2}\\&+(\varphi_{1}-\varphi)\varsigma(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{3})/\psi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),\\&S_{3333}\\&=\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{\pi}\int_{\hat{S}}\xi_{3}((\varphi_{1}-\varphi)\vartheta(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{1}\\&+(\varphi_{1}-\varphi)\vartheta(\xi_{2},\xi_{1},\xi_{3})\xi_{2}\\&+\beta\varsigma(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{3})/\psi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),\\&S_{1212}=S_{2121}=S_{1221}=S_{2112}\\&=\frac{a_{1}a_{2}a_{3}}{2\pi}\int_{\hat{S}}\alpha_{1}(\tau(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{2}^{2}+2\varpi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\xi_{1}\xi_{2}\\&+\tau(\xi_{2},\xi_{1},\xi_{3})\xi_{1}^{2})/\psi(\xi_{1},\xi_{2},\xi_{3})\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),\\&S_{1313}=S_{2323}=S_{1331}=S_{2332}=S_{3113}=S_{3131}\\&=S_{3223}=S_{3232}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{a_1a_2a_3}{2\pi}\int_{\hat{S}} & \varphi(\tau(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_3^2 + 2\vartheta(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_1\xi_3 \\
& + \varsigma(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\xi_1^2)/\psi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\,\mathrm{d}\hat{S}(\boldsymbol{\xi}),
\end{aligned}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
\tau(x,y,z) &= (\alpha y^2 + \alpha_1 x^2 + \varphi z^2)(\beta z^2 + (x^2+y^2)\varphi) \\
&\quad - \varphi_1^2 y^2 z^2, \\
\varpi(x,y,z) &= \varphi_1^2 xyz^2 - (\alpha-\alpha_1)xy(\beta z^2 + (x^2+y^2)\varphi), \\
\vartheta(x,y,z) &= ((\alpha-\alpha_1)\varphi_1 xy^2 z - \varphi_1 xz(\alpha y^2 + \alpha_1 x^2 + \varphi z^2)), \\
\varsigma(x,y,z) &= (\alpha x^2 + \alpha_1 y^2 + \varphi z^2)(\alpha y^2 + \alpha_1 x^2 + \varphi z^2) \\
&\quad - (\alpha-\alpha_1)^2 x^2 y^2, \\
\psi(x,y,z) &= (\alpha_1(x^2+y^2) + \varphi z^2)((\beta z^2 + (x^2+y^2)\varphi) \\
&\quad \times (\alpha(x^2+y^2) + \varphi z^2) - \varphi_1^2 (x^2+y^2) z^2) \\
&\quad \times (a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2 + a_3^2, z^2)^{3/2},
\end{aligned}
$$

其中, 参数 β, α, φ, α_1, φ_1 与背景基质弹性模量有关:

$$
\begin{aligned}
&\beta = C_{33}^{\mathrm{TI}} = L_{3333}^{\mathrm{TI}}, \quad \alpha = C_{11}^{\mathrm{TI}} = L_{1111}^{\mathrm{TI}}, \\
&\varphi = C_{44}^{\mathrm{TI}} = L_{2323}^{\mathrm{TI}} + L_{2332}^{\mathrm{TI}}, \\
&\alpha_1 = C_{66}^{\mathrm{TI}} = L_{1212}^{\mathrm{TI}} + L_{1222}^{\mathrm{TI}}, \\
&\varphi_1 = C_{44}^{\mathrm{TI}} + C_{13}^{\mathrm{TI}} = L_{2323}^{\mathrm{TI}} + L_{2332}^{\mathrm{TI}} + L_{1133}^{\mathrm{TI}}.
\end{aligned}
$$

Mura [54] 在1973年给出了椭球形非均匀体在各向异性介质中Eshelby张量表达式, 并公式的推导过程进行了详细的描述, 给出不同非均匀体下Eshelby张量各元素的结果. 本文根据TI材料下的 D, N_{ij} 表达式, 对Eshelby张量的积分通用表达式进行化简展开. 两者区别在于, Mura 给出的表达式 G_{ijkl} 要得到 $\boldsymbol{S}_{ijkl}$ 还需要进一步进行张量求解, 而本文直接给出了 $\boldsymbol{S}_{ijkl}$ 的积分表达式, 且积分表达式也相对较为简便.

将背景基质与TI有关的5个弹性模量参数退化为各向同性的2个参数, 可将 $\boldsymbol{S}$ 表达式退化为背景基质各向同性情况下Eshelby张量 [55,56].

参考文献

[1] Xu S, Su Y D, Chen X L, Tang X M 2014 *Chin. J. Geophys.* **57** 1999 (in Chinese) [许松, 苏远大, 陈雪莲, 唐晓明 2014 地球物理学报 **57** 1999]

[2] Hu H S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1954 (in Chinese) [胡恒山 2003 物理学报 **52** 1954]

[3] Hudson J A 1981 *Geophys. J. Int.* **64** 13

[4] Crampin S 1984 *Geophys. J. Int.* **76** 135

[5] Crampin S 1985 *Geophysics* **50** 142

[6] Tang X 2003 *Geophysics* **68** 118

[7] Sinha B K, Norris A N, Chang S K 1994 *Geophysics* **59** 1037

[8] He X, Hu H 2009 *Geophysics* **74** E149

[9] White J E, Tongtaow C 1981 *J. Acoust. Soc. Am.* **70** 1147

[10] Zhang B, Dong H, Wang K 1994 *J. Acoust. Soc. Am.* **96** 2546

[11] Li X Q, Chen H, He X, Wang X M, Cong J S 2013 *Chin. J. Geophys.* **56** 3212 (in Chinese) [李希强, 陈浩, 何晓, 王秀明, 丛健生 2013 地球物理学报 **56** 3212]

[12] Eshelby J D 1957 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **241** 376

[13] Walsh J B 1965 *J. Geophys. Res.* **70** 381

[14] O'Connell R J, Budiansky B 1974 *J. Geophys. Res.* **79** 5412

[15] Budiansky B, O'connell R J 1976 *Int. J. Solids Structures* **12** 81

[16] O'Connell R J, Budiansky B 1977 *J. Geophys. Res.* **82** 5719

[17] Budiansky B, O'Connell R J 1980 *Solid Earth Geophys. Geotech.* **42** 1

[18] O'Connell R J 1984 *Physics and Chemistry of Porous Media* **107** 166

[19] Kuster G T, Toksöz M N 1974 *Geophysics* **39** 587

[20] Biot M A 1956 *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 168

[21] Biot M A 1956 *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 179

[22] Biot M A 1962 *J. Acoust. Soc. Am.* **34** 1254

[23] Tang X 2011 *Sci. China: Earth Sci.* **41** 784 (in Chinese) [唐晓明 2011 中国科学: 地球科学 **41** 784]

[24] Tang X M, Chen X L, Xu X K 2012 *Geophysics* **77** D245

[25] Gassmann F 1951 *Über Die Elastizität Poröser Medien: Vierteljahrss-chrift Der Naturforschenden* (Zurich: Gesellschaft) pp1–23

[26] Budiansky B 1965 *J. Mech. Phys. Solids* **13** 223

[27] Hill R 1965 *J. Mech. Phys. Solids* **13** 213

[28] Cleary M P, Lee S M, Chen I W 1980 *J. Engrg. Mech. Div.* **106** 861

[29] Norris A N, Sheng P, Callegari A J 1985 *J. Appl. Phys.* **57** 1990

[30] Zimmerman R W 1991 *Compressibility of Sandstones* (New York: Elsevier) pp10–40

[31] Xu S, White R E 1995 *Geophys. Prospect.* **43** 91

[32] Hudson J A 1980 *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **88** 371

[33] Cheng C H 1993 *J. Geophys. Res.* **98** 675

[34] Schoenberg M 1980 *The J. Acoust. Soc. Am.* **68** 1516

[35] Schoenberg M 1983 *Geophys. Prospect.* **31** 265

[36] Schoenberg M, Sayers C M 1995 *Geophysics* **60** 204

[37] Kong L Y, Wang Y B, Yang H Z 2012 *Chin. J. Geophys.* **55** 189 (in Chinese) [孔丽云, 王一博, 杨慧珠 2012 地球物理学报 **55** 189]

[38] Kong L Y, Wang Y B, Yang H Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 139101 (in Chinese) [孔丽云, 王一博, 杨慧珠 2013 物理学报 **62** 139101]

[39] Zhang G Z, Chen H Z, Wang Q, Yin X Y 2013 *Chin. J. Geophys.* **56** 1707 (in Chinese) [张广智, 陈怀震, 王琪, 印星耀 2013 地球物理学报 **56** 1707]

[40] Chen H Z, Yin X Y, Zhang J Q, Zhang G Z 2014 *Chin. J. Geophys.* **57** 3431 (in Chinese) [陈怀震, 印兴耀, 张金强, 张广智 2014 地球物理学报 **57** 3431]

[41] Song Y J, Hu H S 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 016202 (in Chinese) [宋永佳, 胡恒山 2014 物理学报 **63** 016202]

[42] Hornby B E, Schwartz L M, Hudson J A 1994 *Geophysics* **59** 1570
[43] Brown R J S, Korringa J 1975 *Geophysics* **40** 608
[44] Sarout J, Guéguen Y 2008 *Geophysics* **73** D75
[45] Sarout J, Guéguen Y 2008 *Geophysics* **73** D91
[46] Mal A K, Knopoff L 1967 *IMA J. Appl. Math.* **3** 376
[47] Miles J W 1960 *Geophysics* **25** 642
[48] Qu J, Cherkaoui M 2006 *Fundamentals of Micromechanics of Solids* (New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.) p87
[49] Zhu Y, Liu E 2011 *SEG Annual Meeting* San Antonio, Texas, September 18–23, 2011 SEG-2011-2216
[50] Kinoshita N, Mura T 1971 *Phys. Stat. Sol.* **5** 759
[51] Lin S C, Mura T 1973 *Phys. Stat. Sol.* **15** 281
[52] Walpole L J 1977 *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **81** 283
[53] Withers P J 1989 *Philos. Mag. A* **59** 759
[54] Mura T 1987 *Micromechanics of Defects in Solids* (Springer Science & Business Media) pp129
[55] David E C, Zimmerman R W 2011 *Int. J. Solids Structures* **48** 680
[56] Kachanov M L, Shafiro B, Tsukrov I 2003 *Handbook of Elasticity Solutions* (Berlin: Springer) pp242–243

Effective elastic modulus of a transverse isotropy solid with aligned inhomogeneity*

Xu Song Tang Xiao-Ming Su Yuan-Da†

(*School of Geosciences, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China*)

(Received 21 December 2014; revised manuscript received 27 March 2015)

Abstract

The effective modulus of transversely isotropic compound material containing aligned ellipsoidal inhomogeneity is derived using the method of sphere-equivalency of effective scattering. Based on this approach, we derive the integral solution of the Eshelby tensor for the anisotropic medium, allowing for numerically evaluating the effects of anisotropy for the solution. The numerical results show that the effective modulus of the medium decreases monotonically with increasing the concentration of the inhomogeneties. The anisotropy increases if the inhomogeneity alignment direction is perpendicular to the TI symmetry axis of the background medium. By reducing the numbers of matrix elastic modulus from 5 to 2, we calculate the slowness surfaces for the three modes of propagation in an isotropic medium containing aligned ellipsoidal inhomogeneity. The results are the same as the existing ones, which validates the exactness of our theory. The modeling results can be used to evaluate elastic property of an anisotropic medium with aligned inclusions, such as earth formation shale rocks containing aligned cracks.

Keywords: transverse anisotropy, directional alignment, inhomogeneity, effective modulus

PACS: 62.20.de, 91.60.Ba, 81.05.Rm, 91.55.Ax **DOI:** 10.7498/aps.64.206201

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2014CB239006), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41474092, 41174088), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 14CX06076A).

† Corresponding author. E-mail: syuanda@sina.com