

一种忆感器模型及其振荡器的动力学特性研究

袁方 王光义 靳培培

Study on dynamical characteristics of a meminductor model and its meminductor-based oscillator

Yuan Fang Wang Guang-Yi Jin Pei-Pei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 210504 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.210504

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210504>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I21>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

电感电流伪连续导电模式下 Buck 变换器的动力学建模与分析

Dynamical modeling and analysis of buck converter operating in pseudo-continuous conduction mode

物理学报.2015, 64(18): 180501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.180501>

基于有源广义忆阻的无感混沌电路研究

Inductorless chaotic circuit based on active generalized memristors

物理学报.2015, 64(17): 170503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.170503>

混沌信号的压缩感知去噪

Chaotic signal denoising in a compressed sensing perspective

物理学报.2015, 64(16): 160502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160502>

基于数模混合的混沌映射实现

Chaotic map implementation based on digital-analog hybrid method

物理学报.2015, 64(16): 160501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.160501>

基于对偶数理论的资料同化新方法

A new data assimilation method based on dual-number theory

物理学报.2015, 64(13): 130502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.130502>

## 一种忆感器模型及其振荡器的动力学特性研究\*

袁方 王光义† 靳培培

(杭州电子科技大学射频电路与系统教育部重点实验室; 现代电路与智能信息研究所, 杭州 310018)

(2015年4月17日收到; 2015年6月26日收到修改稿)

忆感器是在忆阻器基础上定义的一种新型记忆电路元件. 在实际忆感器尚未实现的情况下, 为探索忆感器及其在非线性电路中的特性, 提出了一种忆感器数学模型和电路模型. 基于该模型设计了一个非线性振荡电路, 采用理论分析、仿真分析和实验验证的方法研究了忆感器模型的特性及其在电路中的动力学规律. 分岔分析表明, 在适当的参数下忆感器会使电路产生周期和混沌振荡. 设计了实现忆感器模型及其振荡器的模拟电路, 实验验证了忆感器模型和振荡器的特性, 实验结果与理论分析完全一致.

关键词: 忆感器, 振荡器, 混沌

PACS: 05.45.-a, 05.45.Jn, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.64.210504

## 1 引言

忆阻器的概念早在1971年就被Chua<sup>[1]</sup>所提出, 但直到2008年HP实验室利用纳米技术物理实现了忆阻器<sup>[2]</sup>之后, 对于忆阻器及其各种应用电路才得到了广泛的研究. 随着忆阻器的物理实现, Ventra等进一步拓展了记忆元件的范围<sup>[3]</sup>, 提出了两种新型记忆元件的概念: 忆容器(memcapacitor)与忆感器(meminductor).

由于忆阻器、忆感器和忆容器是在纳米尺度下的电路器件, 其最大优点在于无需提供电源即可存储信息, 可应用于非遗失性存储以及学习、适应和自发行为的仿真等领域<sup>[3]</sup>. 因此, 它们在非线性电路中的应用也得到了人们的广泛关注. 基于忆阻器的仿真建模以及忆阻器应用电路的研究有着大量的文献报道, 其中的忆阻器模型包括设定的分段线性、二次或三次光滑函数、HP实际忆阻器等<sup>[4-9]</sup>. 与忆阻器振荡器相比, 目前对忆容器和忆感器振荡器的研究还较少<sup>[10-12]</sup>, 主要原因是相对忆阻器而言, 忆容器与忆感器的实际物理器件尚未实现, 其数学模型和电路模型还不够完善, 对他们在非线性

电路中的特性的了解还不多.

尽管尚未出现实际的忆感器元件, 但其预期的极具应用价值的特性已引起人们的高度重视. 相对于忆阻器应用电路的诸多文献报道, 对于忆感器的研究文献还相对较少. Pershin研究团队与Bialek研究团队报道了忆阻、忆容和忆感器三种记忆元件的建模研究成果<sup>[13-16]</sup>. 文献<sup>[17]</sup>通过光敏电阻, 利用忆感器和忆阻器的转换关系, 设计了一种磁控忆感器的实用等效电路模型, 利用该模型进行了正弦和三角波激励下忆感器和RC串联电路的理论实验研究. 文献<sup>[18]</sup>提出了一种忆阻器, 忆容器与忆感器三者相互转换的方法, 即通过忆阻器设计忆容器的等效电路, 再由忆容器设计忆感器的等效电路, 并分别对忆容器与忆感器的等效电路进行了理论分析与仿真验证. 文献<sup>[19]</sup>则提出了一种不依赖于忆阻器转换关系的磁控忆感器硬件仿真器, 并对该仿真器的特性与性能进行了实验分析. 文献<sup>[20]</sup>在几个纳米尺度的薄膜上利用自旋霍尔磁电阻效应 (spin Hall magnetoresistance effect) 实现了一种等效忆感器, 并在文中展示了该忆感器的非易失记忆性与存储磁通量的能力. 文献<sup>[21]</sup>利

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61271064, 60971046, 61401134)、浙江省自然科学基金 (批准号: LZ12F01001, LQ14F010008) 和浙江省重点科技创新团队 (批准号: 2010R50010) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wanggyi@163.com

用分数阶微分设计一个描述忆阻、忆容和忆感器的模型, 并给出了三者相应的仿真结果. 文献 [22] 介绍了一种忆感器模型, 并研究了在直流信号, 正弦信号和周期信号电流激励下忆感器的不同特性响应. 文献 [23] 提出了一种荷控忆感器模型, 设计了相应的等效电路并给出了 SPICE 仿真结果. 最近文献 [24] 则给出了忆阻、忆容和忆感器的物理分析, 并分别列举了三个例子用来阐述三者的物理特性起源. 上述研究文献虽然提出了多种忆感器的仿真模型或等效电路, 但多数研究仍停留在理论与仿真的层面, 并没有将忆感器应用于实际电路来分析忆感器的特性.

本文提出了一种三次光滑曲线的忆感器模型, 设计了该忆感器模型的等效模拟电路, 并基于该模型设计了基于忆感器的混沌振荡电路. 通过数值仿真、平衡点求解与稳定性判断, 以及分岔图(一维分岔图和二维分岔图-动力学地图)与 Lyapunov 指数的计算来分析电路的动力学行为, 对忆感器模型及其混沌电路进行了电路实验, 实验结果验证了理论分析的正确性.

## 2 忆感器等效电路模型

根据文献 [3, 13], 忆感器的韦-安特性和安-韦特性可定义为

$$\varphi(t) = L(q)i(t), \quad (1)$$

$$i(t) = L^{-1}(\rho)\varphi(t), \quad (2)$$

其中,  $i(t)$  为  $t$  时刻流过忆感器的电流,  $\varphi(t)$  表示  $t$  时刻忆感器的磁通,  $L(q)$  和  $L^{-1}(\rho)$  分别为忆感值和忆感倒数, 且分别定义为

$$L(q) = \frac{d\rho(q)}{dq}, \quad (3)$$

$$L^{-1}(\rho) = \frac{dq(\rho)}{d\rho}, \quad (4)$$

其中  $\rho = \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) d\tau$  是一个中间积分变量, 它是电荷的单值函数. 由于忆感器尚未物理实现, 在本文中, 假设忆感器的  $q(\rho)$  是一个光滑三次单调升的非线性函数:

$$q = a\rho + b\rho^3, \quad (5)$$

其中  $a$  与  $b$  为常系数. 据 (2) 式可得  $L^{-1}(\rho) = dq/d\rho = (a + b\rho^2)$ , 于是有如下安-韦关系:

$$i(t) = (a + b\rho^2)\varphi(t). \quad (6)$$

依据 (6) 式设计的忆感器等效电路模型如图 1 所示. 该模型由 4 个集成运放与 2 个乘法器构成, 其中集成运放使用的是 LF347N 芯片, 乘法器使用的是 AD633 芯片. 等效电路中的“input”为输入端, 输入电压  $v(t)$  经过 U1 构成的积分器获得磁通信号  $\varphi(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ , 再经 U2 后得到积分信号  $\rho = \int_{-\infty}^t \varphi d\tau$ ,  $\rho$  经过乘法器得到  $\rho^2$ ,  $\varphi(t)$  经反相器 U3 后一路与  $\rho^2$  相乘得到  $\rho^2\varphi(t)$ , 并与另一路的  $\varphi(t)$  同时加到加法器 U4 的输入端, 在 U4 输出端实现了  $i(t) = -\left(\frac{R_9}{R_8} + \frac{R_9}{R_7}\rho^2\right)\varphi(t)$ , 之后通过一个反相器可实现  $i(t) = \left(\frac{R_9}{R_8} + \frac{R_9}{R_7}\rho^2\right)\varphi(t)$  的运算, (6) 式中的参数可以表示为  $a = R_9/R_8$ ,  $b = R_9/R_7$ .

对图 1 所示的忆感器模型进行了实验测试, 取忆感器常参数  $a = 1$ ,  $b = 3$ , 输入端电压  $v = \sin(2\pi f)$  时, 其在不同频率正弦激励下的  $i-\varphi$  特性如图 2(a)–(c) 所示, 其对应的时域波形如图 2(d) 所示.

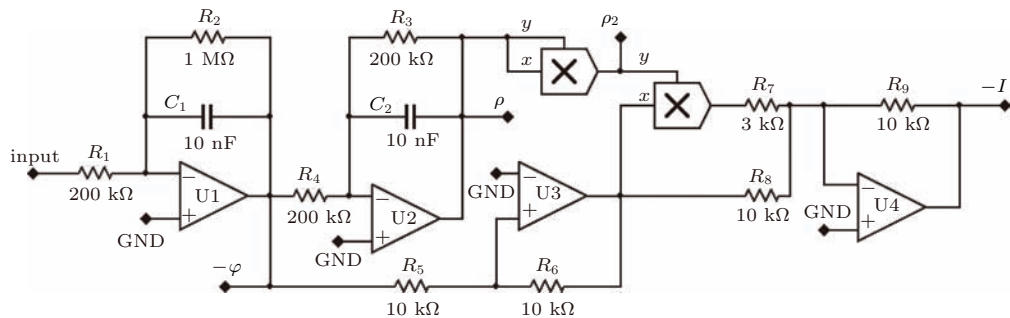


图 1 磁控忆感器等效电路图

Fig. 1. The equivalent circuit of the flux-controlled meminductor.

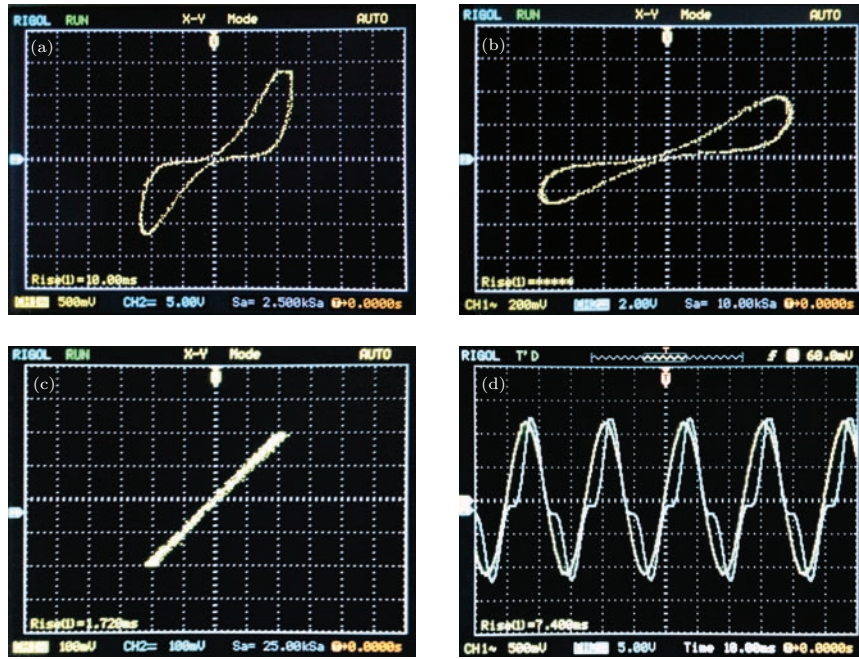


图2 (网刊彩色) 实验测试获得的忆感器等效电路  $i-\varphi$  安-韦特性 (a)  $f = 60$  Hz 时  $i-\varphi$  相图; (b)  $f = 80$  Hz 时  $i-\varphi$  相图; (c)  $f = 160$  Hz 时  $i-\varphi$  相图; (d)  $f = 60$  Hz 时  $i-\varphi$  波形

Fig. 2. (color online) Some experimental results to emulate  $i-\varphi$  hysteresis loop of the meminductor device in conditions of (a)  $f = 60$  Hz; (b)  $f = 80$  Hz; (c)  $f = 160$  Hz; (d)  $f = 60$  Hz.

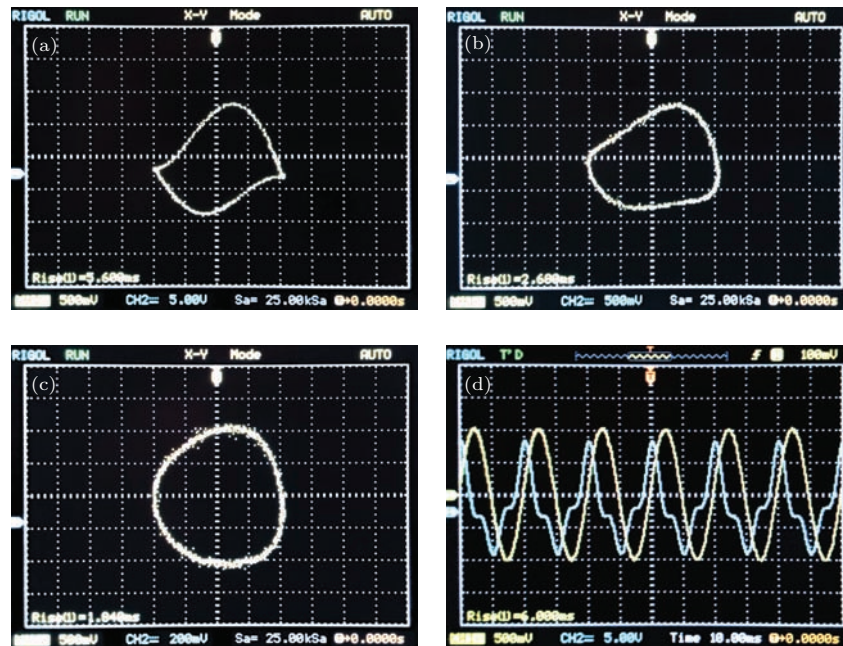


图3 (网刊彩色) 实验测试获得的忆感器等效电路  $v-i$  伏-安特性 (a)  $f = 60$  Hz 时  $v-i$  相图; (b)  $f = 80$  Hz 时  $v-i$  相图; (c)  $f = 160$  Hz 时  $v-i$  相图; (d)  $f = 60$  Hz 时  $v-i$  波形

Fig. 3. (color online) Some experimental results to emulate  $v-i$  hysteresis loop of the meminductor device in conditions of (a)  $f = 60$  Hz; (b)  $f = 80$  Hz; (c)  $f = 160$  Hz; (d)  $f = 60$  Hz.

在正弦电压  $v = \sin(2\pi f)$  激励下对忆感器模型两端的电压与电流的波形和相图做了实验测试, 时域波形与相图如图3所示. 实验结果表明, 在正弦激励下非线性的忆感器其响应电流波形发生了畸变, 出现了谐波分量, 其相图是一个畸变的环路;

随着激励电压频率的升高, 忆感器的非线性作用越来越弱, 最后呈现一个线性特性, 这与忆阻器的频率响应类似, 体现了记忆器件的一种共同特性.

为了实现忆感器的  $q-\rho$  特性, 设计了如图4所示的电路模型, 并将其称之为  $q-\rho$  忆感器等效电路

模型. 图 1 中的  $\rho$  和  $\rho^2$  经图 4 中的乘法器和运放之后, 其输出电压为

$$U_c = \frac{R_{12}}{R_{10}}\rho + \frac{R_{12}}{R_{11}}\rho^3 = a\rho + b\rho^3, \quad (7)$$

其中,

$$a = R_{12}/R_{10}, \quad b = R_{12}/R_{11}.$$

而输出电压  $U_c$  为电容器  $C_3$  两端电压, 电荷  $q$  必

然满足

$$q = U_c C_3 = (a\rho + b\rho^3)C_3. \quad (8)$$

因此从量值关系看, 当在该等效电路输入端施加电压激励时, 其输出电压  $U_c$  做  $C_3$  倍的幅度尺度变换后与图 1 中  $\rho$  的关系即为  $q-\rho$  特性. 对于不同频率的正弦输入电压  $v = \sin(2\pi f)$ , 忆感器等效电路的  $q-\rho$  特性曲线如图 5 所示.

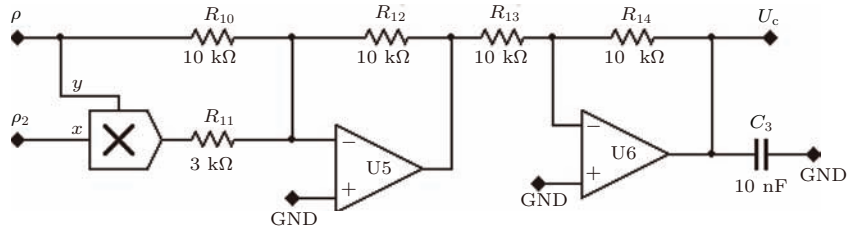


图 4 忆感器  $q-\rho$  特性等效电路模型

Fig. 4. The equivalent circuit of the meminductor characterized by Eq. (8).

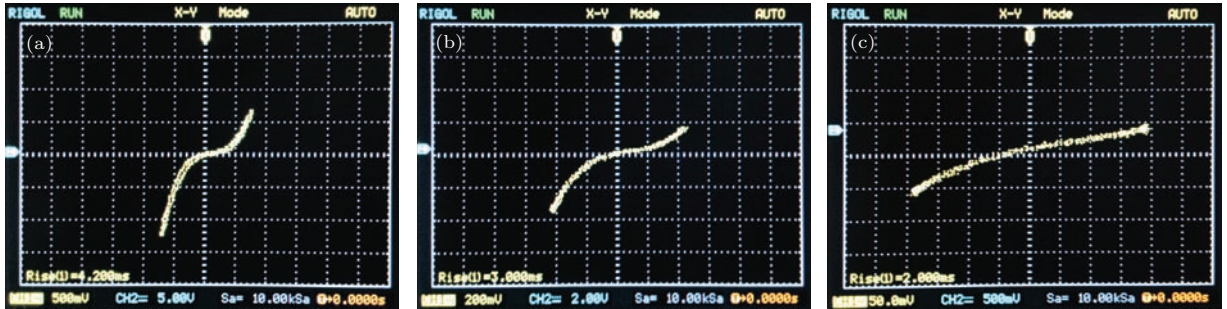


图 5 (网刊彩色) 实验测试获得的忆感器  $q-\rho$  库-韦特性 (a)  $f = 60$  Hz; (b)  $f = 80$  Hz; (c)  $f = 160$  Hz

Fig. 5. (color online) Some experimental results to emulate  $q-\rho$  hysteresis loop of the meminductor device in conditions of (a)  $f = 60$  Hz; (b)  $f = 80$  Hz; (c)  $f = 160$  Hz.

### 3 忆感器混沌振荡器

一个利用忆感器构成的混沌振荡电路如图 6 所示. 该振荡电路包含一个由 (6) 式描述的磁控忆感器、两个线性电容、一个电导以及一个负电导, 负电导为电路提供能量以维持其持续振荡.

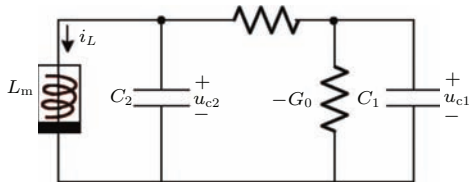


图 6 忆感器混沌振荡电路图

Fig. 6. Oscillation circuit based on meminductor model.

对于图 6 所示电路, 运用基尔霍夫定律以及元件的伏安关系, 可得  $(v_{c1}, v_{c2}, \varphi_L)$  之间关系的状态

方程组

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_L}{dt} &= v_{c2}, \quad C_2 \frac{dv_{c2}}{dt} = G_1(v_{c1} - v_{c2}) - i_L, \\ C_1 \frac{dv_{c1}}{dt} &= G_1(v_{c2} - v_{c1}) + G_0 v_{c1}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $i_L = (a + b\rho^2)\varphi_L$  为磁控忆感器电流,  $\varphi_L$  为忆感器的磁通. 设  $x = \varphi_L, y = v_{c2}, z = v_{c1}, w = \rho, f = G_1/C_2, \alpha = a/C_2, \beta = b/C_2, c = G_1/C_1, d = G_0/C_1, e = d - c$ , 则 (9) 式可化为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \quad \frac{dy}{dt} = f(z - y) - (\alpha + \beta w^2)x, \\ \frac{dz}{dt} &= cy + ez, \quad \frac{dw}{dt} = x. \end{aligned} \quad (10)$$

当  $f = 3.91 \mu\text{s/nf}, c = 4.19 \mu\text{s/nf}, e = -0.93 \mu\text{s/nf}, \alpha = -7.7 \text{ mH/nf}, \beta = 3.575 \text{ mH/nf}$ , 选择初值为  $(0.01; 0.01; 0.01; 0)$  时, 忆感器振荡器呈现混沌状态, 产生混沌吸引子的相图如图 7 所示.

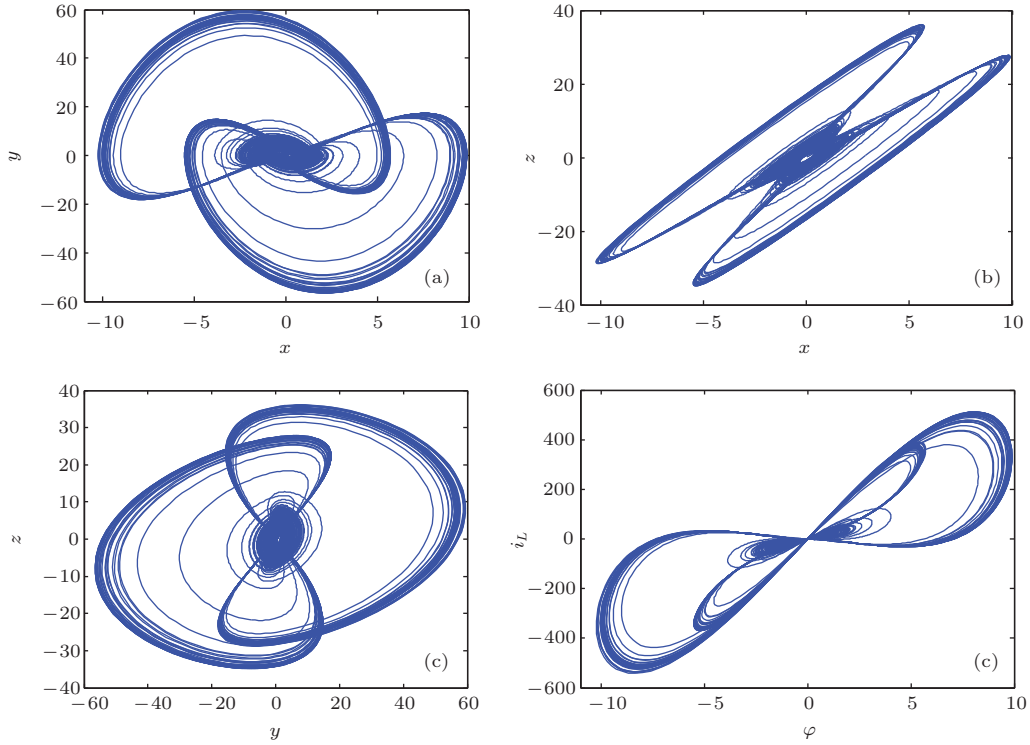


图7 (网刊彩色) 忆感器振荡器吸引子与相图 (a)  $x$ - $y$  相图; (b)  $x$ - $z$  相图; (c)  $y$ - $z$  相图; (d)  $\varphi$ - $i_L$  相图

Fig. 7. (color online) Chaotic attractors and  $\varphi - i_L$  hysteresis loops of meminductor in the chaotic oscillation circuit: (a), (b) and (c) chaotic attractors; (d) chaotic  $\varphi$ - $i$  hysteresis.

在(9)式中, 忆感器电流  $i_L$  含有积分变量  $\rho$ , 直接求解需再增加一个  $\dot{\rho} = \varphi_L(t)$  的方程. 为降低方程的复杂性<sup>[25,26]</sup>, (10)式两边对时间  $t$  积分, 并假定各积分量的初值为零, 可得到一个简化的方程

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \varphi_{c2} + \varphi_0, \\ C_2 \frac{d\varphi_{c2}}{dt} &= G_1(\varphi_{c1} - \varphi_{c2}) - q_L, \\ C_1 \frac{d\varphi_{c1}}{dt} &= G_1(\varphi_{c2} - \varphi_{c1}) + G_0\varphi_{c1}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $q_L = \int_{t_0}^t i_L dt$  为忆感器中的电荷, 根据(5)式知  $q_L = (a\rho + b\rho^3)$ ,  $\varphi_0$  为已经流经忆感器的磁通量, 即忆感器模型的初始条件, 这里假定忆感器的初始条件为  $\varphi_0 = 0$ . 对于  $\varphi_0$  对系统影响的分析在后文中另有论述. 设  $x = \rho$ ,  $y = \varphi_2$ ,  $z = \varphi_1$ ,  $f = G_1/C_2$ ,  $\alpha = a/C_2$ ,  $\beta = b/C_2$ ,  $c = G_1/C_1$ ,  $d = G_0/C_1$ ,  $e = d - c$ ,  $\varphi_0 = 0$  则(11)式可化为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= f(z - y) - (\alpha x + \beta x^3), \\ \frac{dz}{dt} &= cy + ez, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\varphi_{c1} = \int_{t_0}^t v_{c1} dt$  为电容器  $C_1$  中的磁通,  $\varphi_{c2} = \int_{t_0}^t v_{c2} dt$  为电容器  $C_2$  中的磁通,  $\rho = \int_{t_0}^t \varphi_L(t) dt$  为忆感器中的积分变量.

选择电路参数如表1所示, 使得  $f = 3.91 \mu\text{s}/\text{nF}$ ,  $c = 4.19 \mu\text{s}/\text{nF}$ ,  $e = -0.93 \mu\text{s}/\text{nF}$ ,  $\alpha = -7.7 \text{mH}/\text{nF}$ ,  $\beta = 14.3 \text{mH}/\text{nF}$ . 选择初值为(0.01; 0.01; 0.01)时电路产生的吸引子相图如图8所示.

表1 忆感器混沌振荡电路对应的电路参数

Table 1. Circuit parameters of the meminductor-based chaotic oscillator.

电路参数	数值
$C_1/\text{nF}$	93
$C_2/\text{nF}$	100
$G_0/\text{mS}$	0.303
$G_1/\text{mS}$	0.391
$a/\text{mH}$	-716
$b/\text{mH}\cdot\text{Wb}^{-2}$	1430

用 Jacobi 方法计算 Lyapunov 指数得  $L_1 = 0.0784$ ,  $L_2 = -0.00158$ ,  $L_3 = -4.9168$ . Lyapunov 维数为  $dL = 2.0156$ . 在  $y = 0$  截面上三维 Poincaré

映射轨线在  $x$ - $z$  平面上的投影如图 9(a) 所示, 三个状态变量的时域波形如图 9(b) 所示, 它们是非周期性的, 伪随机的. 从忆感器混沌电路的相轨

图、Poincaré 映射的截面图、时域波形图以及相应的 Lyapunov 指数和维数可知, 该振荡器是混沌振荡的.

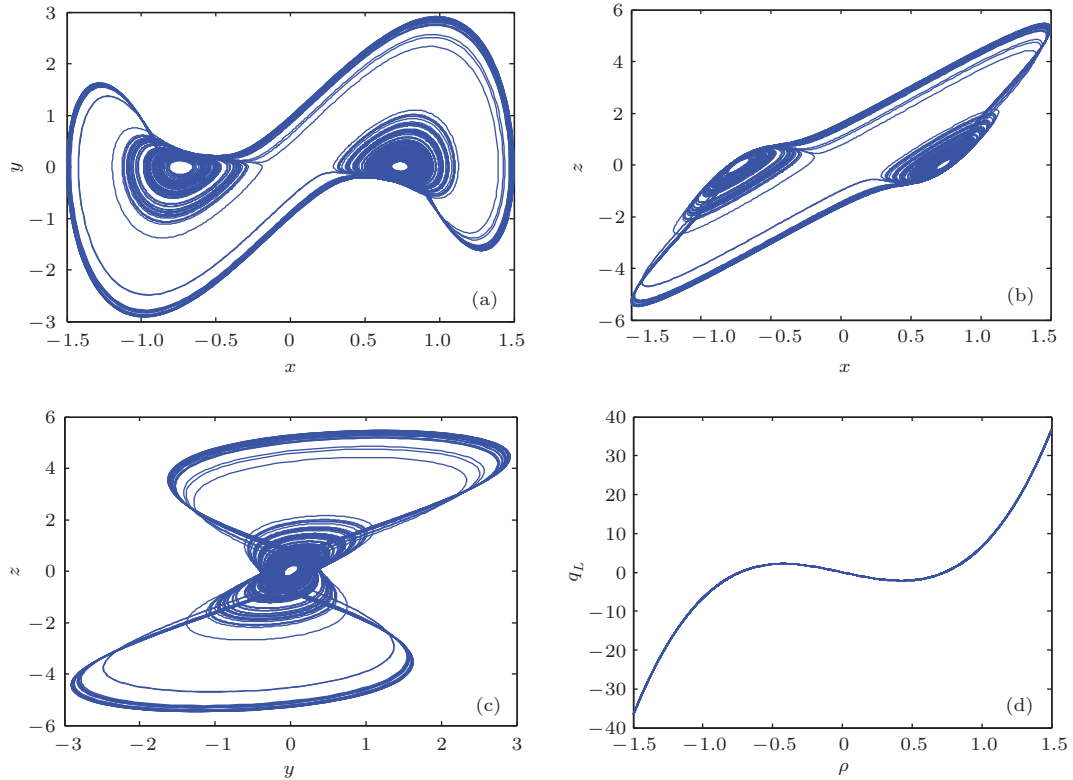


图 8 (网刊彩色) 忆感器振荡器吸引子与相图 (a)  $x$ - $y$  相图; (b)  $x$ - $z$  相图; (c)  $y$ - $z$  相图; (d)  $\rho$ - $q_L$  相图  
Fig. 8. (color online) Chaotic attractors and  $\rho$ - $q_L$  hysteresis loops of meminductor in the chaotic oscillation circuit: (a), (b) and (c) chaotic attractors; (d) chaotic  $\rho$ - $q_L$  hysteresis loops.

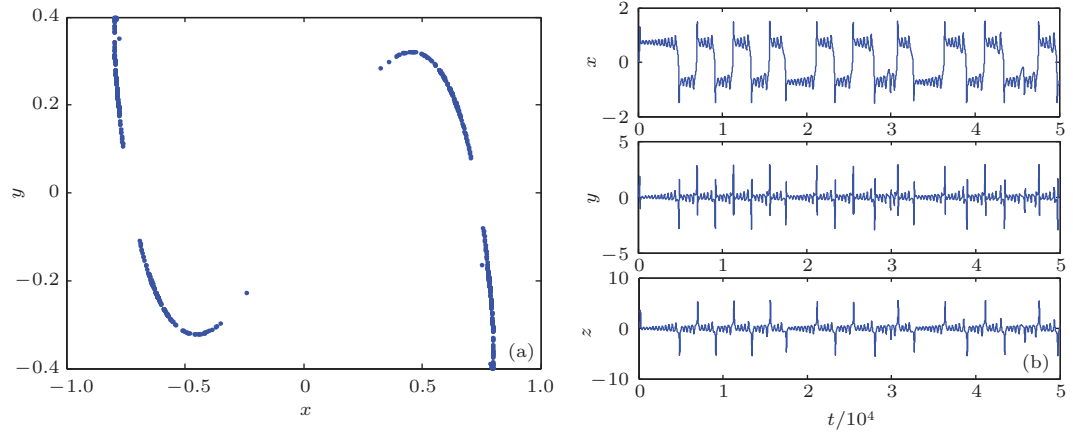


图 9 (网刊彩色) Poincaré 映射和时域波形 (a) Poincaré 映射轨线的投影; (b) 时域波形  
Fig. 9. (color online) Poincaré mappings on  $z = 0$  A section: (a) Projection in  $x$ - $y$  plane; (b) the time domain waveform of  $x$ ,  $y$  and  $z$ .

#### 4 平衡点与稳定性

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ , 可得系统的平衡点为  $(0, 0, 0)$ ,  $(\sqrt{-\alpha/\beta}, 0, 0)$ ,  $(-\sqrt{-\alpha/\beta}, 0, 0)$ . 将系统(12)

在平衡点处线性化后, 可得 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3\beta x^2 - \alpha & -f & f \\ 0 & c & e \end{bmatrix}. \quad (13)$$

平衡点的特征根方程为(14)

$$\lambda^3 + (f - e)\lambda^2 + (3\beta x^2 + \alpha - fc - fe)\lambda - 3\beta ex^2 - \alpha e = 0, \quad (14)$$

其中  $a_0 = 1, a_1 = f - e, a_2 = 3\beta x^2 + \alpha - fc - fe, a_3 = -3\beta ex^2 - \alpha e, a_4 = 0, a_5 = 0$ .

由Routh-Hurwitz条件可知, 当

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad (15)$$

都为正时, 系统的特征值(或特征值的实部)均为负的, 此时系统稳定. 为使系统(12)产生混沌或超混沌, 则应该至少有1个特征值(或特征值的实部)为正, 所以(15)式中各项应该不全为正. 例如, 当

$f = 3.91, c = 4.19, e = -0.93, \alpha = -7.7, \beta = 14.3$ , 对于平衡点(0,0,0)有  $\Delta_1 = 4.84, \Delta_2 = -91.801, \Delta_3 = 657.384$ ; 对于平衡点  $(\pm\sqrt{-\alpha/\beta}, 0, 0)$  有  $\Delta_1 = 4.84, \Delta_2 = 41.486, \Delta_3 = -1188.338$ ; 此时三个平衡点都不稳定, 符合产生混沌的平衡点稳定性条件.

## 5 参数对系统动力学影响的分析

### 5.1 参数 $f$ 变化对动力学特性的影响

随着系统参数变化, 系统由于平衡点的稳定性变化也将处于不同状态. 固定参数  $c = 4.19, e = -0.93, \alpha = -7.7, \beta = 14.3$ , 改变电路参数  $f$ . 当  $f$  在  $[3.7, 4.5]$  范围变化时, 系统的Lyapunov指数谱如图10(a)所示, 为了图示清晰, 第三根Lyapunov指数曲线没有画出, 状态变量  $x$  随参数  $f$  变化的分岔图如图10(b)所示.

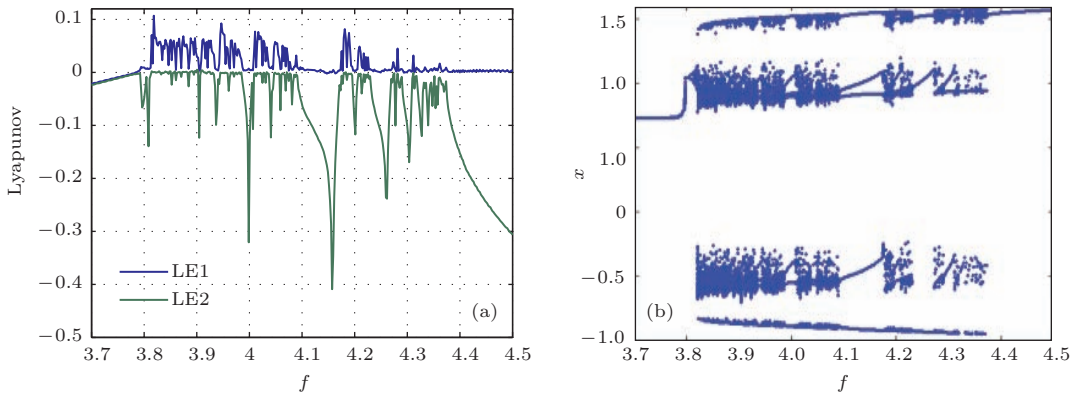


图10 (网刊彩色) 随参数  $f$  变化 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 图; (b) 分岔图

Fig. 10. (color online) (a) Lyapunov spectrum and (b) bifurcation diagram and with respect to  $f$ .

由图10可见, Lyapunov指数谱与分岔图所表现运行轨线的稳定与不稳定区域是一致的, 系统由周期轨道通过分岔通向混沌状态, 然后又经过反倍周期分岔逐步过渡为周期轨. 在  $f \in [3.7, 4.5]$  区域内, 系统有多次周期轨道与混沌轨道的相互切换. 例如, 当  $f \in [3.7, 3.8]$  时系统处于周期轨道, 当  $f \in [3.81, 3.93]$  时系统由倍周期轨道演变为混沌轨道, 在  $f \in [3.94, 4]$  区域系统进入周期窗口. 类似的, 在  $f \in [4, 4.5]$  区域内, 系统经历了多次混沌轨道与周期窗口的状态切换. 选取不同的参数  $f$ , 状态变量  $x, y$  随  $f$  变化的几种典型的相图如图11所示. 由图11可以看出, 随着参数  $f$  的增大, 系统逐渐由周期轨演变为倍周期轨, 再由倍周期轨演变为

混沌轨, 而最后又进入周期轨道.

### 5.2 参数 $e$ 变化对动力学特性的影响

固定参数  $f = 3.91, c = 4.19, \alpha = -7.7, \beta = 14.3$ , 改变参数  $e$ . 当  $e$  在  $[-1.3, -0.5]$  范围变化时, 系统的Lyapunov指数谱如图12(a)所示, 状态变量  $x$  随参数  $e$  变化的分岔图如图12(b)所示. 在  $e \in [-1.3, -0.5]$  范围内, 系统先由周期轨经过短暂的倍周期分岔进入混沌状态, 在区域  $[-1.3, -0.5]$  内系统历经了几个周期窗口  $[-0.91, -0.89], [-0.81, -0.73], [-0.71, -0.59]$  等, 由混沌轨道演变为周期轨道. 系统随参数  $e$  变化具体的演变情况如图12所示.



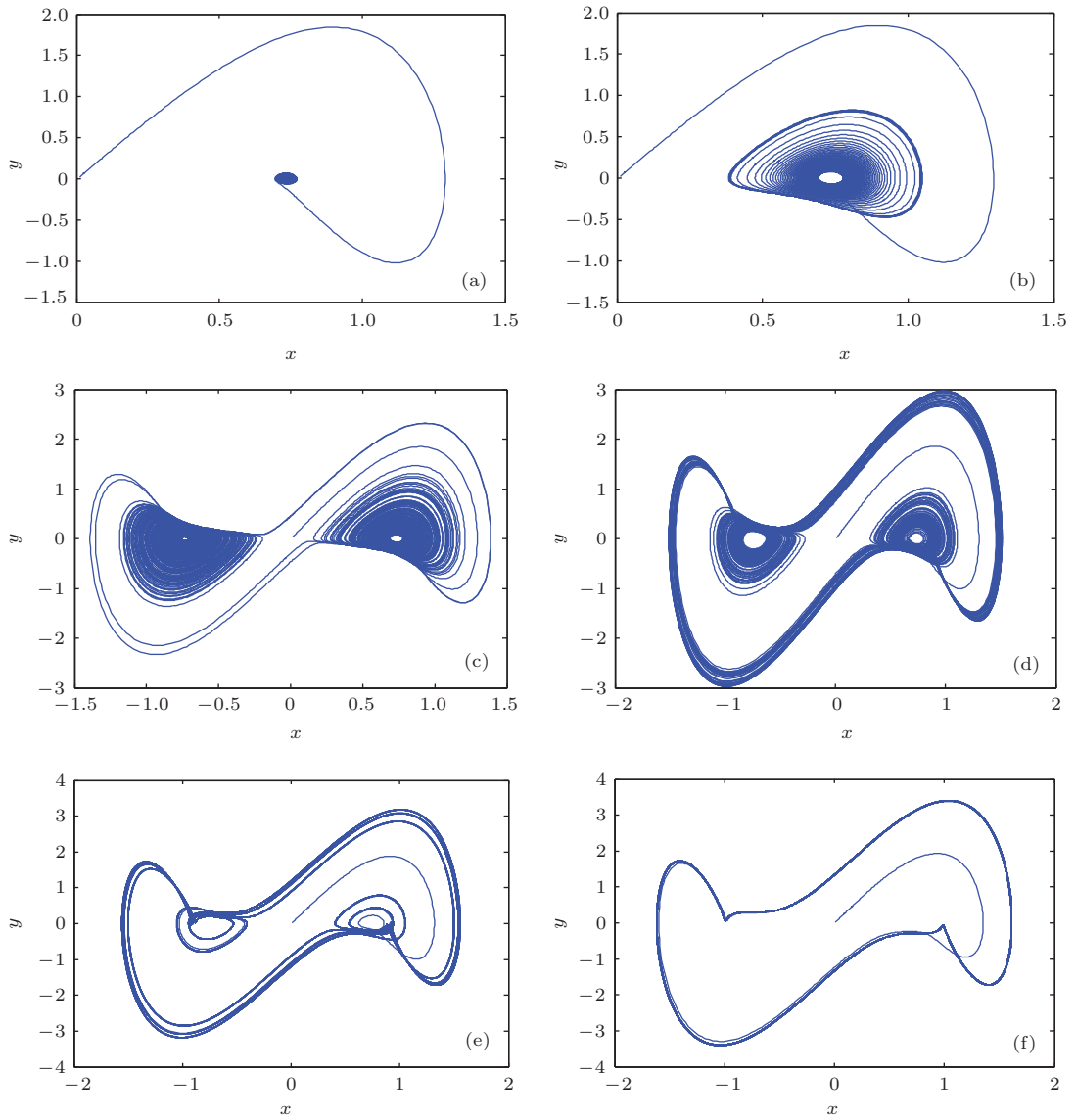


图 11 (网刊彩色) 系统 (12) 随参数  $f$  变化的相图 (a)  $f = 3.75$ ; (b)  $f = 3.8$ ; (c)  $f = 3.8198$ ; (d)  $f = 3.95$ ; (e)  $f = 4.2$ ; (f)  $f = 4.8$

Fig. 11. (color online) Projections on the  $x - y$  phase plane of the attractors observed for different sets of parameters: (a)  $f = 3.75$ ; (b)  $f = 3.8$ ; (c)  $f = 3.8198$ ; (d)  $f = 3.95$ ; (e)  $f = 4.2$ ; (f)  $f = 4.8$ .

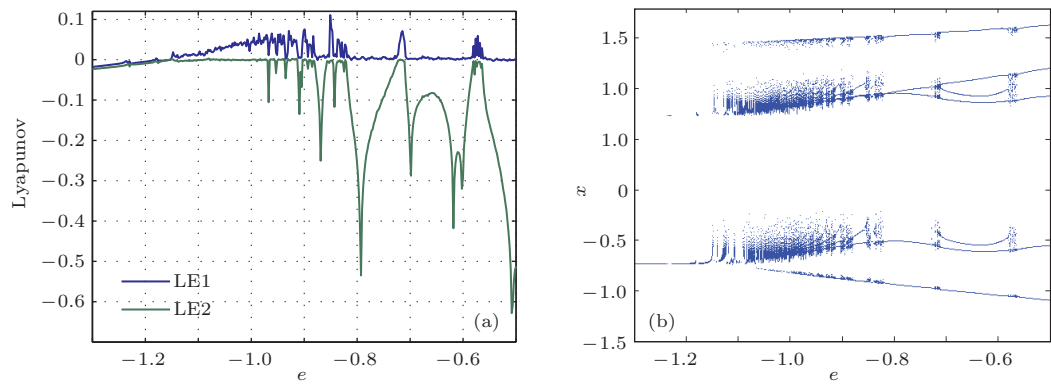


图 12 (网刊彩色) 随参数  $e$  变化的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 图; (b) 分岔图

Fig. 12. (color online) (a) Lyapunov spectrum and (b) bifurcation diagram and with respect to  $e$ .

### 5.3 参数 $f$ 和 $e$ 变化时的二维动力学分岔图

系统的动力学行为随分岔参数  $f$  和  $e$  演变而发生不同的变化, 图 13 给出的二维动力学分岔图, 即动力学地图, 便刻画了系统的动力学行为对分岔参数的依赖关系.

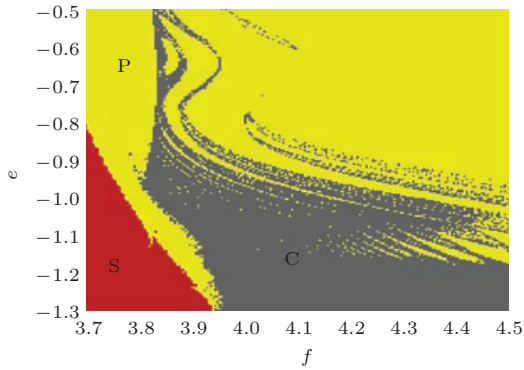


图 13 (网刊彩色) 分岔参数  $f$  和  $e$  所定义的动力学地图  
Fig. 13. (color online) Dynamic map with respect to  $f$  and  $e$ .

在图 13 中, 标为 S 的红色区域表示稳定平衡点, 标为 C 的灰色区域表示混沌状态, 标为 P 的黄色区域表示周期状态. 动力学地图相对集中完整地反应了当参数  $f$  和  $e$  发生变化时, 系统在动力学行为上所处的不同状态. 由图 13 可以看出, 在参数  $f$

和  $e$  都较小的底部区域内系统都收敛到稳定的点吸引子; 而随着参数  $e$  的增大, 系统运行于周期轨道; 同时, 在底部区域随着参数  $f$  的增大, 系统又从周期轨道演变为混沌轨道. 动力学地图中穿插的细碎带状灰色区域表明系统存在着周期走向混沌的分岔.

### 5.4 忆感器初始条件 $\varphi_0$ 对动力学特性的影响

在系统 (11) 中, 忆感器的初始条件被假定为  $\varphi_0 = 0$ , 本小节将讨论忆感器初始条件  $\varphi_0 \neq 0$  时系统的动力学情况. 固定电路参数  $f = 3.91$ ,  $c = 4.19$ ,  $e = -0.93$ ,  $\alpha = -7.7$ ,  $\beta = 14.3$ , 初始条件  $[0.01, 0.01, 0.01]$ , 系统随  $\varphi_0$  变化的 Lyapunov 指数谱如图 14 (a) 所示, 状态变量  $x$  随着  $\varphi_0$  变化的分岔图如图 14 (b) 所示. 结合图 15 不难观察到, 系统的混沌动力学行为随着  $\varphi_0$  变化而变化, 系统轨道开始由周期轨道经过倍周期分岔, 进入混沌单涡旋轨道, 在  $|\varphi_0|$  不断减小的情况下, 靠近 0 的区域内, 系统又由混沌单涡旋轨道逐渐演化为混沌双涡旋轨道. 这表明忆感器混沌振荡器的状态不仅依赖于系统参数, 同时也强依赖于忆感器的初始条件. 不同忆感器初始条件下, 系统演化的相轨图如图 15 所示.

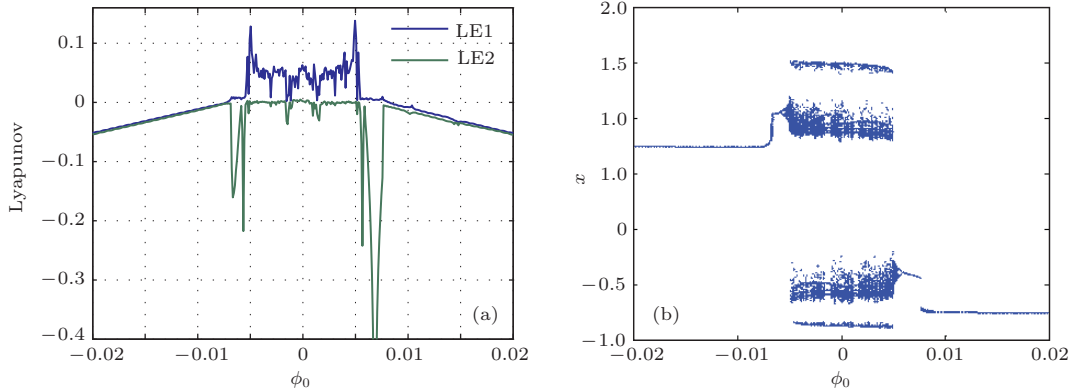


图 14 (网刊彩色) 初始条件  $\varphi_0$  变化时的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a)  $\varphi_0$  变化时的 Lyapunov 指数谱; (b)  $\varphi_0$  变化时的分岔图

Fig. 14. (color online) (a) Lyapunov spectrum and (b) bifurcation diagram with respect to  $\varphi_0$ .

## 6 忆感器混沌振荡器的电路实现

采用图 4 所示的忆感器  $q$ - $\rho$  特性等效电路模型, 可以设计实现忆感器混沌振荡器的模拟实验电路. 基于 (12) 式, 先对其做时间尺度变换, 令时间尺度变

换因子  $K = 100$ , 即  $\tau = 100t$ ; 再对状态方程做振幅尺度变换, 令  $(X, Y, Z) = (x/2, y/2, z/2)$  得到 (16) 式. 一般而言, 时间尺度变换因子越大, 系统时域演变越快, 相轨迹越密集; 反之, 时间尺度变换因子越小, 系统时域演变越慢, 相轨迹越稀疏. 在设计忆感器混沌振荡器时, 做时间尺度变换可以弥补

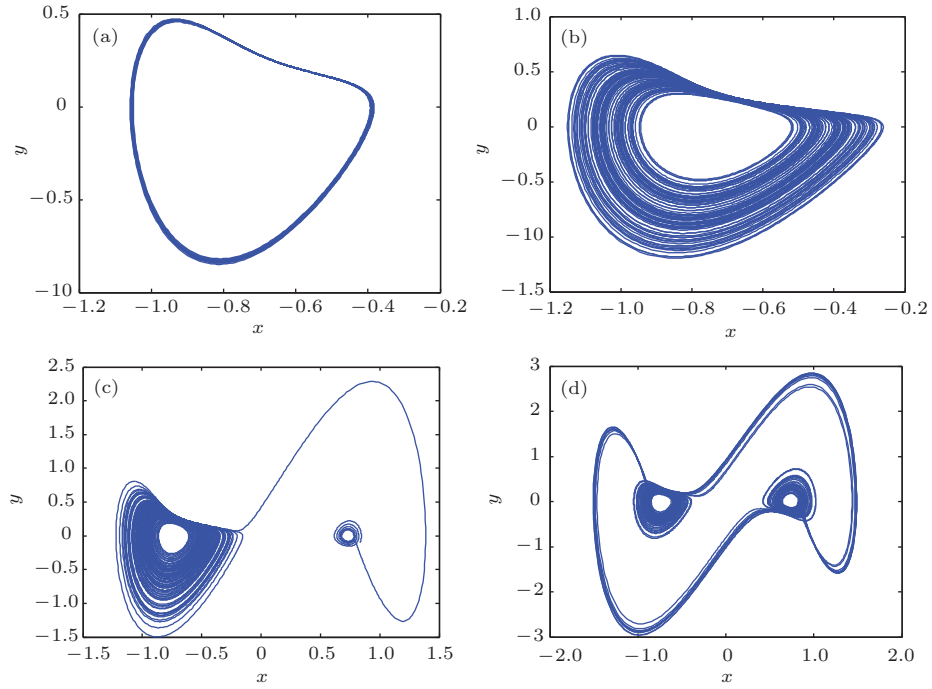


图15 (网刊彩色)不同忆感器初始条件下,系统演化的相轨图 (a)  $\varphi_0 = 0.006$ ; (b)  $\varphi_0 = 0.005$ ; (c)  $\varphi_0 = 0.0049576$ ; (d)  $\varphi_0 = 0.002$   
 Fig. 15. (color online) Phase track diagram of system evolution in conditions of: (a)  $\varphi_0 = 0.006$ ; (b)  $\varphi_0 = 0.005$ ; (c)  $\varphi_0 = 0.0049576$ ; (d)  $\varphi_0 = 0.002$ .

因积分电容大而引起的系统时域演变慢的问题,而且可以相应的减小积分电路的电阻阻值,方便电路调试.而对系统做振幅尺度变换的主要目的是将系统变量的范围约束到集成运放芯片的参考电压(-15 V,15 V)之内,防止电路饱和失真.

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -100(-Y), \\ \frac{dY}{d\tau} &= -100a(-Z + Y) - 100(\alpha X + 4\beta X^3), \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -100c(-Y) - 100e(-Z). \end{aligned} \quad (16)$$

将电路参数及忆感器参数  $f = 3.91$ ,  $c = 4.19$ ,  $e = -0.93$ ,  $\alpha = -7.7$ ,  $\beta = 14.3$  代入,得到

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -100(-Y), \\ \frac{dY}{d\tau} &= -391(-Z + Y) - 100(-7.7X + 57.2X^3), \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -419(-Y) - 93Z. \end{aligned} \quad (17)$$

根据状态方程,可设计出其对应的电路单元如图16所示,其中U3—U7组成的集成运放用来实现  $x$ ,  $y$ ,  $z$  的基本运算单元, U8实现的是反相器,由  $A_2$ ,  $A_3$ , U1, U2组成的电路单元实现的是如图4所示的  $q$ - $\rho$  特性的忆感器等效模型.图16所示电路中,选择积分电容为10 nF,集成运放选择LF347N

芯片,乘法器选择AD633芯片,整体电路参考电压选择.

可得图16的状态方程为

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= -\frac{1}{R_9 C_4}(-Y), \\ \frac{dY}{d\tau} &= -\frac{1}{R_{12} C_2}(-Z) - \frac{1}{R_{13} C_2} Y - \frac{1}{R_{14} C_2} U_c, \\ \frac{dZ}{d\tau} &= -\frac{1}{R_{15} C_3}(-Y) - \frac{1}{R_{16} C_3} Z, \end{aligned} \quad (18)$$

其中,  $U_c = -7.7X + 57.2X^3$ . 利用(17)式与(18)式对应系数相等的对应关系,可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_9 C_4} &= 100, \quad \frac{1}{R_{14} C_2} = 100, \quad \frac{1}{R_{12} C_2} = 391, \\ \frac{1}{R_{15} C_3} &= 419, \quad \frac{1}{R_{13} C_2} = 391, \quad \frac{1}{R_{16} C_3} = 93, \end{aligned} \quad (19)$$

当取  $C_2 = C_3 = C_4 = 10$  nF时,可得电路参数  $R_9 = 1000$  k $\Omega$ ,  $R_{12} \approx 256$  k $\Omega$ ,  $R_{13} \approx 256$  k $\Omega$ ,  $R_{14} = 1000$  k $\Omega$ ,  $R_{15} \approx 239$  k $\Omega$ ,  $R_{16} \approx 1075$  k $\Omega$ . 将忆感器混沌振荡电路图16通过模拟电路实现,可以获得双涡卷混沌吸引子,实验结果如图17所示.通过对比观察相应Matlab仿真图8与电路实验结果图17,可知获得的实际相图与Matlab仿真的相图形状基本一致.电路实验所使用的器件与仪器如图18(b)所示.

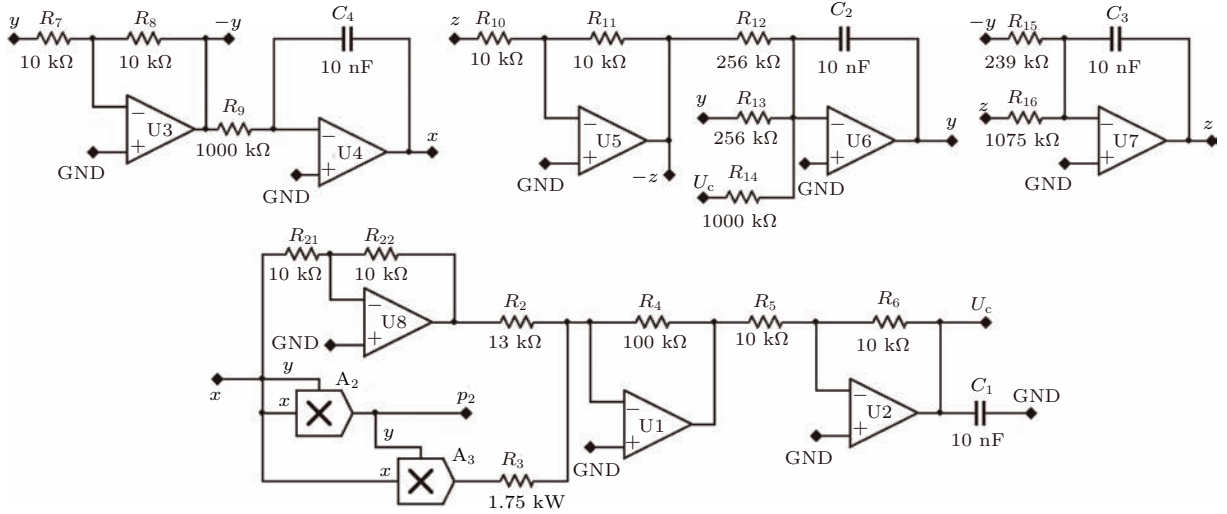


图 16 系统 (12) 的 Multisim 整体仿真电路图

Fig. 16. The Multisim circuit schematic of Eq. (12).

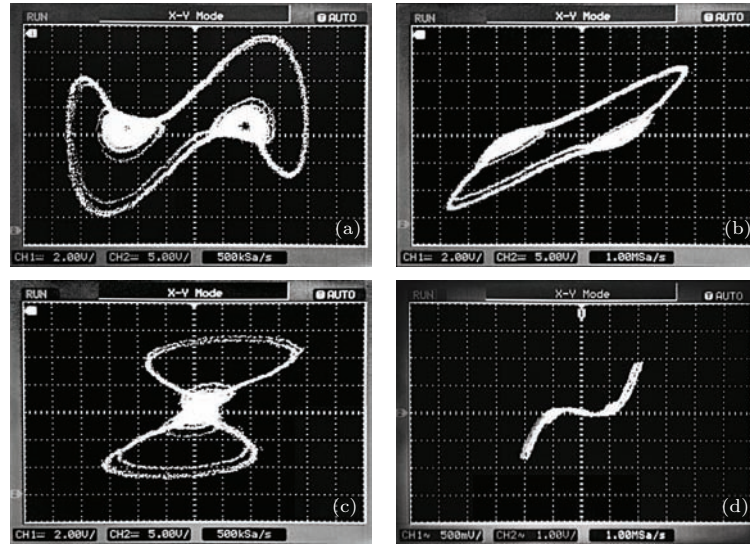


图 17 示波器显示的混沌吸引子相图 (a)  $x-y$  相图; (b)  $x-z$  相图; (c)  $y-z$  相图; (d)  $\rho-q_L$  相图

Fig. 17. Experiment results of meminductor-based oscillator: (a)  $x-y$  phase diagram; (b)  $x-z$  phase diagram; (c)  $y-z$  phase diagram; (d)  $\rho-q_L$  phase diagram.

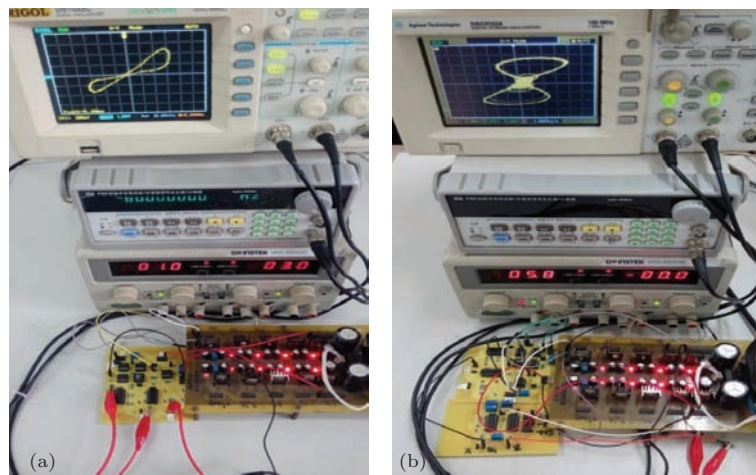


图 18 (网刊彩色) 实验器材图 (a) 忆感器模型电路实验图; (b) 忆感器混沌电路实验相图

Fig. 18. (color online) Experimental circuit boards for (a) meminductor model (b) meminductor-based oscillator.

## 7 结 论

在最近的许多文献报道中, 对于忆感器的研究大多局限于忆感器模型的仿真与分析, 而对于忆感器应用电路的文献却很鲜见. 本文提出了一种磁控忆感器的数学模型, 并建立了此模型下忆感器的等效模拟电路, 在实际忆感器尚未实现的情况下, 该模型可用来进行忆感器特性及其应用电路的理论及实验研究工作. 同时, 基于忆感器模型构造了一个忆感器混沌振荡电路, 获得了不同以往的混沌吸引子, 相比于其他混沌系统, 忆感器混沌不仅依赖于系统参数, 同时也强依赖于忆感器的初始条件, 并可产生稳定、连续的混沌伪随机序列, 应用于信息加密及保密通信等领域.

## 参考文献

- [1] Chua L O 1971 *IEEE Trans. Circuit Theory* **18** 507
- [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, Williams R S 2008 *Nature* **453** 80
- [3] Di Ventra M, Pershin Y V, Chua L O 2009 *Proc. IEEE* **97** 1717
- [4] Liu H J, Li Z W, Y H Q, Sun Z L, Nie H S 2014 *Chin. Phys. B* **23** 118402
- [5] Bao B C, Hu F W, Liu Z, Xu J P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 070503
- [6] Liu W, Wang F Q, Ma X K 2015 *Int. J. Numer Model El* **28** 335
- [7] Wang G Y, He J L, Yuan F, Peng C J 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 110506
- [8] Sah M P, Budhathoki R K, Yang C, Kim H 2014 *Circ. Syst. Signal Pr* **33** 2363
- [9] Yuan F, Wang G Y, Wang X Y 2015 *Chin. Phys. B* **24** 060506
- [10] Pei J S, Wright J P, Todd M D, Masri S F, Gay-Balmaz F 2015 *Nonlinear Dynamics* **80** 457
- [11] Fouda ME, Radwan AG 2014 *Microelectron J.* **45** 1372
- [12] Minaei S, Goknar IC, Yildiz M, Yuce E 2015 *Int. J. Electron* **102** 911
- [13] Pershin Y V, Di Ventra M 2010 *Electron Lett.* **46** 517
- [14] Pershin Y V, Di Ventra M 2011 *Adv. Phys.* **60** 145
- [15] Birolek D, Birolek Z, Biolkova V 2011 *Analog Integr. Circ. S* **66** 129
- [16] Birolek D, Birolek Z, Biolkova V 2011 *Electron Lett.* **47** 1385
- [17] Liang Y, Yu D S, Chen H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 158501 (in Chinese) [梁燕, 于东升, 陈昊 2013 物理学报 **62** 158501]
- [18] Yu D S, Liang Y, Iu HHC, Chua L O 2014 *IEEE T Circuits-II* **61** 758
- [19] Liang Y, Chen H, Yu D S 2014 *IEEE T Circuits-II* **61** 299
- [20] Han J H, Song C, Gao S, Wang Y Y, Chen C, Pan F 2014 *Acs. Nano* **8** 10043
- [21] Abdelouahab MS, Lozi R, Chua L 2014 *Int. J. Bifurcat Chaos* **24** 1430023
- [22] Fouda M E., Radwan A G 2014 *Circ. Syst. Signal Pr* **33** 1573
- [23] Sah M P, Budhathoki R K, Yang C, Kim H 2014 *J. Semicond Tech. Sci.* **14** 750
- [24] Yin Z Y, Tian H, Chen G H, Chua L O 2015 *IEEE T Circuits-II* **62** 402
- [25] Bao B C, Wang C L, W G H, Q X H 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 020504 (in Chinese) [包伯成, 王春丽, 武花干, 乔晓华 2014 物理学报 **63** 020504]
- [26] Bao B C, Liu Z, Henry L 2014 *Electron Lett.* **50** 1344

# Study on dynamical characteristics of a meminductor model and its meminductor-based oscillator\*

Yuan Fang Wang Guang-Yi<sup>†</sup> Jin Pei-Pei

(Key Laboratory of RF Circuits and Systems, Ministry of Education of China; Institute of Modern Circuits and Intelligent Information, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

( Received 17 April 2015; revised manuscript received 26 June 2015 )

## Abstract

A meminductor is a new type of nonlinear inductor with memory, which is generalized from the concept of a memristor and defined by current-flux. This paper presents a flux-controlled meminductor model with a smooth quadratic function and designs its corresponding equivalent circuit, which can be used as an emulator to imitate the behavior of a meminductor when actual solid-state meminductor has not yet appeared. Furthermore, a new chaotic oscillator is designed based on this meminductor model, and the dynamical behaviors of the oscillator are investigated, such as chaotic attractors, equilibrium points, Lyapunov exponent spectrum, bifurcations and dynamical map of the system, etc. Bifurcation analysis shows that the meminductor can make the oscillator produce periodic and chaotic oscillations. Moreover, an analog circuit is designed to confirm the correction of the proposed oscillator using the proposed equivalent circuit model of meminductor. It is shown that the experimental results are in good agreement with that of the numerical simulations and the theoretical analysis.

**Keywords:** meminductor, oscillation, chaos

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Jn, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.64.210504

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61271064, 60971046, 61401134), the Natural Science Foundations of Zhejiang Province (Grant Nos. LZ12F01001, LQ14F010008), and the Program for Zhejiang Leading Team of S&T Innovation, China (Grant No 2010R50010).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wanggyi@163.com](mailto:wanggyi@163.com)