

多谐波脉冲星信号时延估计方法

宋佳凝 徐国栋 李鹏飞

Multiple harmonic X-ray pulsar signal phase estimation method

Song Jia-Ning Xu Guo-Dong Li Peng-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 219702 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.219702

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.219702>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I21>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种新的X射线脉冲星信号模拟方法

[A new simulation method of X-ray pulsar signals](#)

物理学报.2015, 64(21): 219701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.219701>

标定脉冲星导航探测器的荧光X射线光源

[Fluorescence X-ray source used for calibrating the detector of X-ray navigation](#)

物理学报.2015, 64(14): 149701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.149701>

一种脉冲星信号模拟新方法

[A new method for the pulsar signals simulation](#)

物理学报.2014, 63(21): 219701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.219701>

X射线脉冲轮廓稳定性对导航精度的影响

[Effect of stability of X-ray pulsar profiles on range measurement accuracy in X-ray pulsar navigation](#)

物理学报.2014, 63(6): 069701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.069701>

噪声模态单元预判的经验模态分解脉冲星信号消噪

[Empirical mode decomposition pulsar signal denoising method based on predicting of noise mode cell](#)

物理学报.2013, 62(20): 209701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.209701>

## 多谐波脉冲星信号时延估计方法\*

宋佳凝<sup>1)</sup> 徐国栋<sup>1)†</sup> 李鹏飞<sup>2)</sup>

1)(哈尔滨工业大学, 卫星技术研究所, 哈尔滨 150001)

2)(哈尔滨理工大学, 电气与电子工程学院, 哈尔滨 150001)

(2015年5月14日收到; 2015年9月21日收到修改稿)

针对脉冲星导航技术中延时估计这一关键问题, 提出了频域上直接使用脉冲星信号测量到达时间集合进行时延估计的方法——多谐波脉冲星信号时延估计 (MHSPE) 方法. 该方法建立在频域上相位时延的极大似然估计的基础上, 通过高次谐波对脉冲星观测信号提取出各谐波相位的极大似然估计, 然后取频谱上各谐波的幅值进行归一化作为各谐波相位的权值, 最后取各谐波相位的加权平均作为该时刻的相位估计. 理论上证得 MHSPE 算法对相位的估计是无偏、一致的, 相比于频域上一次谐波的极大似然估计, MHSPE 方法的信噪比随谐波数  $m$  的增加而增加, 当各谐波幅值相同时, 信噪比可提高  $m^{1/2}$  倍; 与脉冲星信号时延的克拉美罗界比较, 脉冲星信号时域的导数在频域上的反映就是各谐波分量的数量, 因此随着谐波次数的增加脉冲星信号时延估计可极大趋近克拉美罗界. 采用 RXTE 航天器对 Crab 脉冲星的实测数据检验 MHSPE 方法的性能, 实验结果表明, 针对低信噪比的脉冲星信号, MHSPE 可获得高精度的相位估计, 随观测时间增加, 估计精度快速收敛于克拉美罗界.

**关键词:** 脉冲星导航, 克拉美罗界, 极大似然估计, 谐波相位

**PACS:** 97.60.Gb, 95.75.Wx, 02.30.Nw

**DOI:** 10.7498/aps.64.219702

## 1 引言

脉冲星导航可实现长时间高精度的自主导航, 具有重要的工程应用价值和战略研究意义, 已成为导航技术的研究热点<sup>[1,2]</sup>. 脉冲星是一类高速稳定自转的中子星, 具有高强度的磁场向外辐射光子, 但由于脉冲星距太阳系通常都有几千光年<sup>[3]</sup>, 航天器接收到的 X 射线脉冲星信号十分微弱, 因此脉冲星导航技术的关键问题是从脉冲星信号中提取导航信息, 这一过程在脉冲星导航系统 (X-ray Pulsar-based Navigation, XNAV) 中也称为脉冲星信号到达时间的估计.

脉冲星信号最早是在射电天文望远镜下观测到的<sup>[4]</sup>, 射电脉冲星的到达时间测量技术已经非常成熟, 普遍采用 TaylorFFT 算法<sup>[5,6]</sup>, 首先利用星历消除多普勒效应引起的尺度伸缩, 即将脉冲到

达时刻通过时间转换方程转换到太阳系质心 (Solar System Barycenter, SSB) 处, 再进行轮廓累积形成累积观测轮廓, 与 SSB 处的脉冲星轮廓模型建立关系, 通过傅里叶变换确定脉冲星信号的到达时间. XNAV 中到达时间的测量方法大多继承了射频段 TaylorFFT 的算法, 均通过累积轮廓与标准模板比对计算到达时间延时. 早在 2004 年 NASA 提出的 XNAV 中的时间测量<sup>[7]</sup>的基本思想就是以 SSB 为时空基准点, 通过时间转换与历元折叠获得测量脉冲轮廓, 采用 TaylorFFT 算法进行时延估计. 由于脉冲星 XNAV 中实时性的要求, 使得脉冲星信号累积时间短, 轮廓的信噪比较低, 且航天器的运动以及累积轮廓时 bins 的不同都将引起轮廓的尺度伸缩, 因此时延估计精度较差. 文献<sup>[8]</sup>提出基于双谱的脉冲星累积轮廓时间延迟测量方法, 利用双谱抑制高斯白噪声, 从而提高时间延迟的测量精度. 由

\* 国家高技术研究发展计划 (863 计划)(批准号: 2008AA8051602) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xgdong\_61@163.com

于双谱算法运算量大, 考虑星载计算机的运算能力有限, 文献 [9] 提出三阶互小波累积量粗估计与抛物面内插法精确测量累积轮廓的时间延迟, 降低了时延估计的运算量, 但估计精度仍受到 bins 的约束. 同时, 文献 [10] 提出了利用历元折叠进行相位时延估计的互相关算法及非线性最小方差法. 然而上述时延估计的算法中, 利用累积轮廓进行时延估计过程必须知道航天器速率的精确信息, 同时脉冲星标准轮廓的稳定性也将对相位测量精度产生影响 [11], 且基于历元折叠的估计器并不是渐进有效的, 为解决这些问题, 文献 [12] 提出直接使用测量到的到达时间集 (time of arrivals, TOAs), 利用包含时间集的概率密度函数进行脉冲延迟的最大似然估计, 为 XNAV 中相位时延的估计提供了新的思路, 但是求解时延无法得到解析解, 需采用迭代优化、网格搜索等算法, 同时须注意结果陷入局部最优点.

直接使用 TOAs 进行时延估计, 可以极大程度利用脉冲星信号的信息, 同时避免历元折叠对时延估计精度的影响. 脉冲星信号 TOAs 是具有周期性的, 在频域上对 TOAs 进行处理, 相位延迟的表达式形式简单, 计算量小. 为此, 本文提出多谐波脉冲

星信号时延估计 (Multiple Harmonic X-ray Pulsar Signal Phase Estimation, MHSPE) 方法. 首先给出频域上脉冲星相位时延的极大似然估计, 由于脉冲星周期信号高次谐波分量仍含有相位时延信息, 通过多次谐波对脉冲星观测信号提取出多个相位信息, 然后取加权均值作为该时刻的相位估计. 为衡量 MHSPE 算法的估计性能, 文中给出了脉冲星信号的克拉美罗界, 通过对 Crab 脉冲星实测数据的仿真验证, MHSPE 算法可趋近于克拉美罗界.

## 2 频域上相位延迟的极大似然估计

根据 RXTE 航天器观测 Crab 脉冲星的实测数据统计分析在轨运行的航天器接收到 X 射线脉冲星信号的特征. 当探测器有效探测面积约为  $0.3 \text{ m}^2$ , 时间分辨率为  $100 \mu\text{s}$  [13], 连续观测时间为  $2716 \text{ s}$  时, Crab 脉冲星的观测数据统计如表 1 所示, 从表中数据可以看出 TOAs 取值超过 1 的值约为 10%, 表明探测器在同一时刻接收到多个光子的事件约占 10%, TOAs 序列并不是严格的 0-1 序列. 观测时间  $100 \text{ s}$  的脉冲星 TOAs 的频谱如图 1 所示, 从图中可以看出 X 射线光子序列是有周期性的.

表 1 RXTE 对 Crab 脉冲星观测数据的统计  
Table 1. Statistics of the observed Crab pulsar data by RXTE.

$x[n]$	0	1	2	3	4	5	6	7
数目	16171089	8503924	2114857	330389	36408	3127	185	7
比例%	59.54	31.31	7.79	1.21	0.134	1.15	0.0681	0.0258

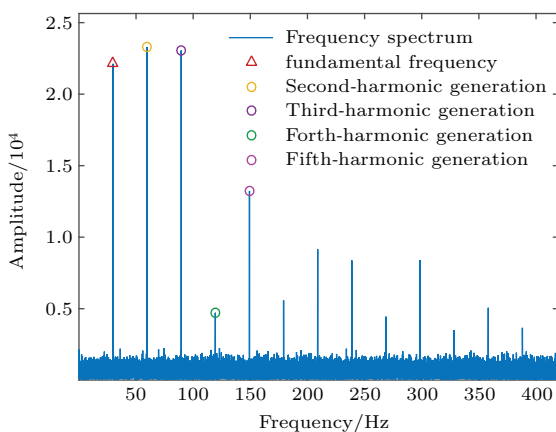


图 1 (网刊彩色) 脉冲星信号的频谱

Fig. 1. (color online) Spectrum of pulsar signal.

根据以上对 X 射线光子信号的统计分析, 为更准确的描述 TOAs 序列, 设 X 射线探测在固定时间

内记录的脉冲星光子的离散时间序列  $x[n]$  由  $p$  个复正弦信号与高斯白噪声组成:

$$x[n] = \sum_{i=1}^p A_i e^{j2\pi f_i n + j\phi_i} + z[n], \quad (1)$$

式中正弦信号的参数  $\{A_1, A_2, \dots, A_p; \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p; f_1, f_2, \dots, f_p\}$  依次为振幅, 相位和频率, 不失一般性, 假设这些参数均是需估计的未知常量. 时域上脉冲星信号的时间延迟对应于频域上相应时刻的相位差, 即每一个频率  $f_i$  均对应一个相位  $\phi_i$ ,  $\Delta\phi_i$  就反映了脉冲星信号的相位延迟, 其中  $f_1$  为脉冲星信号的基频, 也就是脉冲星信号周期的倒数, 对于所观测的脉冲星, 信号的周期是已知的. 基频  $f_1$  下求得的相位信息即可反映脉冲星信号的时间延时, 首先讨论基频  $f_1$  下相位的极大似然估计.

复高斯白噪声中信号  $\mathbf{x} = x[n]$  的概率密度函数为<sup>[14]</sup>

$$p(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^N \det(R_{zz})} \exp\left(-(\mathbf{x} - \mathbf{s})^H R_{zz}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{s})\right), \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{s} = [s[0], s[1], \dots, s[N-1]]^T$  为信号样本矢量;  $N$  为数据长度;  $R_{zz}$  为噪声的  $N \times N$  自相关矩阵, 对于白噪声,  $R_{zz} = \sigma_z^2 I$ , 因此(2)式可写为

$$p(\mathbf{x} - \mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^N \det(R_{zz})} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_z^2} (\mathbf{x} - \mathbf{s})^H (\mathbf{x} - \mathbf{s})\right). \quad (3)$$

对参数  $A_1, \phi_1, f_1$  的极大似然估计, 即求(3)式对于  $A_1, \phi_1, f_1$  的极大. 分析(3)式可知对于给定的信号,  $p(\mathbf{x} - \mathbf{s})$  的极大即为  $(\mathbf{x} - \mathbf{s})^H (\mathbf{x} - \mathbf{s})$  的极小, 则有

$$S(A_{c1}, f_1) = (\mathbf{x} - \mathbf{s})^H (\mathbf{x} - \mathbf{s}) = (\mathbf{x} - A_{c1} \mathbf{e}_1)^H (\mathbf{x} - A_{c1} \mathbf{e}_1), \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{e}_1 = [1, \exp(j2\pi f_1), \dots, \exp(j2\pi f_1(N-1))]^T$ ,  $A_{c1} = A_1 \exp(j\phi_1)$ . (4)式取得极小值时, 就是求  $A_{c1}$  的极大似然估计. 首先假设  $f_1$  已知, 则有

$$\hat{A}_{c1} = \frac{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_1} = \frac{\mathbf{e}_1^H \mathbf{x}}{\mathbf{e}_1^H \mathbf{e}_1} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f_1 n). \quad (5)$$

当(5)式中  $f_1$  取其极大似然估计  $\hat{f}_1$  时,  $\hat{A}_{c1}$  即为  $A_{c1}$  的极大似然估计. 进一步将  $\hat{A}_{c1}$  代入到(4)式中化简可得

$$S(\hat{A}_{c1}, f_1) = (\mathbf{x} - \hat{A}_{c1} \mathbf{e}_1)^H (\mathbf{x} - \hat{A}_{c1} \mathbf{e}_1) = \mathbf{x}^H (\mathbf{x} - \hat{A}_{c1} \mathbf{e}_1) - \hat{A}_{c1}^H \mathbf{e}_1^H (\mathbf{x} - \hat{A}_{c1} \mathbf{e}_1). \quad (6)$$

对于  $f_1$ , 当使(6)式中  $S(\hat{A}_{c1}, f_1)$  达到极小值, 将(5)式代入到(6)式中, 易知(6)式中第二项为零, 由此可得

$$S(\hat{A}_{c1}, f_1) = \mathbf{x}^H \mathbf{x} - \hat{A}_{c1} \mathbf{x}^H \mathbf{e}_1 = \mathbf{x}^H \mathbf{x} - \frac{1}{N} |\mathbf{e}_1^H \mathbf{x}|^2. \quad (7)$$

由(7)式可知, 当  $S(\hat{A}_{c1}, f_1)$  取极小, 则有

$$\frac{1}{N} |\mathbf{e}_1^H \mathbf{x}|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi f_1 n) \right|^2. \quad (8)$$

由(8)式可以看出, 对于  $f_1$  达极大, 根据现代谱估计理论, 其频率的极大似然估计就是周期图的最大值所对应的频率, 结合(5)式可知相位的极大似然估计为

$$\hat{\phi}_1 = \arctan \left\{ \frac{\text{Im} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi \hat{f}_1 n) \right]}{\text{Re} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi \hat{f}_1 n) \right]} \right\}. \quad (9)$$

观察(9)式可知, 频域上相位时延的极大似然估计充分利用了信号的所有信息, 精度仅与频率的估计精度以及信号本身有关. 频率  $f_1$  的估计越接近真值, 相位的估计精度就越高. 从上述分析过程可知  $f_1$  的极大似然估计可从其周期图最大值对应的获得, 根据短时间观测数据采用FFT或者最大相关方差搜索等算法获得脉冲星周期其近似值, 受噪声的影响周期精度较差, 对Crab脉冲星的观测文件FS\_b36a20f-b36acab分析, 当采样频率为10000 Hz时, 2716 s的数据进行频域分析, 得到的脉冲星信号频率精度为  $1 \times 10^{-4}$  Hz, 且在XNAV中若累积信号时长为几十秒, 由FFT估计出的频率很难满足导航系统的要求, 考虑到脉冲星信号周期(信号频率)是已知的, 且频率一般可精确到  $1 \times 10^{-10}$  Hz<sup>[15]</sup>, 因此频率估计环节可以省去, 直接使用已知的信号频率对相位进行估计, 避免频率估计误差对相位估计精度的影响.

### 3 多谐波脉冲星信号时延估计

#### 3.1 MHSPE方法

通过基频频率可以求得相位的极大似然估计, 然而由于现有探测器接收到的脉冲星信号信噪比较低, 相位的估计精度仍难满足高精度导航的要求. 对Crab脉冲星信号进行频谱分析, 周期图中其2倍频处的幅值比基频处幅值更大, 且考虑到脉冲星周期信号高次谐波分量中仍包含脉冲星的相位信息, 提出多谐波脉冲星信号时延估计(MHSPE)方法.

设导航脉冲星周期信号各谐波频率为  $\{f_i\} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ,  $m$  为脉冲星周期信号谐波数量. 对第 1 节给出的基频下相位信息的估计方法进一步推广可得各谐波相位的极大似然估计, 将 (9) 式中  $\hat{f}_1$  替换为  $\hat{f}_i$ , 可得相应的相位  $\phi_i$ , 即

$$\hat{\phi}_i = \arctan \left[ \frac{\text{Im} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi\hat{f}_i n) \right)}{\text{Re} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi\hat{f}_i n) \right]} \right],$$

$$i = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

式中,  $\hat{f}_i = f_i = i f_1$ . 根据各谐波与噪声的不相关性, 取

$$\hat{\phi} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{i} \times \arctan \left[ \frac{\text{Im} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\hat{f}_i n) \right)}{\text{Re} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\hat{f}_i n) \right)} \right]. \quad (11)$$

注意到频谱上各谐波频率对应的幅值不同, 幅值的大小反映了该频率下的信号强度, 因此将各次谐波幅值的比例关系作为  $\hat{\phi}_i(t)$  的权值  $w_i$ , 进行加权求和, 取

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \frac{1}{i} \arctan \left[ \frac{\text{Im} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\hat{f}_i n) \right)}{\text{Re} \left( \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \exp(-j2\pi\hat{f}_i n) \right)} \right],$$

$$w_i = A_i / \sum_{i=1}^m A_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

采用 MHSPE 估计的脉冲星信号的信噪比较普通频域分析获得脉冲星信号的信噪比明显提高, 当信号各谐波分量的幅值相同时, 采用  $m$  次谐波估计脉冲星相位, 其信噪比可以提高一次谐波的  $m^{1/2}$  倍. 证明如下.

设  $t$  时刻, 脉冲星相位信息的真值为  $\varphi(t)$ , 则通过 MHSPE 算法估计的脉冲星信号的相位为

$$\phi(t) = \varphi(t) + v(t), \quad (13)$$

式中,  $v(t)$  为高斯白噪声, 其概率分布为  $p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}$ , 则  $\phi(t)$  的数学期望、方差分别为

$$E(\phi) = E(\phi + v) = \varphi, \quad (14)$$

$$D(\phi) = E[\phi - E(\phi)]^2 = \sigma^2. \quad (15)$$

MHSPE 中采用多次谐波多相位进行估计, 则有

$$\hat{s}(t) = \left( \phi_1(t) + \frac{\phi_2(t)}{2} + \dots + \frac{\phi_m(t)}{m} \right) / m = \bar{\phi}(t), \quad (16)$$

其信号的有效值为

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{\phi}^2(t)} &= \sqrt{\left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left( \frac{\phi_m(t)}{m} \right) \right)^2} \\ &= \sqrt{\left( s + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i \right)^2} \\ &= \sqrt{s^2 + 2s \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i + \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i \right)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

对于高斯白噪声, 有

$$E(v_i) = 0, \quad E(v_i v_j) = \sigma^2 \delta(i - j). \quad (18)$$

将 (18) 式代入到 (17) 式中, (17) 式化简为

$$\sqrt{\bar{\phi}^2(t)} = \sqrt{s^2 + \frac{1}{m} \sigma^2}. \quad (19)$$

则采用 MHSPE 估计的脉冲星信号的信噪比为

$$\left( \frac{S}{N} \right)_m = \frac{s}{\frac{1}{\sqrt{m}} \sigma} = \sqrt{m} \frac{s}{\sigma} = \sqrt{m} \frac{S}{N}. \quad (20)$$

由此得证: 信号各谐波分量的幅值相同时, MHSPE 算法中取  $m$  次谐波, 脉冲星信号的信噪比提高为一次谐波的  $m^{1/2}$  倍. 但对于实际的物理信号, 其谐波信号的幅值一般会随着谐波次数的增加而衰减, 因此谐波数  $m$  的取值是有限的, 应针对信号的特征, 结合信号的频谱适当的选取谐波数  $m$ .

### 3.2 MHSPE 方法精度分析

下面分析 MHSPE 算法的估计性能, 讨论 MHSPE 估计相位的误差、方差. 首先考虑基频  $f_1$  下估计的相位误差, 由 (5) 式可知,

$$\hat{A}_{c1} = \frac{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_1} = \frac{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} (A_{c1} \mathbf{e}_1 + \mathbf{z})}{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_1}. \quad (21)$$

对上式进一步整理有

$$E(\hat{A}_{c1}) = A_{c1} + \frac{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} E(\mathbf{z})}{\mathbf{e}_1^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_1} = A_{c1}. \quad (22)$$

由 (22) 式可以看出,  $\hat{A}_{c1}$  是无偏的估计, 又因为频率  $\hat{f}_1$  的估计也是无偏的, 根据  $A_{c1} = A_1 \exp(j\phi_1)$  的关系可知, 当  $\hat{A}_{c1}$  与  $\hat{f}_1$  确定时,  $\hat{\phi}_1$  惟一确定, 且

当  $E(\hat{A}_{ci}) = A_{ci}$ ,  $E(\hat{f}_i) = f_i$  时, 有  $E(\hat{\phi}_i) = \phi_i$ , 即 (9) 式对相位的估计是无偏的.

进一步推广, 对于各谐波频率为  $\{f_i\} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  的脉冲星周期信号有  $A_{ci} = A_i \exp(j\phi_i)$ ,  $\mathbf{e}_i = [1, \exp(j2\pi f_i), \dots, \exp(j2\pi f_i(N-1))]^T$ , 同样有  $E(\hat{A}_{ci}) = A_{ci}$ ,  $E(\hat{f}_i) = f_i$ , 因此可知各谐波相位的估计是无偏的, 即  $E(\hat{\phi}_i) = \phi_i$ .

根据 (12) 式对  $\phi$  的定义  $\phi = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \frac{1}{i} \phi_i$  有

$$\begin{aligned} E(\hat{\phi}) &= \sum_{i=1}^m w_i \cdot \frac{1}{i} E(\hat{\phi}_i) \\ &= \sum_{i=1}^m w_i \cdot \frac{1}{i} \phi_i = \phi. \end{aligned} \quad (23)$$

由此可得 MHSPE 的相位  $\hat{\phi}$  是无偏估计的.

下面考察 MHSPE 的相位  $\hat{\phi}$  的估计误差方差, 由 (5) 式推广可知,

$$\hat{A}_{ci} = \frac{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{x}}{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_i} = \mathbf{K}_i^H \mathbf{x}, \quad (24)$$

式中, 取  $\mathbf{K}_i^H = \frac{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1}}{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_i}$ , 由  $\mathbf{K}_i^H$  定义易知  $\mathbf{K}_i^H \mathbf{e}_i = 1$ , 因此有

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{A}_{ci}) &= E[|\hat{A}_{ci} - A_{ci}|^2] \\ &= E[|\mathbf{K}_i^H \mathbf{x} - \mathbf{K}_i^H \mathbf{e}_i A_{ci}|^2] \\ &= E[\mathbf{K}_i^H (\mathbf{x} - \mathbf{e}_i A_{ci}) (\mathbf{x} - \mathbf{e}_i A_{ci})^H \mathbf{K}_i] \\ &= \mathbf{K}_i^H R_{zz} \mathbf{K}_i, \end{aligned} \quad (25)$$

将  $\mathbf{K}_i^H$  代入到上式得

$$\text{var}(\hat{A}_{ci}) = \frac{1}{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_i}. \quad (26)$$

根据  $A_{ci}$  与  $\phi_i$  的关系有

$$\text{var}(\exp(j\hat{\phi}_i)) = \frac{1}{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_i A_i^2}. \quad (27)$$

对  $\exp(j\phi_i)$  在任意  $\phi_{i0}$  处进行泰勒展开,

$$\begin{aligned} \exp(j\phi_i) &= e^{j\phi_{i0}} + e^{j\phi_{i0}} (j\phi_i - j\phi_{i0}) \\ &\quad + \frac{(e^{j\phi_{i0}})^2}{2!} (j\phi_i - j\phi_{i0})^2 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

忽略  $O((j\phi_i - j\phi_{i0})^2)$  及其高阶项, 取其一阶展开项并代入到 (27) 式可得

$$\text{var}\left(e^{j\phi_{i0}} + e^{j\phi_{i0}} (j\hat{\phi}_i - j\phi_{i0})\right) \geq \frac{1}{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_i A_i^2}. \quad (29)$$

进一步化简上式左边可得

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\phi}_i) &\geq \frac{1}{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_i A_i^2} \cdot \frac{1}{(e^{j\phi_{i0}})(e^{j\phi_{i0}})^H} \\ &\geq \frac{1}{\mathbf{e}_i^H R_{zz}^{-1} \mathbf{e}_i A_i^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

由于脉冲星信号的噪声可视为高斯白噪声, 因此有  $R_{zz} = \sigma_z^2 \mathbf{I}$ ; 且根据  $\mathbf{e}_i$  的定义易知  $\mathbf{e}_i^H \mathbf{e}_i = N$ , 将上述结论代入到上式化简得

$$\text{var}(\hat{\phi}_i) \geq \frac{\sigma_z^2}{A_i^2 N}. \quad (31)$$

结合 (11) 式对  $\phi$  的定义, 因此有

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \text{var}\left(\sum_{i=1}^m w_i \cdot \frac{1}{i} \hat{\phi}_i\right). \quad (32)$$

由于各谐波相位与噪声的不相关性, 根据方差的性质将上式展开,

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\phi}) &\geq \sum_{i=1}^m \left( \frac{A_i^2}{\left(\sum_{i=1}^m A_i\right)^2} \cdot \frac{1}{i^2} \text{var}(\hat{\phi}_i) \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^m \left( \frac{A_i^2}{\left(\sum_{i=1}^m A_i\right)^2} \cdot \frac{1}{i^2} \cdot \frac{\sigma_z^2}{A_i^2 N} \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^m \left( \frac{\sigma_z^2}{A^2 N} \cdot \frac{1}{i^2} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

式中,  $A = \sum_{i=1}^m A_i$ . 由此得 MHSPE 算法对相位的估计误差方差, 由 (33) 式可以看出, 当观测时间趋近于无穷时, 估计误差方差  $\text{var}(\hat{\phi})$  会收敛到零, 这说明 MHSPE 估计器是一致的.

脉冲星信号的时延估计可看作一种参数估计问题, 最大似然参数估计问题的估计性能在理论上可以由克拉美罗界 (Cramer-Rao Bound, CRB) 来衡量, 克拉美罗界为任何无偏估计量的方差确定了估计方差下界. 脉冲星信号时延的克拉美罗界可由脉冲星信号轮廓的概率密度函数推导获得, 表达式为<sup>[16-18]</sup>:

$$\text{CRLB}(\hat{\tau}) = \left[ f^2 T_{\text{obs}} \int_0^1 \frac{[\lambda_s h'(\phi)]^2}{\lambda_b + \lambda_s h(\phi)} d\phi \right]^{-1}, \quad (34)$$

式中,  $f$  为脉冲星信号频率,  $T_{\text{obs}}$  为脉冲星信号观测时间长度,  $h(\phi)$  为脉冲星信号轮廓的概率密度

函数,  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\lambda_b$  与  $\lambda_s$  分别代表已知有效的背景噪声流量和脉冲星源的流量.

从 (34) 式中可以看出脉冲星信号时延估计的误差方差下界由  $f$ ,  $T_{\text{obs}}$ ,  $h(\phi)$ ,  $\lambda_s$  和  $\lambda_b$  确定, 其中  $f_0$ ,  $h(\phi)$  和  $\lambda_s$  是确定量, 因此脉冲星信号时延估计的 CRB 主要受脉冲星轮廓特征、观测时间及信号的信噪比影响.  $h'(\phi)$  为脉冲星信号轮廓概率密度函数的导数, 反应了脉冲星信号轮廓对时延估计精度的影响. 图 2 为 Crab 脉冲星的标准轮廓, 在观测时间为 100 s 下, 对于不同的  $\lambda_b$  和  $\lambda_s$ , 脉冲星信号时延的克拉美罗界曲面如图 3 所示.

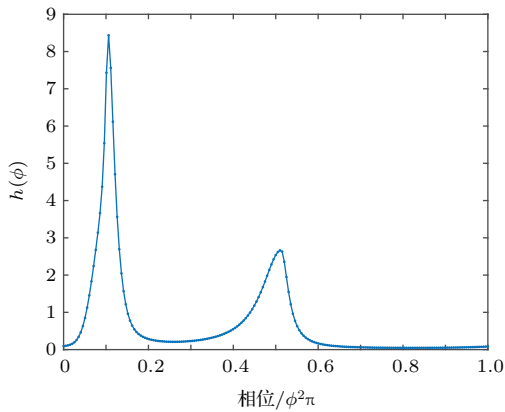


图 2 (网刊彩色) Crab 脉冲星轮廓

Fig. 2. (color online) Crab pulsar profile.

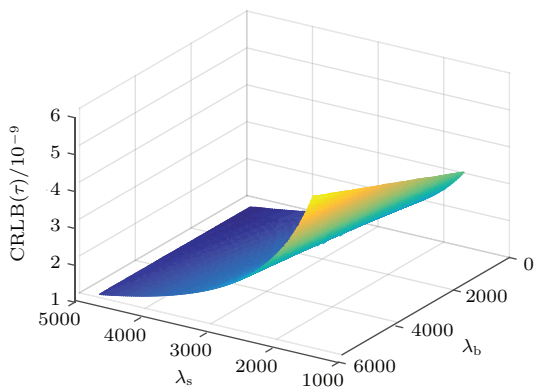


图 3 (网刊彩色) 观测时间 100 s 时的 CRLB( $\tau$ ) 面

Fig. 3. (color online) Surface of CRLB( $\tau$ ) in 100 s  $T_{\text{obs}}$ .

由图 3 可以看出在观测时间给定的情况下, 对于 Crab 脉冲星, 不同的  $\lambda_b$  和  $\lambda_s$  取值, 信号时延估计精度明显不同, 在实际情况下,  $\lambda_b$  和  $\lambda_s$  由长期累积观测的脉冲星流量密度及累积轮廓的脉冲宽度而定. 对观测片段进行历元折叠获得累积轮廓记为  $\lambda(t)$ ,  $\lambda(t)$  与归一化的标准轮廓按文献 [19] 定义的 X 射线光子流量密度  $\lambda(t) = \lambda_b + \lambda_s h(t)$  进行拟合,

从而确定  $\lambda_b$  和  $\lambda_s$  之间的比例关系, 再根据统计的该观测片段总光子流量密度为 5113.12 photons/s, 取  $\lambda_b$  和  $\lambda_s$  分别为 369.55 photons/s 和 4743.57 photons/s, 用来计算该观测片段脉冲星信号的 CRLB.

在  $\lambda_b$  和  $\lambda_s$  确定的情况下, 脉冲星轮廓的导数  $h'(\phi)$  越大越易于降低脉冲星信号时延估计的下界, 脉冲星信号时域的导数在频域上的反应就是各谐波分量的数量, 如果观测时间远大于脉冲星信号周期, 各谐波在其局部频域近似独立分布, 因此多谐波脉冲星信号时延估计能够较好的逼近 CRB 的下界.

#### 4 基于 RXTE 实测数据的仿真实验

为检验 MHSPE 算法在脉冲星导航中的性能, 采用 RXTE 航天器对 Crab 脉冲星的观测数据进行验证. 实验数据文件名为 FS37\_b36a20f-b36acab, 可从美国高能数据中心 (High Energy Astrophysics Science Archive Research Center, HEASARC) 的 FTP 上下载 [20]. 数据为 FITS 文件格式, 采用 HEASARC 提供的 FTOOLS 工具包在 Linux 系统下处理获得其他文件格式. 对 MHSPE 相位估计算法的检验在 Matlab 环境下进行.

由于实验数据为在轨观测的真实数据, RXTE 在轨运行时在一个轨道周期内仅半个轨道的位置可观测的 Crab 脉冲星, 加之姿态及视场的限制, 持续对 Crab 的观测时间一般较短, FS37\_b36a20f-b36acab 文件数据的持续观测时间约为 2716 s, 由此设计 MHSPE 算法的验证过程如下: 首先按照图 4 所示方法将 RXTE 航天器观测的 Crab 脉冲星光子时间集 TOAs 进行数据分组, 图中  $T$  为脉冲星信号周期, 每组分数据向后顺移  $T$  时间长度, 为消除脉冲星信号周期  $T$  缓慢变化影响, 在每次分组前, 通过 SSB 处建立的脉冲星信号周期模型及地球星历对  $T$  进行修正. 每间隔  $K$  个周期采用 MHSPE 算法计算一次相位.

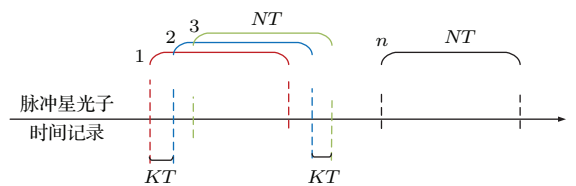


图 4 (网刊彩色) 仿真数据分组图示

Fig. 4. (color online) Emulational data groups block.

当取脉冲星号累积时间约为100 s ( $NT \approx 100$  s),  $K = 30$  (约1 s)进行一次MHSPE计算时,各谐波相位如图5所示.由于Crab脉冲星轮廓具有双峰,其频谱上二次谐波、三次谐波幅值较一次谐波幅值大.因此从图5中可以看出,二次谐波相位曲线与三次谐波相位曲线比一次谐波相位曲线更加平滑,说明二次谐波与三次谐波下的相位随机误差方差较小,四次谐波相位曲线较为粗糙.相比于各谐波曲线,经加权平均的多谐波曲线最平滑.由此看出MHSPE算法可提高频域上的相位估计精度.

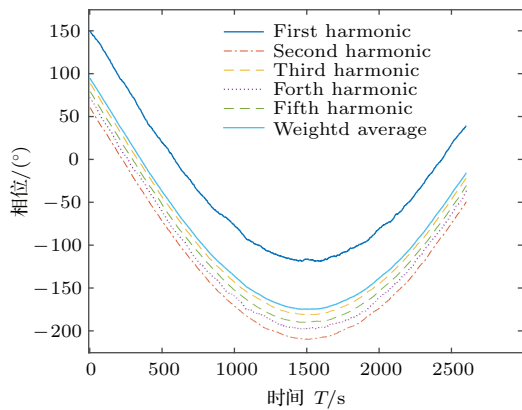


图5 (网刊彩色) 不同谐波下的相位估计

Fig. 5. (color online) Phase estimation in different harmonics.

对图5中各曲线进行拟合,用拟合的最大残差来衡量曲线的光滑程度,残差越小代表曲线越光滑,结果如表2所示,从统计结果可以看出,MHSPE算法的残差最小,优于各谐波相位曲线.

为定量分析MHSPE算法的性能,并与脉冲星相位时延估计克拉美罗界进行对比,将脉冲星相位信息转化为航天器位置信息,并与RXTE实测轨道数据进行比较,包含观测数据的轨道文件名为FPorbit\_Day2177.脉冲星信号累积时间约30 s和100 s时,结果如图6和图7所示.从图中可以看出,当脉冲星信号累积时间约为30 s时,由于信号累积观测时间较短,使得多谐波脉冲星时延估计算法的统计误差均方差较大,但仍能跟踪轨道而不发散.当脉冲星信号累积观测时间约为100 s时,MHSPE

算法的相位估计精度明显提高,与RXTE轨道投影符合良好.

MHSPE算法估计精度受累积观测时间的影响,根据Crab脉冲星的轮廓及信号源、背景噪声的统计经验,图8给出了观测Crab脉冲星不同观测时间下MHSPE算法的估计精度.从图中可以看出,根据该段观测片段的统计特性采用(33)式计算的MHSPE方差下限几乎与克拉美罗界重合,且随观测时间的增加,由MHSPE算法直接计算得到的投影轨道误差也趋近于克拉美罗界,因此对于脉冲星信号,MHSPE算法可认为是一种有效的相位估计器.

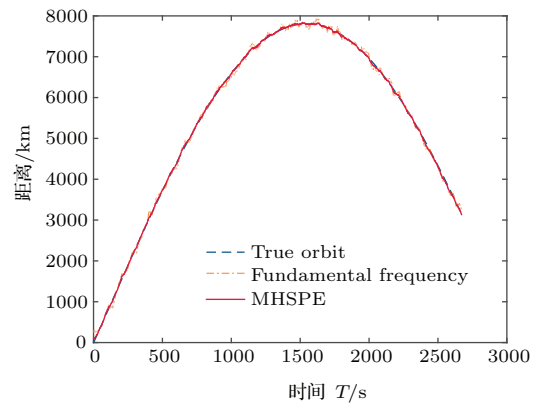


图6 (网刊彩色) 累积时间30 s时轨道投影

Fig. 6. (color online) Orbit projection in 30 s cumulative time.

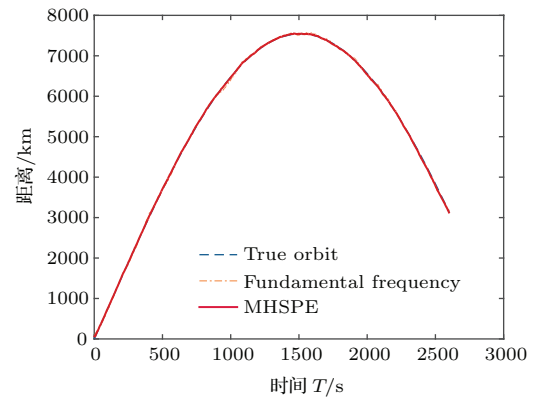


图7 (网刊彩色) 累积时间100 s时轨道投影

Fig. 7. (color online) Orbit projection in 100 s cumulative time.

表2 谐波相位曲线拟合残差

Table 2. Fitting residuals of harmonic phase curve.

谐波曲线	1次	2次	3次	4次	5次	MHSPE
拟合残差	58.922	25.191	20.238	52.499	19.949	19.451



表3 MHSPE算法估计误差标准差统计  
Table 3. Statistics of RMS error for MHSPE.

观测时间/s	30	100	260	500
MHSPE/m	$2.5690 \times 10^4$	$1.4669 \times 10^4$	$9.3625 \times 10^3$	$6.5639 \times 10^3$
(9)式/m	$7.2178 \times 10^4$	$3.4896 \times 10^4$	$1.7850 \times 10^4$	$8.9688 \times 10^3$

进一步统计MHSPE算法估计误差标准差,结果如表3所示.从表中标准差统计可以看出,与传统的频域分析相比,MHSPE算法在低信噪比下对相位的估计精度显著提高,采用MHSPE算法可以实现对TOAs在频域上对相位的直接估计,并获得较高的估计精度.实验结果表明,MHSPE算法更适合对低信噪比脉冲星信号进行时延估计.

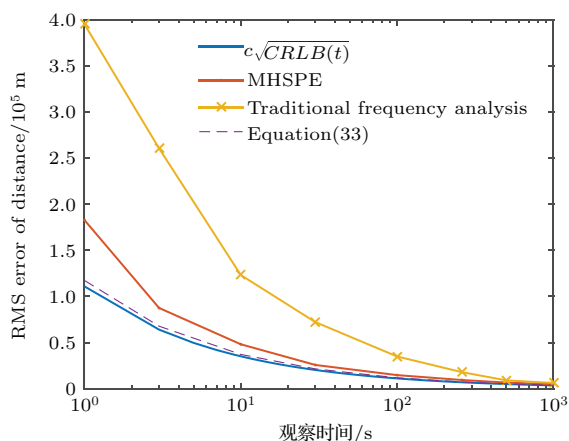


图8 (网刊彩色) MHSPE算法估计精度

Fig. 8. (color online) MHSPE method estimation precision.

## 5 结 论

时域上,相位的极大似然估计随观测时间的增加可以逼近CRB,是目前最有效脉冲星信号相位估计器,然而该方法不存在解析解,需要采用数值方法,通过网格迭代搜索才能获得相位的估计值,计算量大,相位估计精度受搜索步长的影响.针对以上问题,本文提出了直接使用脉冲星TOAs信号,在频域上对脉冲星进行时延估计的算法.首先讨论了频域上相位的极大似然估计,并给出了估计相位的解析表达式;针对低信噪比的脉冲星信号,提出利用多次谐波估计脉冲星信号相位,通过理论分析证明MHSPE算法在低信噪比下对相位的估计是无偏、一致的,可获得较好的相位估计精度,随谐波次数增加,时延估计精度可极大趋近克拉美罗界.通过对RXTE探测器观测到的Crab脉冲星信

号的实验验证了MHSPE算法的正确性及性能.实验结果表明,针对低信噪比的脉冲星信号,MHSPE可获得满足导航需求的相位估计精度.

## 参考文献

- [1] Shuai P, Li M, Chen S L, Huang Z 2009 *The principle and method the X-ray pulsar-Based navigation system* (Beijing: China Astronautic Publishing House) p20 (in Chinese) [帅平, 李明, 陈绍龙, 黄震 2009 X射线脉冲星导航系统原理与方法(北京:中国宇航出版社)第20页]
- [2] Zhou Q Y, Ji J F, Wang T 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 019701 (in Chinese) [周庆勇, 姬剑锋, 任红飞 2013 物理学报 **62** 019701]
- [3] Zhu J, Ji P Y 2008 *Chin. Phys. B* **17** 356
- [4] Hewish A, Bell S J, Pilkington J D H, Scovett P F, Collins R A 1968 *Nature* **217** 709
- [5] Taylor J H 1992 *Philos. Trans. Roy. Soc.* **341** 117
- [6] Liao S L, Vernon R J 2009 *IEEE transactions on Antennas and Propagation* **57** 2068
- [7] Pines D J 2004 *DAR-PA/TTO* **571** 4339
- [8] Xie Z H, Xu L P, Ni G R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6683 (in Chinese) [谢振华, 许录平, 倪广仁 2008 物理学报 **57** 6683]
- [9] Su Z, Xu L P, Wang T 2011 *Journal of Astronautics.* **32** 1256 (in Chinese) [苏哲, 许录平, 王婷 2011 宇航学报 **32** 1256]
- [10] Emadzadeh A A, Speyer J L, Golshan A 2009 *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conferenc*, Chicago, August 10—13, 2009 p5974
- [11] Sun H F, Bao W M, Fang H Y, Li X P 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 069701 (in Chinese) [孙海峰, 包为民, 方海燕, 李小平 2014 物理学报 **63** 069701]
- [12] Emadzadeh A A, Speyer J L 2010 *IEEE Transactions on Signal Processing* **58** 4484
- [13] Jahoda K, Swank J H, Cues A B, Stark M J, Strohmayer T, Zhang W 1996 *Proc. SPIE 2808, EUV, X-Ray, and Gamma-Ray Instrumentation for Astronomy VII*, United States, August 4, 1996 p59
- [14] Kay S M (translated by Huang J G) 1994 *Modern Spectral Estimation: Theory and Application* (Beijing: Science Press) pp326–331 (in Chinese) [Key S M 著(黄建国译) 1994 现代谱估计:原理与应用(北京:科学出版社)第326—331页]

- [15] Rawley L, Stinebring D, Taylor J 1986 *Proceedings of the Eighteenth Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Applications and Planning Meeting*, Washington, December 1986 p453
- [16] Emadzadeh A A 2009 *Ph. D. Dissertation* (Los Angeles: University of California)
- [17] Li J X, Ke X Z 2011 *Chinese Astronomy and Astrophysics* **35** 19
- [18] Nguyen D T, Renaux A, Boyer R 2014 *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **50** 786
- [19] Golshan A R, Sheikh S I *Proceedings of the 63rd Annual Meeting of the Institute of Navigation* Cambridge, April 23–25, 2007, p413
- [20] Index of /FTP/rxte/data/archive/AO4/P40805/40805-01-05-000 <http://heasarc.gsfc.nasa.gov/FTP/rxte/data/archive/AO4/P40805/40805-01-05-000/> [2014-10-12].

# Multiple harmonic X-ray pulsar signal phase estimation method\*

Song Jia-Ning<sup>1)</sup> Xu Guo-Dong<sup>1)†</sup> Li Peng-Fei<sup>2)</sup>

1) (Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

2) (School of Electrical and Electronic Engineering, Harbin Institute of Science and Technology, Harbin 150001, China)

( Received 14 May 2015; revised manuscript received 21 September 2015 )

## Abstract

Pulsars, a small portion of celestial sources that emit radiation at varying intensity, provide new possible navigation algorithms which are different from steady point sources. Time-delay estimation is one of the key aspects of pulsar-based navigation technology. Previous work for pulse phase estimation uses a maximum likelihood estimator (MLE) for the phase-in time domain, which is seen as one of the most useful phase estimators. However, the analytic solution for phase cannot be found using MLE. As a result, a brute-force method involving nested, iterative grid-searches is needed to solve this MLE issue, which leads to lots of computations. In order to solve this problem, a multiple harmonic X-ray pulsar signal phase estimation (MHSPE) method is proposed. This method uses the times of arrivals (TOAs) measured pulsar signal to estimate the time-delay in the frequency domain. In this paper, firstly we use the arrival time to derive the maximum-likelihood (ML) estimation of phase-delay by fundamental frequency, then an analytic expression for the fundamental frequency phase is obtained. The MHSPE method based on the fundamental frequency phase equation, calculates different harmonic phases by generalizing the analytic expression of fundamental frequency phase, and the normalized amplitude of each harmonic in the spectrum is used as the weight of each harmonic phase. Finally, the weighted average of harmonic phases, which is given by the final analytic expression, is used as the estimation of the moment. To evaluate the MHSPE method, the error and variance equations are calculated and the MHSPE method is demonstrated to be unbiased and consistent. Moreover, by comparing with the ML estimation of the first harmonic, if the amplitudes of harmonic in the spectrum are almost the same, the signal-to-noise ratio (SNR) of MHSPE improves  $m^{1/2}$  times when the number of harmonic waves is  $m$ . Compared with the Cramer-Rao bound of pulsar time-delay estimation, the derivative of pulsar signal in the time domain reflects the number of harmonic waves in the frequency domain. Hence, the MHSPE can greatly approximate to the Cramer-Rao bound for the estimation of pulsar signal time-delay when the harmonic number increases. Finally, we utilize the TOAs of Crab pulsar, observed by Rossi X-ray timing explorer (RXTE) spacecraft, to verify the performance of MHSPE. The results show that for low SNR of pulsar signal, MHSPE can obtain high precision phase estimations. When the amplitude of the harmonic in the spectrum is larger, the estimation variance of the harmonic phase tends to be smaller. The projection orbit determined by MHSPE method can match the projection of RXTE in the direction of Crab pulsar, with the observed time increasing, the estimation accuracy converges rapidly to Cramer-Rao bound.

**Keywords:** pulsar based navigation, Cramer-Rao bound, maximum-likelihood estimate, harmonic phase

**PACS:** 97.60.Gb, 95.75.Wx, 02.30.Nw

**DOI:** 10.7498/aps.64.219702

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2008AA8051602).

† Corresponding author. E-mail: [xgdong\\_61@163.com](mailto:xgdong_61@163.com)