

部分相干双曲余弦厄米高斯光束在非 Kolmogorov 大气湍流中的传输特性

刘李辉 吕炜煜 杨超 麦灿基 陈德鹏

Propagation properties of partially coherent Hermite-cosh-Gaussian beams in non-Kolmogorov turbulence

Liu Li-Hui Lü Wei-Yu Yang Chao Mai Can-Ji Chen De-Peng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 034208 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.034208

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034208>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I3>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

激光二极管双端直接抽运混合腔板条激光器

[Laser diode double-end-direct-pumped slab laser with hybrid resonator](#)

物理学报.2015, 64(1): 014203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.014203>

激光二极管抽运的高重频高平均功率 Nd:YAG 激光器

[Laser diode pumped Nd:YAG laser with high repetition and high average power](#)

物理学报.2014, 63(22): 224204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.224204>

激光脉冲前后沿相干叠加对多程放大的影响

[Effect of laser coherent superposition in multi-pass amplification process](#)

物理学报.2014, 63(18): 184205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.184205>

纳米硅上的弯曲表面效应及其特征发光

[Curved surface effect and characteristic emission of silicon nanostructures](#)

物理学报.2014, 63(3): 034201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.034201>

像散椭圆高斯光束的  $M^2$  因子矩阵的理论及实验研究

[Theoretical and experimental study on  \$M^2\$  factor matrix for astigmatic elliptical Gaussian beam](#)

物理学报.2013, 62(19): 194202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.194202>

# 部分相干双曲余弦厄米高斯光束在非Kolmogorov大气湍流中的传输特性

刘李辉<sup>†</sup> 吕炜煜 杨超 麦灿基 陈德鹏

(西北核技术研究所, 西安 710024)

(2014年6月22日收到; 2014年7月29日收到修改稿)

基于广义 Huygens-Fresnel 原理和非 Kolmogorov 大气湍流折射率起伏谱密度函数, 采用 Wigner 分布函数的二阶矩方法, 推导出了在大气湍流中传输的部分相干双曲余弦厄米高斯光束束宽和  $M^2$  因子的解析表达式. 研究表明: 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离的增大而增大; 光束阶数越大、相干长度越小、双曲余弦参数越小, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子受大气湍流影响越小; 相对束宽随束腰宽度的增大存在极大值, 在一定的相干长度范围内, 归一化  $M^2$  因子随束腰宽度的增大存在极小值; 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随广义指数的变化均存在极大值, 随内尺度的增大而逐渐减小, 随外尺度的增大几乎没有变化.

**关键词:** 部分相干双曲余弦厄米高斯光束, 非 Kolmogorov 谱, 大气湍流

**PACS:** 42.55.-f, 47.11.Kb, 42.68.Bz

**DOI:** 10.7498/aps.64.034208

## 1 引言

激光在大气湍流中的传输不仅具有一定的理论研究价值, 而且对于激光在自由空间中通信、空间成像、遥感和跟踪等应用具有实际意义, 所以近年来激光在大气湍流中的传输性质得到广泛研究<sup>[1-24]</sup>. 这些研究主要集中在完全相干或部分相干的厄米高斯 (Hermite-Gaussian) 光束、余弦高斯 (cosine-Gaussian) 光束、双曲余弦高斯 (cosh-Gaussian) 光束、双曲正弦高斯 (sinh-Gaussian) 光束和高斯-谢尔模型 (Schell-model) 光束, 采用的大气湍流折射率起伏谱密度函数主要是 Kolmogorov 谱或改进型 Kolmogorov 谱 (广义指数为 11/3).

1997 年 Casperson 等<sup>[24-26]</sup> 从 Helmholtz 方程出发证明了厄米正弦高斯函数的存在, 并提出了用正弦高斯光阑和光腔产生该激光的方法, 作为其特例的双曲余弦高斯光束也逐步被加入厄米高阶项和空间相干度, 并形成了部分相干双曲余弦厄米高斯光束 (partially coherent Hermite-cosh-Gaussian beams, HChG). 由于其交叉谱密度函数的复杂性,

关于它在大气湍流中传输特性的研究较少. Wu 等<sup>[10]</sup> 研究了光学参数对在 Kolmogorov 大气湍流中传输的 HChG 光束束宽的影响, 但是并没有考虑  $M^2$  因子随不同的非 Kolmogorov 大气湍流内尺度、外尺度、广义指数和光学参数的变化情况. 本文基于广义 Huygens-Fresnel 原理和非 Kolmogorov 大气湍流折射率起伏谱密度函数, 采用 Wigner 分布函数的二阶矩方法, 推导出了在非 Kolmogorov 大气湍流中传输的 HChG 光束束宽和  $M^2$  因子的解析表达式, 并根据此表达式, 计算得到了相对束宽和归一化  $M^2$  因子随光学参数 (光束阶数、束腰宽度、相干长度、双曲余弦参数) 改变的数值曲线, 得到了相对束宽和归一化  $M^2$  因子随内尺度、外尺度和广义指数改变的数值曲线, 研究内容具有一定的理论意义和实际应用价值.

## 2 理论模型

HChG 光束在入射面  $z = 0$  处的交叉谱密度函数为<sup>[10]</sup>

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: liulihuiyang@sina.com

$$\begin{aligned}
 & W(\rho'_1, \rho'_2, z=0) \\
 = & H_m \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega} \rho'_{1x} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega} \rho'_{1y} \right) \exp \left( -\frac{\rho'^2_{1x} + \rho'^2_{1y}}{\omega^2} \right) \\
 & \times \cosh(\Omega \rho'_{1x} + \Omega \rho'_{1y}) \exp \left[ -\frac{(\rho'_{1x} - \rho'_{2x})^2}{2\sigma^2} \right] \\
 & \times H_m \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega} \rho'_{2x} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega} \rho'_{2y} \right) \exp \left( -\frac{\rho'^2_{2x} + \rho'^2_{2y}}{\omega^2} \right) \\
 & \times \cosh(\Omega \rho'_{2x} + \Omega \rho'_{2y}) \\
 & \times \exp \left[ -\frac{(\rho'_{1y} - \rho'_{2y})^2}{2\sigma^2} \right], \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中,  $\rho'_1 = \rho'_{1x}\mathbf{x} + \rho'_{1y}\mathbf{y}$ ,  $\rho'_2 = \rho'_{2x}\mathbf{x} + \rho'_{2y}\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  表示正交坐标系单位矢量,  $H_m$  表示  $m$  阶 Hermite 多项式,  $\omega$  表示束腰宽度,  $\Omega$  表示双曲余弦参数,  $\sigma$  表示相干长度.

基于广义 Huygens-Fresnel 原理, HChG 光束通过大气湍流的交叉谱密度函数为<sup>[27]</sup>

$$\begin{aligned}
 & W(\rho, \rho_d, z) \\
 = & \left( \frac{k}{2\pi z} \right)^2 \iint W(\rho', \rho'_d, 0) \\
 & \times \exp \left\{ \frac{ik}{\pi} [(\rho - \rho')^2 - (\rho_d - \rho'_d)^2] \right. \\
 & \left. - H(\rho_d, \rho'_d, z) \right\} d^2 \rho' d^2 \rho'_d, \quad (2)
 \end{aligned}$$

其中,  $k = 2\pi/\lambda$  表示波数,  $\rho = (\rho_1 + \rho_2)/2$ ,  $\rho_d = \rho_1 - \rho_2$ ,  $\rho' = (\rho'_1 + \rho'_2)/2$ ,  $\rho'_d = \rho'_1 - \rho'_2$ ,  $\exp[-H(\rho_d, \rho'_d, z)]$  是湍流引起的附加项.

$$\begin{aligned}
 & H(\rho_d, \rho'_d, z) \\
 = & 4\pi^2 k^2 z \int_0^1 d\zeta \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa |\rho'_d \zeta + (1 - \zeta)\rho_d|)] \\
 & \times \Phi_n(\kappa) \kappa d\kappa, \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中,  $J_0$  是零阶第一类 Bessel 函数,  $\Phi_n(k)$  表示大气湍流折射率起伏谱密度函数.

为研究大气湍流内尺度、外尺度和广义指数对光束束宽和  $M^2$  因子的影响, 此处折射率起伏谱密度函数采用广义改进型非 Kolmogorov 湍流谱<sup>[28]</sup>

$$\begin{aligned}
 & \Phi_n(\kappa, \alpha, l_0, L) \\
 = & \hat{A}(\alpha) \hat{C}_n^2 \kappa^{-\alpha} f(\kappa, \alpha, l_0, L), \\
 & (0 < \kappa < \infty, 3 < \alpha < 5), \quad (4) \\
 & f(\kappa, \alpha, l_0, L) \\
 = & \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\kappa^2}{\kappa_0^2} \right) \right] \left[ 1 + a_1 \left( \frac{\kappa}{\kappa_l} \right) - b_1 \left( \frac{\kappa}{\kappa_l} \right)^\beta \right]
 \end{aligned}$$

$$\times \exp \left( -\frac{\kappa^2}{\kappa_l^2} \right), \quad (5)$$

$$\hat{A}(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha - 1)}{4\pi^2} \sin \left[ (\alpha - 3) \frac{\pi}{2} \right], \quad (6)$$

其中,  $\alpha$  是广义指数,  $l_0$  是湍流内尺度,  $L$  是湍流外尺度,  $\kappa$  是空间波矢,  $\hat{C}_n^2$  是广义折射率结构常数, 根据文献<sup>[28]</sup>,  $a_1 = 1.802$ ,  $b_1 = 0.254$ ,  $\beta = 7/6$ .

$$\kappa_l = c(\alpha)/l_0, \quad (7)$$

$$\kappa_0 = C_0/L, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 c(\alpha) = & \left\{ \pi \hat{A}(\alpha) \left[ \Gamma \left( \frac{3 - \alpha}{2} \right) \left( \frac{3 - \alpha}{3} \right) \right. \right. \\
 & + a_1 \Gamma \left( \frac{4 - \alpha}{2} \right) \left( \frac{4 - \alpha}{3} \right) \\
 & - b_1 \Gamma \left( \frac{3 - \alpha + b}{2} \right) \\
 & \left. \left. \times \left( \frac{3 - \alpha + b}{3} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{\alpha - 5}}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

其中,  $\Gamma$  表示 gamma 函数,  $C_0 = 4\pi$ . 当  $\alpha = 11/3$ ,  $l_0 \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow \infty$  时, 谱函数简化为改进型 Kolmogorov 密度谱

$$\Phi_n = \hat{A}(\alpha) \hat{C}_n^2 \kappa^{-\alpha}, \quad (0 < \kappa < \infty, 3 < \alpha < 5). \quad (10)$$

Wigner 分布函数的二阶矩方法适合用于处理部分相干光束的传播特性. 光束传播到  $z$  平面处的交叉谱密度函数的 Wigner 分布函数可以表示为<sup>[27]</sup>

$$\begin{aligned}
 & h(\rho, \theta, z) \\
 = & \left( \frac{k}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} W(\rho, \rho_d, z) \\
 & \times \exp(-ik\theta\rho_d) d^2 \rho_d. \quad (11)
 \end{aligned}$$

基于狄拉克 delta 函数的反傅里叶变换和它的偶函数性质, 可以得到

$$\begin{aligned}
 & \delta(\rho'' - \rho') \\
 = & \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int \exp[\pm i\kappa_d(\rho'' - \rho')] d^2 \kappa_d. \quad (12)
 \end{aligned}$$

因此, 光束在传输面  $z = 0$  处的交叉谱密度函数可以变换为

$$\begin{aligned}
 & W(\rho'_1, \rho'_d, 0) \\
 = & \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int W(\rho'', \rho'_d, 0) \\
 & \times \exp[i\kappa_d(\rho'' - \rho')] d^2 \kappa_d d^2 \rho''. \quad (13)
 \end{aligned}$$

将(12)式和(13)式代入(2)式, 并利用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0), \quad (14)$$

可以得到

$$\begin{aligned} & W(\rho, \rho_d, z) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint W\left(\rho'', \rho_d + \frac{z}{k}\kappa_d, 0\right) \\ & \times \exp\left[-i\rho\kappa_d + i\kappa_d\rho''\right. \\ & \left. - H\left(\rho_d, \rho_d + \frac{z}{k}\kappa_d, z\right)\right] d^2\kappa_d d^2\rho'', \quad (15) \end{aligned}$$

$x, y$ 方向上束宽和 $M^2$ 因子的分析方法相似, 为节省篇幅, 在这里只推导一维方向的束宽和 $M^2$ 因子的解析表达式, 将(1)式代入(15)式并利用公式<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned} & \int \exp(-x^2)H_m(x+y)H_n(x+z)dx \\ &= 2^n\sqrt{\pi}m!z^{n-m}L_m^{n-m}(-2yz), \quad (m \leq n), \quad (16) \end{aligned}$$

其中 $L_m^n$ 表示连带Laguerre多项式, 可以得到

$$\begin{aligned} & W(x, x_d, z) \\ &= \frac{\omega}{4\pi\sqrt{2}}2^m\sqrt{\pi}m! \int L_m \\ & \times \left\{ 2 \left[ \frac{x_d}{\sqrt{2}\omega} + \left( \frac{z}{\sqrt{2}\omega k} + \frac{i\omega}{2\sqrt{2}} \right) \kappa_{dx} \right] \right. \\ & \times \left. \left[ \frac{x_d}{\sqrt{2}\omega} + \left( \frac{z}{\sqrt{2}\omega k} - \frac{i\omega}{2\sqrt{2}} \right) \kappa_{dx} \right] \right\} \\ & \times \exp\left[-\frac{\omega^2}{8}\kappa_{dx}^2 - i\kappa_{dx}x - \left(\frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right. \\ & \times \left. \left(x_d + \frac{z}{k}\kappa_{dx}\right)^2 - H\left(x_d, x_d + \frac{z}{k}\kappa_{dx}, z\right)\right] \\ & \times \cosh\left[\Omega\left(x_d + \frac{z}{k}\kappa_{dx}\right)\right] d\kappa_{dx} + \frac{\omega}{8\pi\sqrt{2}}2^m\sqrt{\pi}m! \\ & \times \int L_m\left[\frac{1}{\omega^2}\left(x_d^2 + \frac{z^2\kappa_{dx}^2}{k^2} + \frac{2x_dz\kappa_{dx}}{k}\right)\right. \\ & \left. - \omega^2\left(\Omega^2 - \kappa_{dx}^2/4 + i\kappa_{dx}\Omega\right)\right] \\ & \times \exp\left[\left(\frac{\Omega\omega}{\sqrt{2}} + \frac{i\kappa_{dx}\omega}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right. \\ & \times \left. \left(x_d + \frac{z}{k}\kappa_{dx}\right)^2 - i\kappa_{dx}x - H\left(x_d, x_d + \frac{z}{k}\kappa_{dx}, z\right)\right] \\ & \times d\kappa_{dx} + \frac{\omega}{8\pi\sqrt{2}}2^m\sqrt{\pi}m! \\ & \times \int L_m\left[\frac{1}{\omega^2}\left(x_d^2 + \frac{z^2\kappa_{dx}^2}{k^2} + \frac{2x_dz\kappa_{dx}}{k}\right)\right. \\ & \left. - \omega^2\left(\Omega^2 - \kappa_{dx}^2/4 - i\kappa_{dx}\Omega\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \exp\left[\left(-\frac{\Omega\omega}{\sqrt{2}} + \frac{i\kappa_{dx}\omega}{2\sqrt{2}}\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right. \\ & \times \left. \left(x_d + \frac{z}{k}\kappa_{dx}\right)^2 - i\kappa_{dx}x\right. \\ & \left. - H\left(x_d, x_d + \frac{z}{k}\kappa_{dx}, z\right)\right] d\kappa_{dx}. \quad (17) \end{aligned}$$

将(17)式代入(11)式, 利用公式

$$\begin{aligned} \delta^n(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^n \exp(-isx) dx, \\ & (n = 0, 1, 2), \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^n(x) dx \\ &= (-1)^n f^{(n)}(0), \quad (n = 1, 2), \quad (19) \end{aligned}$$

$$\delta^n(ax) = \frac{1}{|a|^{n+1}}\delta^n(x), \quad (20)$$

并注意到 $x$ 和 $\theta_x$ 的二阶矩定义

$$\langle x^m\theta_x^n \rangle = \frac{1}{P} \iint x^m\theta_x^n h(x, \theta_x, z) dx d\theta_x, \quad (21)$$

$$P = \iint h(x, \theta_x, z) dx d\theta_x, \quad (22)$$

得到

$$\langle x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle_0 + z^2 \langle \theta_x^2 \rangle_0 + \frac{2}{3}\pi^2 z^3 T, \quad (23)$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_x^2 \rangle_0 + 2\pi^2 z T, \quad (24)$$

$$\langle x\theta_x \rangle = z \langle \theta_x^2 \rangle_0 + \pi^2 z^2 T, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle_0 &= \left[ \frac{m\omega^2}{2} + \frac{\omega^2}{4} - \frac{\omega^2}{2} L_m^1(-\Omega^2\omega^2) \right. \\ & \times \exp\left(\frac{\Omega^2\omega^2}{2}\right) + \frac{\omega^2}{4} L_m(-\Omega^2\omega^2) \\ & \times \exp\left(\frac{\Omega^2\omega^2}{2}\right) \left. \right] \times \left[ 1 + L_m(-\Omega^2\omega^2) \right. \\ & \times \exp\left(\frac{\Omega^2\omega^2}{2}\right) \left. \right]^{-1}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_x^2 \rangle_0 &= \left[ \frac{2m}{\omega^2 k^2} + \frac{1}{\omega^2 k^2} + \frac{1}{k^2 \sigma^2} - \frac{\Omega^2}{k^2} - \frac{2}{\omega^2 k^2} \right. \\ & \times L_m^1(-\Omega^2\omega^2) \exp\left(\frac{\Omega^2\omega^2}{2}\right) \\ & \left. + \left(\frac{1}{\omega^2 k^2} + \frac{1}{k^2 \sigma^2}\right) L_m(-\Omega^2\omega^2) \right. \\ & \times \exp\left(\frac{\Omega^2\omega^2}{2}\right) \left. \right] \times \left[ 1 + L_m(-\Omega^2\omega^2) \right. \\ & \times \exp\left(\frac{\Omega^2\omega^2}{2}\right) \left. \right]^{-1}, \quad (27) \end{aligned}$$

其中,  $\langle x^2 \rangle_0, \langle \theta_x^2 \rangle_0$ 分别表示 $z = 0$ 处 $x$ 和 $\theta_x$ 的二阶矩,  $T = \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa, \alpha, l_0, L) d\kappa$ 表示大气湍流量,

其大小由大气湍流的折射率起伏谱密度函数决定。将(4)式代入大气湍流量的表达式, 利用公式

$$\int_0^\infty x^n \exp(-ax^p) dx = \frac{\Gamma(k)}{pa^k},$$

$$\left(n > -1, p > 0, a > 0, k = \frac{n+1}{p}\right), \quad (28)$$

计算得到

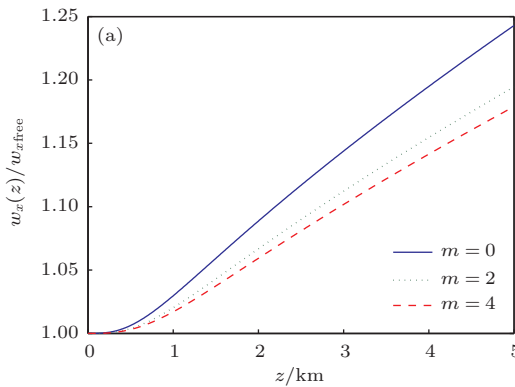
$$T = \hat{A}(\alpha) \hat{C}_n^2 \left[ \frac{\kappa_l^{4-\alpha} \Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)}{2} + \frac{a_1}{\kappa_l} \frac{\kappa_l^{5-\alpha} \Gamma\left(\frac{5}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{b_1}{\kappa_l^\beta} \frac{\kappa_l^{4-\alpha+\beta} \Gamma\left(\frac{4-\alpha+\beta}{2}\right)}{2} - \frac{\Gamma\left(2-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{\kappa_l^2} + \frac{1}{\kappa_0^2}\right)^{2-\alpha/2}} - \frac{a_1 \Gamma\left(\frac{5}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\kappa_l \left(\frac{1}{\kappa_l^2} + \frac{1}{\kappa_0^2}\right)^{5/2-\alpha/2}} + \frac{b_1 \Gamma\left(\frac{4-\alpha+\beta}{2}\right)}{2\kappa_l^\beta \left(\frac{1}{\kappa_l^2} + \frac{1}{\kappa_0^2}\right)^{\frac{4-\alpha+\beta}{2}}} \right]. \quad (29)$$

当  $\Omega = 0$  时, (23), (24), (25) 式分别表示部分相干厄米高斯光束关于  $x$  和  $\theta_x$  的二阶矩, 简化结果与文献[12]一致; 当  $m = 0$  时, 厄米高斯光束变为高斯光束, 简化的(23), (24), (25)式与文献[1]一致。

HChG 光束的均方根束宽和  $M^2$  因子分别表示为

$$w_X(z) = \langle x^2 \rangle^{1/2}$$

$$= \left( \langle x^2 \rangle_0 + z^2 \langle \theta_x^2 \rangle_0 + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 T \right)^{1/2}, \quad (30)$$



$$M_x^2 = 2k \left[ \langle x^2 \rangle \langle \theta_x^2 \rangle - \langle x\theta_x \rangle^2 \right]^{1/2}$$

$$= 2k \left( \langle x^2 \rangle_0 \langle \theta_x^2 \rangle_0 + 2\pi^2 z T \langle x^2 \rangle_0 + \frac{2}{3} \pi^2 z^3 T \langle \theta_x^2 \rangle_0 + \frac{1}{3} \pi^4 z^4 T^2 \right). \quad (31)$$

从(30), (31)式可以看出, 均方根束宽和  $M^2$  因子除了与光束阶数  $m$ 、束腰宽度  $\omega$ 、相干长度  $\sigma$ 、双曲余弦参数  $\Omega$  有关外, 还受大气湍流量(内尺度  $l_0$ 、外尺度  $L$ 、广义指数  $\alpha$ ) 影响。

### 3 数值计算结果及物理解释

这里引入相对束宽和归一化  $M^2$  因子, 相对束宽表示在大气湍流中传输光束的束宽与在自由空间中传输光束(大气湍流量  $T = 0$ ) 的束宽之比  $w_X(z)/w_{Xfree}$ , 归一化  $M^2$  因子表示  $M^2$  因子与  $z = 0$  处的  $M^2$  因子之比  $M_x^2(z)/M_x^2(0)$ 。

#### 3.1 光束参数对传输特性的影响

根据(30), (31)式, 理论计算分析光学参数对光束相对束宽和归一化  $M^2$  因子的影响情况. 此处光束波长及大气湍流参数分别为:  $\lambda = 632.8$  nm, 内尺度  $l_0 = 1$  cm, 外尺度  $L = 10$  m, 广义指数  $\alpha = 10/3$ , 折射率结构常数  $\hat{C}_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ 。

当  $\omega = 2$  cm,  $\sigma = 1$  cm,  $\Omega = 100$  时, 对于不同光束阶数, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离的变化曲线如图1所示。

从图1可以看出, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离的增大而增大; 同一传输距离处, 光束阶数越大, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子越小, 这表明光束阶数越大, 在同一传输距离处光束质量保持得较好, 此处得到的结论与文献[12]的结论一致。

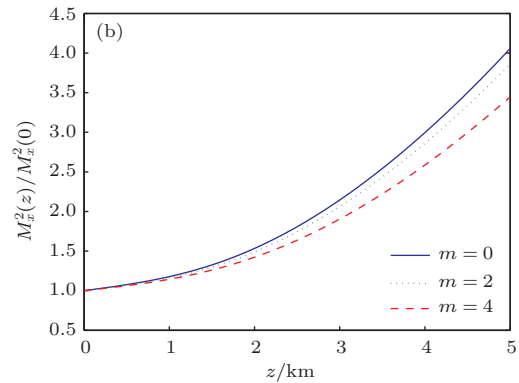


图1 (网刊彩色) 不同  $m$  值下随传输距离的变化曲线 (a) 相对束宽; (b) 归一化  $M^2$  因子

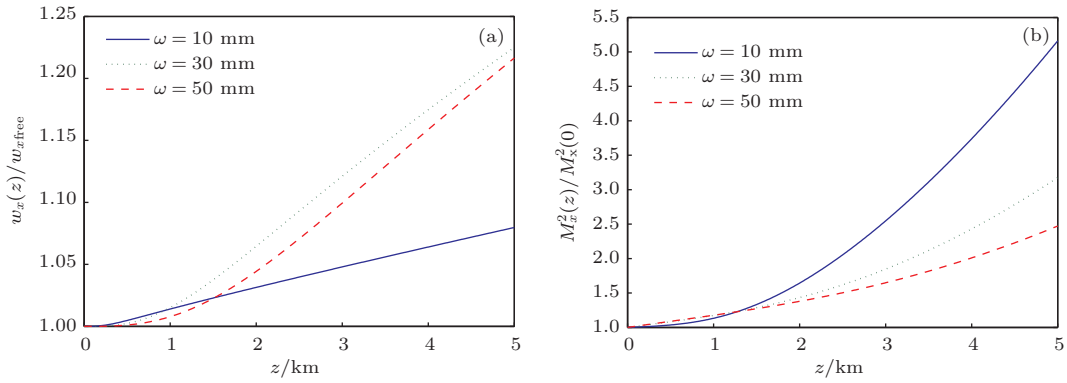


图2 (网刊彩色) 不同束腰宽度值下随传输距离的变化曲线 (a) 相对束宽; (b) 归一化  $M^2$  因子

当  $m = 2$ ,  $\sigma = 1$  cm,  $\Omega = 100$  时, 对于不同的束腰宽度值, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离的变化曲线如图 2 所示.

从图 2 中可以看出, 随传输距离的增大相对束宽和归一化  $M^2$  因子均增大, 但是在不同的传输距离处, 不同束腰宽度值所对应的相对束宽和归一化  $M^2$  因子呈现出不一样的变化规律, 这说明相对束宽和归一化  $M^2$  因子随束腰宽度的变化关系不是简单的单调函数关系, 所以取束腰宽度作为自变量, 得到相对束宽和归一化  $M^2$  因子随束腰宽度的变化曲线, 如图 3 和图 4 所示.

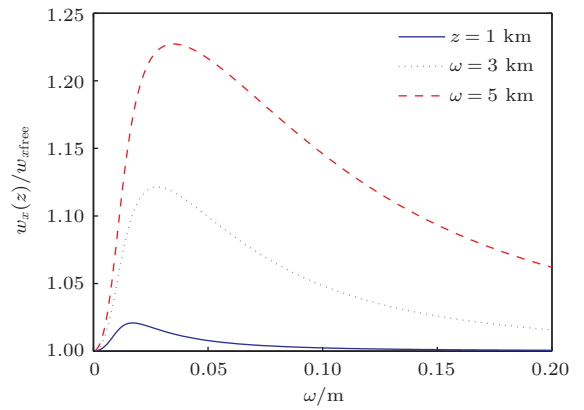


图3 相对束宽随束腰宽度的变化曲线

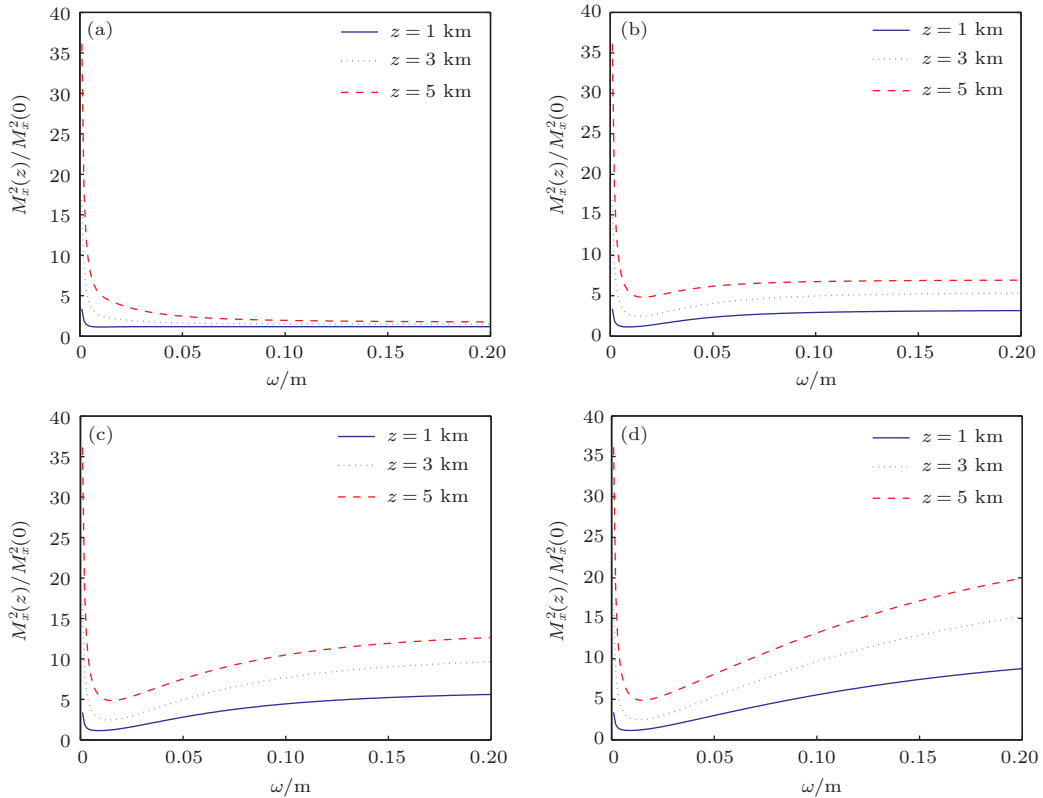


图4 (网刊彩色) 归一化  $M^2$  因子随束腰宽度的变化曲线 (a)  $\sigma = 10$  mm; (b)  $\sigma = 50$  mm; (c)  $\sigma = 100$  mm; (d)  $\sigma = 200$  mm

从图3可以看出, 随束腰宽度的增大, 相对束宽先增大、后减小, 即相对束宽存在极大值; 从图4的各分图对比中发现, 当相干长度  $\sigma = 10$  mm 时, 归一化  $M^2$  因子在很小的束腰宽度范围内急剧减小, 随着束腰宽度的增大, 归一化  $M^2$  因子变化趋势不明显, 但是随着相干长度的增大, 归一化  $M^2$  因子在减小到最小值后再增大的趋势逐渐表现出来, 并且越来越明显, 所以在一定的相干长度范围内, 归一化  $M^2$  因子随着束腰宽度的增大存在极小值, 在其他参数给定的情况下, 该相干长度范围可以通过对(31)式进行关于自变量为相干长度的求导, 然后找出其存在极值的条件得到.

当  $m = 2, \omega = 2$  cm,  $\Omega = 100$  时, 对于不同的相干长度, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离

的变化曲线如图5所示.

从图5中可以看出, 对于不同的相干长度, 随传输距离的增大相对束宽和归一化  $M^2$  因子均增大; 在同一传输距离处, 相干长度越小, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子越小, 即相干长度越小的光束受大气湍流影响较小, 光束质量保持的越好. 当相干长度为无穷大时, 部分相干光转化为完全相干光, 通过对比不同相干长度的各条曲线可以知道, 完全相干光更容易受大气湍流影响而导致光束质量变差, 上述结果与文献[5]一致.

当  $m = 2, \omega = 2$  cm,  $\sigma = 1$  cm 时, 对于不同的双曲余弦参数值, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离的变化曲线如图6所示.

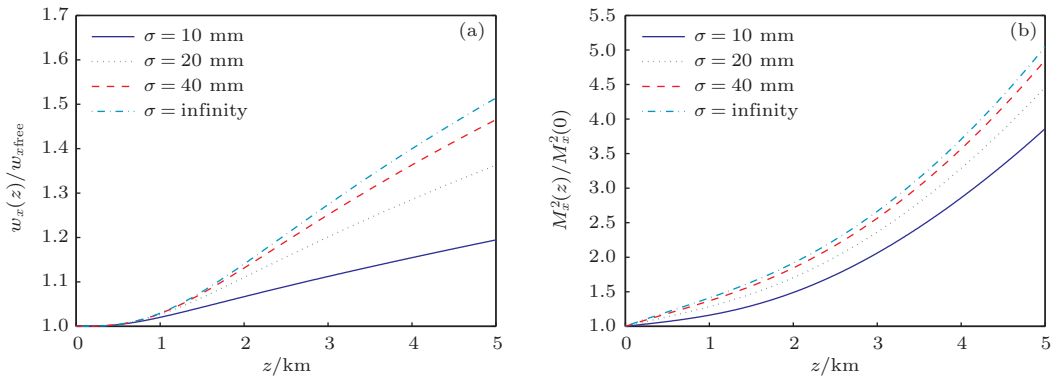


图5 (网刊彩色) 不同相干长度值下随传输距离的变化曲线 (a) 相对束宽; (b) 归一化  $M^2$  因子

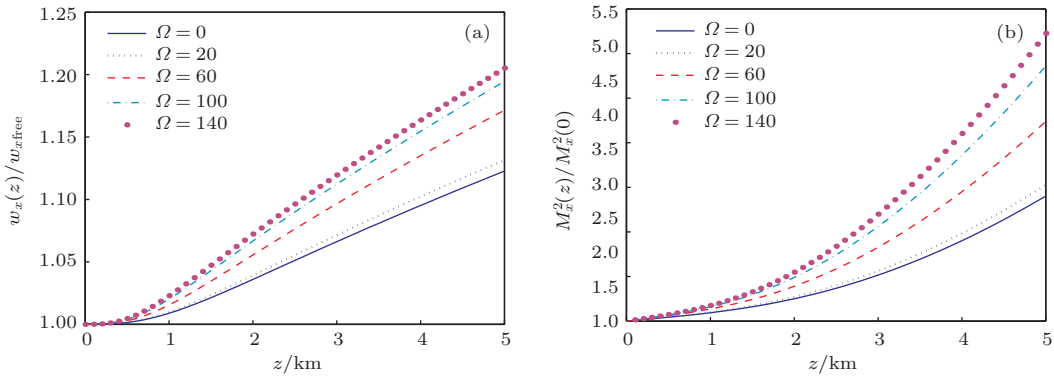


图6 (网刊彩色) 不同双曲余弦参数值下随传输距离的变化曲线 (a) 相对束宽; (b) 归一化  $M^2$  因子

从图6中可以看出, 对于不同的双曲余弦参数, 随传输距离的增大相对束宽和归一化  $M^2$  因子均增大; 在同一传输距离处, 双曲余弦参数越小, 光束相对束宽和归一化  $M^2$  因子越小, 即双曲余弦参数越小的光束受湍流影响较小, 上述结论与文献[14]中的一致.  $\Omega = 0$  的曲线表示了部分相干厄米高斯光束的相对束宽和归一化  $M^2$  因子在传输过程中的

变化情况, 对比图6中各条曲线可以得到, 双曲余弦参数的引入使得光束受大气湍流的影响变大.

### 3.2 湍流参数对传输特性的影响

从(30), (31)式中可知, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子都与大气湍流量有关, 而大气湍流量由大气湍流内尺度、外尺度和广义指数决定, 所以有必要研

究大气湍流内尺度、外尺度和广义指数对相对束宽和归一化  $M^2$  因子的影响。

此次计算中 HChG 光束的参数选择为:  $m = 2$ ,  $\omega = 2$  cm,  $\sigma = 1$  cm,  $\Omega = 100$ ,  $\lambda = 632.8$  nm. 大气湍流的其他参数保持不变。

在  $l_0 = 0.01$  m,  $L = 10$  m 的情况下, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随广义指数的变化曲线如图 7 所示。

从图 7 中可以看出, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随广义指数的增大, 先增大, 再减小到 1, 即它们随广义指数的增大存在极大值, 极大值可以通过对 (30), (31) 式进行关于广义指数的求导得到; 在同一广义指数下, 随传输距离的增大, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子逐渐增大。

在  $\alpha = 10/3$ ,  $L = 10$  m 的情况下, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随内尺度的变化曲线如图 8 所示。

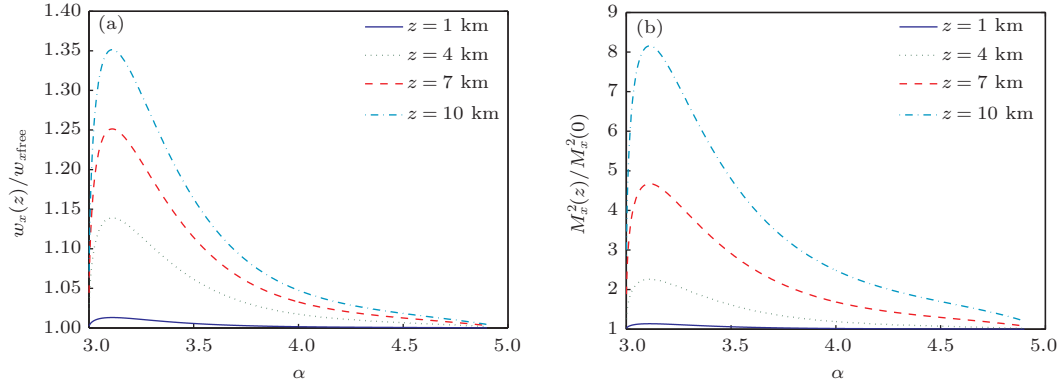


图 7 (网刊彩色) 随广义指数的变化曲线 (a) 相对束宽; (b) 归一化  $M^2$  因子

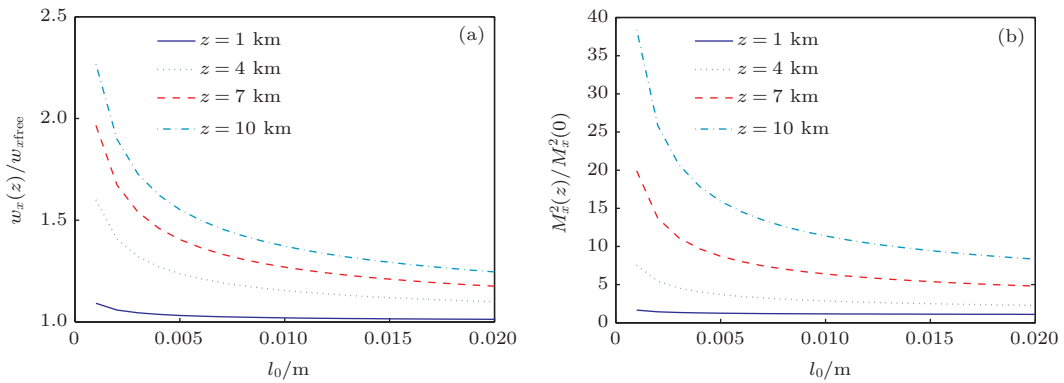


图 8 (网刊彩色) 随内尺度的变化曲线 (a) 相对束宽; (b) 归一化  $M^2$  因子

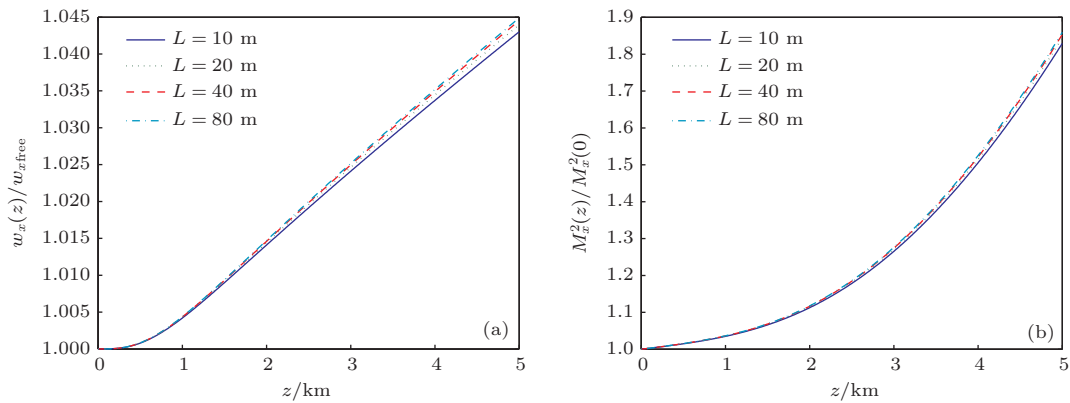


图 9 (网刊彩色) 不同外尺度值下随传输距离的变化曲线 (a) 相对束宽; (b) 归一化  $M^2$  因子



从图 8 中可以看出, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随内尺度的增大而减小, 即湍流内尺度越大, 光束受湍流的影响越小; 在同一内尺度下, 随传输距离的增大, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子逐渐增大, 从湍流的物理性质上来讲, 内尺度的减小意味着湍流强度的增大, 所以这里的数值模拟结果与实际相符.

在  $\alpha = 10/3$ ,  $l_0 = 0.01$  m 的情况下, 对于不同的外尺度数值, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离的变化曲线如图 9 所示.

从图 9 中可以看出, 随传输距离的增大, 相对束宽和归一化  $M^2$  因子逐渐增大; 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随外尺度的增大没有明显变化, 即光束受湍流外尺度影响不大.

## 4 结 论

本文基于广义 Huygens-Fresnel 原理和非 Kolmogorov 大气湍流的折射率起伏谱密度函数, 采用 Wigner 分布函数的二阶矩方法, 推导出了 HChG 光束在大气湍流中传输的束宽和  $M^2$  因子的解析表达式. 当表达式中光束参数分别为零时, 简化的光束束宽和  $M^2$  因子的解析表达式与已有的研究结果一致.

根据推导得出的解析表达式, 理论计算分析了光学参数和大气湍流参数对相对束宽和归一化  $M^2$  因子的影响情况. 研究表明, HChG 光束的相对束宽和归一化  $M^2$  因子随传输距离的增大而增大; 光束阶数越大、相干长度越小、双曲余弦参数越小, 光束的相对束宽和归一化  $M^2$  因子受大气湍流影响越小; 相对束宽随束腰宽度的增大存在极大值, 在一定的相干长度范围内, 归一化  $M^2$  因子随束腰宽度的增大存在极小值; 相对束宽和归一化  $M^2$  因子随广义指数的增大均存在极大值, 随内尺度的增大受湍流影响逐渐减小, 随外尺度的增大几乎没有变化. 上述得到的结论与已有的关于高斯光束在大气湍流中传输的研究结论一致, 这说明 HChG 光束的光学参数之间近似独立, 各光学参数的引入不改变大气湍流对其影响的规律, 只影响其传播因子的数值大小, 本文研究结果在激光器参数选择、光测距、光通信和光成像等实际应用方面有一定参考价值.

## 参考文献

- [1] Ji X L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064207 (in Chinese) [季小玲 2011 物理学报 **60** 064207]
- [2] Liu F, Li X Q, Zheng Y L, Ji X L 2011 *High Power Laser and Particle Beams.* **23** 0070 (in Chinese) [刘飞, 李晓庆, 郑宇龙, 季小玲 2011 强激光与粒子束 **23** 0070]
- [3] Liu F, Ji X L 2011 *Chinese Journal of Lasers.* **38** 0713001 (in Chinese) [刘飞, 季小玲 2011 中国激光 **38** 0713001]
- [4] Huang Y P, Zhao G P, Duan Z C 2011 *Journal of Ningxia University(Natural Science Edition).* **32** 0026 (in Chinese) [黄永平, 赵光普, 段志春 2011 宁夏大学学报(自然科学版) **32** 0026]
- [5] Ji X L, Huang T X, Lv B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 0978 (in Chinese) [季小玲, 黄太星, 吕百达 2006 物理学报 **55** 0978]
- [6] Zhang E T, Ji X L, Lv B D 2006 *Opto-Electronic Engineering.* **33** 0028 (in Chinese) [张恩涛, 季小玲, 吕百达 2006 光电工程 **33** 0028]
- [7] Huang Y P, Zeng A P 2012 *Acta Photonica Sinica.* **41** 0818 (in Chinese) [黄永平, 曾安平 2012 光子学报 **41** 0818]
- [8] Wu P, Li B, Chen T L, Lv B D 2005 *High Power Laser and Particle Beams.* **17** 1787 (in Chinese) [吴平, 李波, 陈天禄, 吕百达 2005 强激光与粒子束 **17** 1787]
- [9] Ai Y L, Dan Y Q, Ming D L 2010 *Chinese Journal of Lasers* **37** 2849 (in Chinese) [艾扬利, 但有权, 明德烈 2010 中国激光 **37** 2849]
- [10] Wu G H, Zhao T G, Ren J H, Zhang J Y, Zhang X L, Li W H 2011 *Optics & Laser Technology.* **43** 1225
- [11] Lu L, Ji X L, Deng J P, Ma Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 014207 (in Chinese) [陆璐, 季小玲, 邓金平, 马媛 2014 物理学报 **63** 014207]
- [12] Yuan Y S, Cai Y J, Qu J, Halil T 2010 *Optics & Laser Technology.* **42** 1344
- [13] Cang J, Fang X, Liu X 2013 *Optics & Laser Technology.* **50** 65
- [14] Yang A L, Zhang E T, Ji X L, Lv B D 2009 *Optics & Laser Technology.* **41** 714
- [15] Greg G, Emil W 2002 *J.Opt.Soc.A.* **19** 1592
- [16] Lu L, Ji X L, Deng J P, Li X Q 2014 *Chin. Phys. B* **23** 064209
- [17] Chu X X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 014207
- [18] Qian X M, Zhu W Y, Wang A T, Gu C, Rao R Z 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 044214
- [19] Chen B S, Pu J X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 103307
- [20] Zhang E T, Ji X L, Lv, B D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 057110
- [21] Chu X X, Liu Z J, Wu Y 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 485
- [22] Ma J, Gao C, Tan L Y 2007 *Chin. Phys. Soc.* **16** 1327
- [23] Lv S Y, Ji X L, Lv, B D 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2855
- [24] Casperson W L, Hall D G 1997 *J.Opt.Soc.Am.A* **14** 3341
- [25] Casperson W L, Tovar A A 1998 *J.Opt.Soc.Am.A* **15** 954
- [26] Tovar A A, Casperson W L 1998 *J.Opt.Soc.Am.A* **15** 2425
- [27] Dan Y Q, Zhang B 2009 *Opt.Lett* **34** 563
- [28] Xue B D, Cui L Y, Xue W F, Bai X Z, Zhou F G 2011 *J.Opt.Soc.Am.A* **28** 912

# Propagation properties of partially coherent Hermite-cosh-Gaussian beams in non-Kolmogorov turbulence

Liu Li-Hui<sup>†</sup> Lü Wei-Yu Yang Chao Mai Can-Ji Chen De-Peng

(Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

( Received 22 June 2014; revised manuscript received 29 July 2014 )

## Abstract

Based on the extended Huygens-Fresnel principle and non-Kolmogorov spectrum, the analytical expressions for beam width and  $M^2$ -factor of partially coherent Hermite-cosh-Gaussian beams going through a non-Kolmogorov turbulence are derived by means of second moments for the Wigner distribution function. Results show that the relative beam width and normalized  $M^2$ -factor of partially coherent Hermite-cosh-Gaussian beams going through a non-Kolmogorov turbulence will increase when propagating in the turbulent atmosphere, and will be less affected by turbulent atmosphere with a larger beam, smaller coherent length, smaller Ch-part parameter. The relative beam width has a maximum value for increasing waist width, and normalized  $M^2$ -factor has a minimum value for increasing waist width in a specific extent of coherent length. The relative beam width and normalized  $M^2$ -factor both have maximum values according to the generalized power law, but decrease with increasing inner scale, and have nearly no change with increasing outer scale.

**Keywords:** partially coherent Hermite-cosh-Gaussian beams, non-Kolmogorov spectrum, atmospheric turbulence

**PACS:** 42.55.-f, 47.11.Kb, 42.68.Bz

**DOI:** [10.7498/aps.64.034208](https://doi.org/10.7498/aps.64.034208)

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [liulihuiyang@sina.com](mailto:liulihuiyang@sina.com)