

一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计

潘光 魏静

Design of an adaptive sliding mode controller for synchronization of fractional-order chaotic systems

Pan Guang Wei Jing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 040505 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.040505

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040505>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I4>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

参数不确定统一混沌系统的鲁棒分数阶比例微分控制

Robust fractional-order proportional-derivative control of unified chaotic systems with parametric uncertainties

物理学报.2015, 64(5): 050503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.050503>

永磁同步发电机混沌运动分析及最优输出反馈  $H_8$  控制

Analysis of chaos in permanent magnet synchronous generator and optimal output feedback  $H_8$  control

物理学报.2015, 64(4): 040504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.040504>

间歇反馈法实现单模 Lorenz-Haken 激光系统的周期镇定与同步

Realization of periodical control and synchronization of single-mode laser Haken-Lorenz system with intermittent feedback

物理学报.2015, 64(3): 030504 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030504>

基于量子并行粒子群优化算法的分数阶混沌系统参数估计

Research on particle swarm optimization algorithm with characteristic of quantum parallel and its application in parameter estimation for fractional-order chaotic systems

物理学报.2015, 64(3): 030505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030505>

基于快速全线性预测控制的混沌系统控制与同步

Control and synchronization in chaotic systems based on fast linear predictive control

物理学报.2015, 64(1): 010502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.010502>

# 一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计

潘光 魏静<sup>†</sup>

(西北工业大学航海学院, 西安 710072)

(2014年8月7日收到; 2014年9月22日收到修改稿)

针对分数阶混沌系统的同步问题, 基于滑模控制理论和自适应控制理论, 设计了一个具有较强鲁棒性的分数阶积分滑模面, 并提出了一种自适应滑模控制器在不消除非线性项的情况下实现一类三维分数阶混沌系统同步的方法. 利用所设计的自适应滑模控制器实现了分数阶 Chen 系统、分数阶 Liu 系统以及分数阶 Arneodo 系统的混沌同步. 数值模拟仿真结果验证了所设计的控制器的有效性和可行性.

**关键词:** 分数阶混沌系统, 混沌同步, 滑模控制

**PACS:** 05.45.Gg

**DOI:** 10.7498/aps.64.040505

## 1 引言

混沌的发现是20世纪继相对论和量子力学之后物理学中最伟大的发现之一, 被国际上誉为20世纪物理学的第三次革命. 对广泛存在于客观世界中的混沌现象的研究, 为人类认识物质世界和研究人类社会运动规律提供了新的研究思想及方法. 由于其在工程技术上的重大研究价值及其诱人的应用前景, 混沌控制及同步问题作为混沌应用的关键环节已成为当今的研究热点之一<sup>[1-4]</sup>.

随着分数阶微积分的不断发展, 分数阶混沌系统的同步控制比整数阶混沌系统的同步控制在保密通信、系统控制等领域具有更突出的应用和发展前景, 引起了人们的广泛关注, 并已进行了深入研究<sup>[5-12]</sup>. 人们提出了各种混沌控制和同步方法, 如文献<sup>[13]</sup>提出了驱动-响应法, 文献<sup>[14]</sup>研究了广义同步法, 文献<sup>[15]</sup>运用自适应控制法实现了混沌同步控制, 文献<sup>[16]</sup>主要研究了滑模变结构控制法在混沌同步控制中的应用等.

目前, 关于分数阶混沌系统的稳定和同步研究大多基于主动控制的策略, 通过设计控制器消去误

差系统中的非线性项, 使得系统的系数矩阵成为定常矩阵, 从而实现混沌系统的稳定和同步的目的. 虽然利用这种方法能够达到目的, 但是, 其控制代价比较大, 而且当遇到参数未知或者不确定的系统或者受外界扰动情况下, 这种方法无法达到预期的目的. 在现实中, 系统的参数往往是未知或者不确定的, 系统也常常受到环境的干扰. 因此, 自适应稳定和同步理论在分数阶非线性系统中应用的研究更具有实际意义, 如文献<sup>[17]</sup>提出了单一自适应滑模控制器实现一类三维分数阶混沌系统同步的方法.

在此基础上, 针对分数阶混沌系统的同步问题, 鉴于滑模变结构控制法适应于确定与不确定系统、线性与非线性系统, 具有很强的鲁棒性和抗干扰能力, 能够快速响应的特点, 本文根据滑模控制理论和自适应控制理论, 设计了一个具有较强鲁棒性的分数阶积分滑模面, 并提出了一种自适应滑模控制器在不消除非线性项的情况下实现一类三维分数阶混沌系统同步的方法. 通过理论分析和实例数值模拟仿真验证了所设计的控制器的有效性和可行性.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: ximengxue\_999@163.com

## 2 基于自适应滑模控制的分数阶混沌系统同步理论

### 2.1 数学模型与问题描述

考虑三维分数阶混沌系统

$$D_t^q \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (0 < q < 1), \quad (1)$$

其中,  $D_t^q = d^q/dt^q$  是 Caputo 微分算子,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

为系统线性部分的系数矩阵,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x}))^T$  为系统的非线性项, 系统 (1) 的状态向量为  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ .

$$D_t^q \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (0 < q < 1), \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

为系统线性部分的系数矩阵,  $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = (g_1(\mathbf{y}), g_2(\mathbf{y}), g_3(\mathbf{y}))^T$  为系统 (2) 的非线性项, 系统 (2) 的状态向量是  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ .

令驱动系统为系统 (1), 响应系统为系统 (2). 定义系统 (2) 与系统 (1) 之间的误差为  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$  为误差向量, 则由系统 (2) 和系统 (1) 得到误差系统为

$$D_t^q \mathbf{e} = D_t^q (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = D_t^q \mathbf{y} - D_t^q \mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}). \quad (3)$$

将 (3) 式改写为

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} D_t^q e_1 \\ D_t^q e_2 \\ D_t^q e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(e_1, e_2, e_3) \\ \varepsilon_2(e_1, e_2, e_3) \\ \varepsilon_3(e_1, e_2, e_3) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

本文的目标就是基于滑膜控制理论与自适应理论设计合适的控制器  $U$ , 使得响应系统 (2) 和驱动系统 (1) 达到同步.

为描述新的设计方法, 本文做出了如下假设.

**假设 1** 由于系统 (4) 是系统 (2) 与系统 (1) 的误差系统, 因此存在足够大的正数  $M$ , 满足:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(e_1, e_2, e_3) &\leq M(|e_1| + |e_2| + |e_3|), \\ \varepsilon_2(e_1, e_2, e_3) &\leq M(|e_1| + |e_2| + |e_3|), \\ \varepsilon_3(e_1, e_2, e_3) &\leq M(|e_1| + |e_2| + |e_3|). \end{aligned}$$

### 2.2 同步控制器的设计

从滑模控制的基本思想可以看出, 为了使系统得到较好的滑模运动, 首先要设计一个对外界干扰具有较强鲁棒性的分数阶滑模面, 再根据滑模可达条件设计出合理的自适应滑模控制器  $U$ , 能够使得系统从空间的任意一点出发的轨迹在有限的时间内收敛到滑模面上, 实现驱动系统 (1) 与响应系统 (2) 的同步, 亦即实现误差系统 (3) 稳定在平衡点.

选取如下滑模面:

$$s_i = D_t^{q-1} e_i + \int_0^t a e_i(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, 3; a > 0), \quad (5)$$

当系统发生滑模运动时, 需满足如下条件:

$$s_i = D_t^{q-1} e_i + \int_0^t a e_i(\tau) d\tau = 0, \quad (6)$$

$$\dot{s}_i = D_t^q e_i + a e_i = 0. \quad (7)$$

由 (7) 式可以得到

$$D_t^q e_i = -a e_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (8)$$

当  $a > 0$  时, (8) 式是渐近稳定的, 随着时间趋于无穷, 系统的误差变量也趋于零, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0$ .

为了使驱动系统 (1) 和响应系统 (2) 达到同步, 设计控制器:

$$U = U_0, \quad (9)$$

其中,  $U_0 = (u_1, u_2, u_3)^T$ ,  $u_i = -\mu k_i |e_i| \operatorname{sgn}(s_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mu > 0$ ,  $k_i$  的自适应率为  $\dot{k}_i = \theta |e_i| |s_i|$ ,  $\theta$  为大于零的常数.

**定理 1** 从任意初始值出发的误差系统都将在有限时间内达到或趋近滑模面  $s = 0$ , 即始终满足滑模到达条件, 亦即在自适应控制器的作用下系统 (2) 和系统 (1) 渐近同步.

**证明** 为了使系统 (4) 稳定在平衡点, 即响应系统 (2) 与驱动系统 (1) 同步, 采用以下控制方法:  $D_t^q \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e}) + U_0$ , 即

$$D_t^q \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(e_1, e_2, e_3) - \mu k_1 |e_1| \operatorname{sgn}(s_1) \\ \varepsilon_2(e_1, e_2, e_3) - \mu k_2 |e_2| \operatorname{sgn}(s_2) \\ \varepsilon_3(e_1, e_2, e_3) - \mu k_3 |e_3| \operatorname{sgn}(s_3) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^2 + \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^3 \mu (k_i - k^*)^2,$$

其中  $k^* > (M + a)/\mu$ , 则

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \sum_{i=1}^3 s_i \dot{s}_i + \frac{\mu}{\theta} \sum_{i=1}^3 (k_i - k^*) \dot{k}_i \\
 &= \sum_{i=1}^3 s_i (D_t^q e_i + a e_i) + \frac{\mu}{\theta} \sum_{i=1}^3 (k_i - k^*) \dot{k}_i \\
 &\leq M \sum_{i=1}^3 s_i \cdot \sum_{j=1}^3 |e_j| - \sum_{i=1}^3 s_i \cdot \mu k_i |e_i| \operatorname{sgn}(s_i) \\
 &\quad + a \sum_{i=1}^3 s_i e_i + \sum_{i=1}^3 (\mu(k_i - k^*) |e_i| |s_i|) \\
 &\leq M \cdot \sum_{i=1}^3 |s_i| \cdot \sum_{j=1}^3 |e_j| + a \sum_{i=1}^3 |s_i| \cdot |e_i| \\
 &\quad - \mu k^* \sum_{i=1}^3 |e_i| |s_i| \\
 &= M \cdot \sum_{i=1}^3 |s_i| \cdot \sum_{j=1}^3 |e_j| + (a - \mu k^*) \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^3 |e_i| |s_i| \\
 &\leq M \sum_{i=1}^3 |s_i| \cdot \sum_{j=1}^3 |e_j| + (a - \mu k^*) \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^3 |s_i| \cdot \sum_{j=1}^3 |e_j| \\
 &\leq M \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |e_j| |s_i| + (a - \mu k^*) \\
 &\quad \times \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |e_j| |s_i| \\
 &= -(\mu k^* - M - a) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |e_j| |s_i| \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

根据 Lyapunov 稳定性理论可知, 该系统是渐近稳定的, 由此证明, 从任意初始条件出发的受控误差系统(10)满足滑模到达的条件, 并且系统在滑模面以外的运动点在有限时间内达到或者趋近滑模面  $s = 0$ , 从而最终实现了受控误差系统(10)稳定在平衡点, 即实现了驱动系统与受控响应系统之间的同步.

### 3 数值仿真实例

为了验证所提出的方法的正确性和有效性, 我们利用所设计的控制器分别对分数阶 Chen 系统、

分数阶 Liu 系统和分数阶 Arneodo 系统进行了滑模控制同步数值模拟仿真.

#### 3.1 Chen 系统的自适应滑模控制同步

分数阶统一混沌系统<sup>[18]</sup>表达式为

$$\begin{aligned}
 D_t^q \mathbf{x} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
 &= \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(8 + \alpha)/3 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中, 系统参数  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $0 < q < 1$ , 以系统(11)为驱动系统, 受控响应系统为

$$\begin{aligned}
 D_t^q \mathbf{y} &= \mathbf{B} \mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{U} \\
 &= \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(8 + \alpha)/3 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix} + \mathbf{U} \\
 &\quad (\alpha \in [0, 1]; 0 < q < 1). \quad (12)
 \end{aligned}$$

由(11)和(12)式可得误差系统为

$$\begin{aligned}
 D_t^q \mathbf{e} &= \begin{pmatrix} -(25\alpha + 10) & 25\alpha + 10 & 0 \\ 28 - 35\alpha & 29\alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -(8 + \alpha)/3 \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_3 - y_1 y_3 \\ y_1 y_2 - x_1 x_2 \end{pmatrix} + \mathbf{U}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

选取滑模面:  $s_i = D_t^{q-1} e_i + \int_0^t e_i(\tau) d\tau$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k_i$  的自适应率为  $\dot{k}_i = \theta |e_i| |s_i|$ ,  $\theta$  为大于零的常数, 即

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = \theta |e_1| \cdot |s_1|, \\ \dot{k}_2 = \theta |e_2| \cdot |s_2|, \\ \dot{k}_3 = \theta |e_3| \cdot |s_3|. \end{cases} \quad (14)$$

根据定理 1, 设计的控制器为

$$U = \begin{pmatrix} -\mu k_1 |e_1| \operatorname{sgn}(s_1) \\ -\mu k_2 |e_2| \operatorname{sgn}(s_2) \\ -\mu k_3 |e_3| \operatorname{sgn}(s_3) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

在此控制器的作用下稳定, 驱动系统 (11) 与受控响应系统 (12) 实现同步.

选取  $\alpha = 1, q = 0.9$ , 则驱动系统 (11) 为分数阶 Chen 系统, 其初始值设定为  $x_1(0) = -0.5, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0.1$ ; 令  $a = 1$ , 同时设定受控响应系统 (12) 的初始值为  $y_1(0) = -0.5, y_2(0) = 0.1, y_3(0) = -1, \mu = 0.01, \theta = 2$ , 时间步长  $h = 0.001$ , 应用分数阶微分函数频域变换近似法<sup>[19]</sup>、分数阶混沌的动态仿真法<sup>[20]</sup>和 MATLAB 进行数值仿真, 仿真结果如图 1 所示.

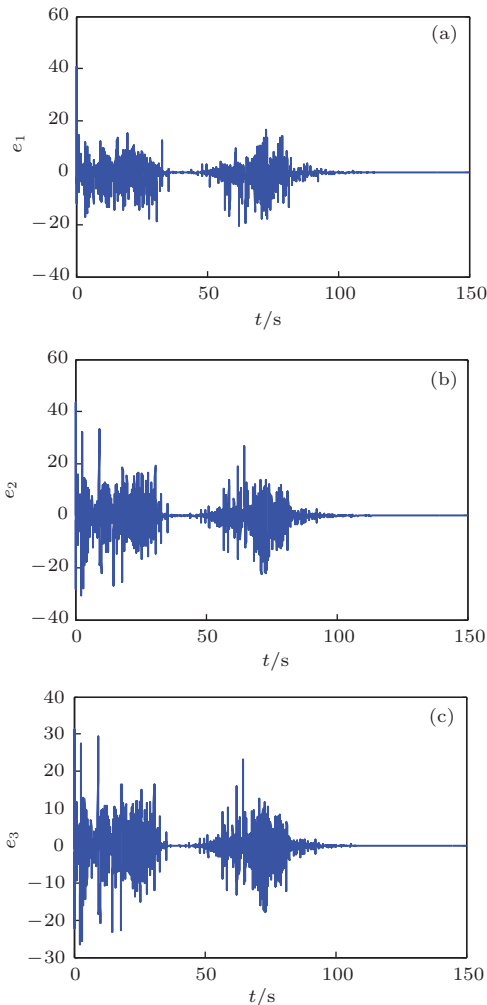


图 1 分数阶 Chen 系统的滑模控制同步误差随时间的变化 (a)  $e_1$  随时间的变化; (b)  $e_2$  随时间的变化; (c)  $e_3$  随时间的变化

从实例数值仿真的结果可以看出, 随着时间的变化,  $e_1, e_2, e_3$  很快地趋近于零, 两个系统达到了渐近稳定. 由此说明在控制器的作用下, 实现了系

统 (11) 与系统 (12) 的同步.

### 3.2 分数阶 Liu 系统的自适应滑模控制同步

驱动系统, 响应系统选取分数阶 Liu 系统<sup>[21]</sup>进行数值模拟.

驱动系统为

$$D_t^q \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ 4x_1^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

受控响应系统为

$$D_t^q \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ 4y_1^2 \end{pmatrix} + U. \quad (17)$$

由 (16) 和 (17) 式得误差系统为

$$D_t^q \mathbf{e} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 x_3 - y_1 y_3 \\ 4y_1^2 - 4x_1^2 \end{pmatrix} + U. \quad (18)$$

选取滑模面:  $s_i = D_t^{q-1} e_i + \int_0^t e_i(\tau) d\tau, i = 1, 2, 3, k_i$  的自适应率为  $\dot{k}_i = \theta |e_i| |s_i|, \theta$  为大于零的常数. 根据定理 1, 设计的控制器为

$$U = \begin{pmatrix} -\mu k_1 |e_1| \operatorname{sgn}(s_1) \\ -\mu k_2 |e_2| \operatorname{sgn}(s_2) \\ -\mu k_3 |e_3| \operatorname{sgn}(s_3) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

数值仿真时, 选取  $q = 0.9$ , 驱动系统初始值设定为  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 1$ , 取受控响应系统的初始值为  $y_1(0) = 1.2, y_2(0) = 2.2, y_3(0) = 1.3, \mu = 0.01, \theta = 2$ , 令  $a = 1$ , 时间步长  $h = 0.001$ , 则数值仿真结果如图 2 所示.

仿真结果表明, 在控制器的作用下, 同步误差系统渐近稳定,  $e_1, e_2, e_3$  随着时间的变化很快趋于零, 从而实现了系统 (16) 与系统 (17) 之间的同步.

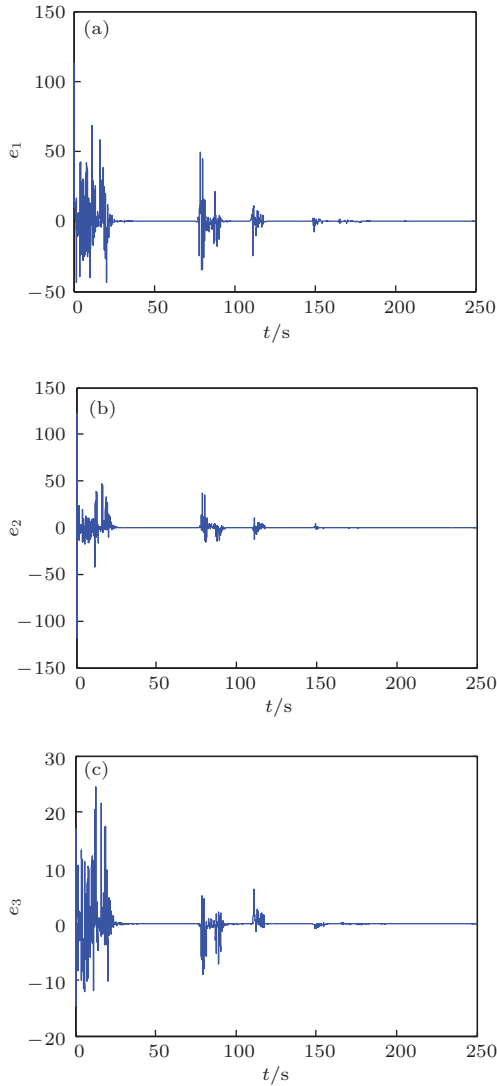


图2 分数阶 Liu 系统的滑模控制同步误差随时间的变化 (a)  $e_1$  随时间的变化; (b)  $e_2$  随时间的变化; (c)  $e_3$  随时间的变化

### 3.3 分数阶 Arneodo 系统的自适应滑模控制同步

驱动系统, 响应系统选取分数阶 Arneodo 系统 [22] 进行数值模拟.

驱动系统为

$$D_t^q \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -b & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -x_1^3 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

受控响应系统为

$$D_t^q \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -b & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_1^3 \end{pmatrix} + \mathbf{U}. \quad (21)$$

由 (20) 和 (21) 式得误差系统为

$$D_t^q \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & -b & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^3 - y_1^3 \end{pmatrix} + \mathbf{U}. \quad (22)$$

选取滑模面:  $s_i = D_t^{q-1} e_i + \int_0^t e_i(\tau) d\tau$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k_i$  的自适应率为  $\dot{k}_i = \theta |e_i| |s_i|$ ,  $\theta$  为大于零的常数. 根据定理 1, 设计的控制器为

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\mu k_1 |e_1| \text{sgn}(s_1) \\ -\mu k_2 |e_2| \text{sgn}(s_2) \\ -\mu k_3 |e_3| \text{sgn}(s_3) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

数值仿真选取  $a = 5.5$ ,  $b = 3.5$ ,  $c = 0.4$ ,  $q = 0.9$  时系统是混沌的, 设定系统 (20) 的初始值为  $x_1(0) = -0.5$ ,  $x_2(0) = 0$ ,  $x_3(0) = 0.1$ , 取受控响应系统的初始值为  $y_1(0) = 0.2$ ,  $y_2(0) = 0.1$ ,  $y_3(0) = 0.3$ ,  $\mu = 0.01$ ,  $\theta = 2$ , 令  $\alpha = 1$ , 时间步长  $h = 0.001$ , 则数值仿真结果如图 3 所示.

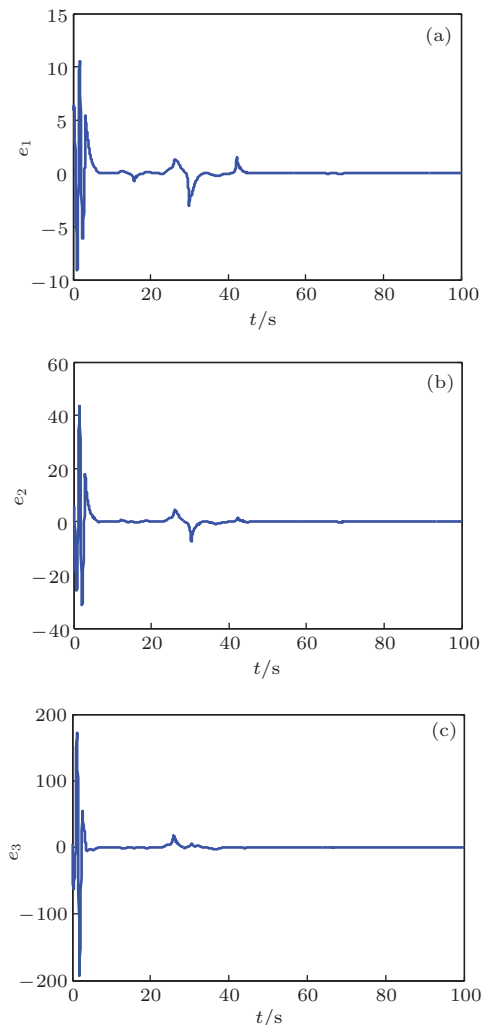


图3 分数阶 Arneodo 系统的滑模控制同步误差随时间的变化 (a)  $e_1$  随时间的变化; (b)  $e_2$  随时间的变化; (c)  $e_3$  随时间的变化



从数值仿真的结果可以看出, 在控制器的作用下, 随着时间的变化,  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  很快地趋近于零, 两个系统达到了渐近稳定, 实现了系统 (20) 与系统 (21) 的同步.

## 4 结 论

基于滑模控制理论和自适应控制理论, 本文针对三维分数阶混沌系统的同步问题, 设计了一个具有较强鲁棒性的分数阶积分滑模面; 基于 Lyapunov 稳定性理论并根据滑模可达条件设计了一种自适应滑模控制器. 利用所设计的控制器实现了分数阶 Chen 系统的滑模控制同步、分数阶 Liu 系统与分数阶 Arneodo 系统的滑模控制同步. 数值模拟仿真结果表明, 所设计的控制器控制效果较好, 易于实现, 具有广阔的应用前景.

## 参考文献

- [1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Ditto W L, Raueo S N, Spano M L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 3211
- [3] Chen S, Lü J 2002 *Chaos Soliton. Fract.* **14** 643
- [4] Wang C, Su J 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **20** 967
- [5] Gao X, Yu J B 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 141
- [6] Zhang H G, Fu J, Ma T D, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 969
- [7] Liang C X, Tang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 135
- [8] Huang L L, Ma N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160510 (in Chinese) [黄丽莲, 马楠 2012 物理学报 **61** 160510]
- [9] Niu H, Zhang G S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130502 (in Chinese) [牛弘, 张国山 2013 物理学报 **62** 130502]
- [10] Yu Y G, Wen G G, Li H X, Diao M 2009 *Int. J. Non-linear Sci. Num.* **10** 379
- [11] Faieghi M R, Delavari H 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 731
- [12] Wang X Y, He Y J 2008 *Phys. Lett. A* **372** 435
- [13] Li C P, Deng W H 2006 *Int. J. Modern Phys. B* **20** 791
- [14] Deng W H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056201
- [15] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 666
- [16] Mohammad S T, Mohammad H 2008 *Physica A* **387** 57
- [17] Cao H F, Zhang R X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050510 (in Chinese) [曹鹤飞, 张若徇 2011 物理学报 **60** 050510]
- [18] Wu X J, Li J, Chen G R 2008 *J. Franklin Institute* **345** 392
- [19] Ahamd W M, Sprott J C 2003 *Chaos Soliton. Fract.* **16** 339
- [20] Sun K H, Ren J, Shang F 2008 *Comput. Simulat.* **25** 312 (in Chinese) [孙克辉, 任健, 尚芳 2008 计算机仿真 **25** 312]
- [21] Liu C X, Liu L, Liu K 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **22** 1031
- [22] Lu J G 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 1125

# Design of an adaptive sliding mode controller for synchronization of fractional-order chaotic systems

Pan Guang Wei Jing<sup>†</sup>

(College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

( Received 7 August 2014; revised manuscript received 22 September 2014 )

## Abstract

In this paper, the synchronization of fractional-order chaotic systems is investigated. Based on sliding mode control and adaptive control theory, a fractional order integral sliding surface with strong robustness is designed, and an adaptive sliding controller is proposed for synchronizing the fractional-order chaotic systems with retaining the nonlinear part. Numerical simulations on synchronizing the Chen chaotic systems, the Liu chaotic systems, and Arneodo chaotic systems are carried out separately. The simulation results show the validity and feasibility of the adaptive sliding controller.

**Keywords:** fractional-order chaotic systems, chaos synchronization, adaptive sliding mode control

**PACS:** 05.45.Gg

**DOI:** [10.7498/aps.64.040505](https://doi.org/10.7498/aps.64.040505)

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [ximengxue\\_999@163.com](mailto:ximengxue_999@163.com)