

驻波热声系统的自激振荡机理

汪拓 吴锋 李端勇 陈浩 林杰

Self-excited oscillation mechanism of a standing-wave thermoacoustic system

Wang Tuo Wu Feng Li Duan-Yong Chen Hao Lin Jie

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 044301 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.044301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.044301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I4>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

锂离子进入碳纳米管端口速度的分子动力学模拟

Molecular dynamics simulation of average velocity of lithium ion across the end of carbon nanotube

物理学报.2014, 63(20): 200508 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200508>

(火积)理论在热功转换过程中的应用探讨

Discussion on the application of entransy theory to heat-work conversion processes

物理学报.2014, 63(19): 190501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.190501>

圆柱形热集中器理论、仿真和实现

Cylindrical thermal concentrator: theory, simulation, and implement

物理学报.2014, 63(17): 170507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.170507>

正、反向两源热力循环有限时间热力学性能优化的研究进展

Progress in the study on finite time thermodynamic optimization for direct and reverse two-heat-reservoir thermodynamic cycles

物理学报.2013, 62(13): 130501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.130501>

超细Pt纳米线结构和熔化行为的分子动力学模拟研究

Structures and melting behaviors of ultrathin platinum nanowires

物理学报.2012, 61(13): 130510 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.130510>

驻波热声系统的自激振荡机理*

汪拓¹⁾²⁾ 吴锋^{1)†} 李端勇¹⁾ 陈浩¹⁾ 林杰¹⁾

1)(武汉工程大学机电工程学院, 武汉 430073)

2)(中建三局集团有限公司建筑设计院, 武汉 430064)

(2014年7月29日收到; 2014年9月23日收到修改稿)

热声发动机的起振过程是一个产生并维持自激振荡的过程, 研究热声自激振荡机理有助于进一步了解热声效应的实质. 根据热声网络理论, 建立了驻波热声发动机的整机网络. 将热声网络比拟成电网络, 利用厄米特式计算了输入热声网络的视在功流, 功流平衡对应自激, 在角频率虚部为零的情况下计算了热声发动机的阈值温度和运行频率. 结果表明, 计算值与实验值符合得较好, 充气压力与阈值温度和运行频率的耦合关系大致相同. 所得结论有助于进一步探究热声效应机理以及热声发动机系统的优化设计.

关键词: 热声热机, 自激振荡, 网络, 阈值温度

PACS: 43.35.Ud, 05.70.-a, 64.60.aq, 87.19.ln

DOI: 10.7498/aps.64.044301

1 引言

尽管热声现象的发现已有200多年的历史, 但热声技术真正实现工程化应用还是近几十年的事. 与传统动力机械相比, 基于热声效应工作的热声热机^[1-4]具有无运动部件、稳定性高、寿命长、适用性强、绿色环保等优点, 因而具有很高的应用潜力.

热声发动机从初始状态到正常运行的过程是热声发动机的起振过程, 在这一过程中, 系统内声波的振荡幅值从零开始, 随时间的演变逐渐增大, 最后稳定于一固定值, 在相空间上表现为一极限环. 输入系统的热能是非时变的, 却能得到一个稳定幅值和相位的周期性振荡, 这是因为非线性环节回热器具有将非时变的热能调制成周期性的能力, 这是依靠回热器的自组织作用来实现的. 因此, 从热动力学^[5]的角度而言, 热声发动机的起振过程也是一个自激振荡的过程.

研究热声发动机系统的自激振荡机理, 有助于进一步了解热声效应的实质. 张晓青等^[6]在实验的基础上利用相空间重构描述了行波热声系统的

自激振荡, 该振荡在相空间上是一稳定的极限环, 表明热声系统是自治系统. 涂虬等^[7,8]证明了回热器的自激振荡特性是负阻尼振荡, 根据阻抗匹配计算了驻波热声发动机的振荡频率, 计算值与实验值符合良好. 陈熙等^[9]利用参数谐振理论分析了热声振荡过程的储能阶段、起振阶段和定常阶段. 李正宇等^[10]在频域和相空间中描述了行波热声发动机系统的自激振荡过程, 并用最大Lyapunov数描述了压力信号的相空间轨迹的变化过程. 胡兴华等^[11]将热声发动机视为由主动网络和被动网络组成的热声振荡器, 利用Nyquist失稳判据得到了起振条件. 余国瑶^[12]利用Fluent软件模拟了驻波和行波热声发动机的自激振荡过程. 伍继浩^[13]观察到行波热声发动机中高频起振和低频起振模态以及两模态间交替变化的现象, 并对影响起振模态的因素进行了分析. Wu等^[14]基于参数谐振理论建立了热声系统的时域模型, 考察了声压振幅和相位随时间演变的动态行为, 得到了起振波形, 并利用Lyapunov稳定性理论考察了定态的稳定性. 这些文献为解释热声自激振荡机理做出了很大的贡献.

事实证明, 热声网络模型^[5-8]是热声热机实现

* 国家自然科学基金(批准号: 51176143)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangtuo1307@163.com

工程化应用的非常方便的强有力工具, 将热声网络比拟成电网络, 用电网络的分析思路来研究热声网络, 利用电路分析软件来研究热声网络的特性, 有望为热声“组件式”设计提供一种工程方法. 本文在热声网络理论的基础上, 根据黄炳华^[15]关于电网络自激的相关结论, 建立了驻波热声发动机的整机网络, 利用网络导纳矩阵的厄米特式分析了输入整机网络的功流. 用闭环网络拆环原理^[16]将热声发动机闭环网络拆成二端口开环网络, 分析了其自激条件, 得到了频率和阈值温度, 并与实验数据进行了对比.

2 驻波热声发动机的网络拓扑描述

驻波热声发动机由高温端换热器、回热器、室温端换热器和谐振管(腔)组成. 如图1所示, 两个温度不同的换热器为回热器提供偏置温差, 当这一温差足够大时, 就能在回热器中产生热声效应, 实现热能转化为机械声功, 谐振管(腔)为热声现象的产生提供合适的声场. 由于回热器两端存在温度差, 所以它是非等温流体管道. 换热器和谐振管的内部温度处处相等, 而成为等温流体管道.

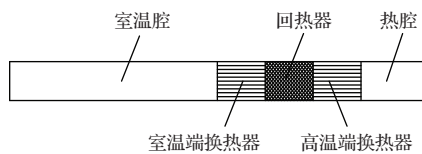


图1 驻波热声发动机结构

根据热声网络理论^[5-8], 非等温流体管道回热器的网络导纳方程可写为(1)式, 这里采用流对称形式, 即入口端和出口端的体积流率都指向网络内部.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_i \\ J_o \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \frac{\gamma_2 e^{-\gamma_1 x} + \gamma_1 e^{\gamma_2 x}}{z_c \gamma_1 (e^{-\gamma_1 x} - e^{\gamma_2 x})} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{z_c \gamma_1 (e^{-\gamma_1 x} - e^{\gamma_2 x})} \\ \frac{(\gamma_1 + \gamma_2) e^{(\gamma_2 - \gamma_1)x}}{z_c \gamma_1 (e^{-\gamma_1 x} - e^{\gamma_2 x})} & -\frac{\gamma_1 e^{-\gamma_1 x} + \gamma_2 e^{\gamma_2 x}}{z_c \gamma_1 (e^{-\gamma_1 x} - e^{\gamma_2 x})} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} p_i \\ p_o \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中,

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4yz},$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4yz}, \\ \alpha &= \frac{f_\kappa - f_\nu}{(1 - f_\nu)(1 - \sigma)} \frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dx}, \\ y &= \frac{i\omega A_f}{\gamma p_m} [1 + (\gamma - 1)f_\kappa], \\ z &= \frac{i\omega \rho_m}{A_f(1 - f_\nu)}, \quad z_c = \frac{p}{J} = \frac{z}{\gamma_1}. \end{aligned}$$

这里, J, p, T_m 和 ρ_m 分别是流相工质的体积流率、压力、温度和密度; 下标 i 和 o 分别表示入口端和出口端; γ_1 和 γ_2 分别是行进波和反射波的声传播常数; α, y, z 和 z_c 分别是单位长度的流控源参数、并联导纳、串联阻抗和特性阻抗; f_κ 和 f_ν 分别是回热器截面平均导热分布函数和黏性分布函数; γ 和 σ 分别是比热容比和普朗特数; ω 是角频率; A_f 是流通面面积; x 表示纵向坐标.

对于等温流体管道换热器和谐振管, 由于 $dT_m/dx = 0$, 因此 $\alpha = 0, \gamma_1 = \gamma_2$, 代入(1)式, 并改写各物理量, 得到等温流体管道的网络导纳方程:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_i \\ J_o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\cosh(\gamma_1 x)}{z_c \sinh(\gamma_1 x)} & -\frac{1}{z_c \sinh(\gamma_1 x)} \\ -\frac{1}{z_c \sinh(\gamma_1 x)} & \frac{\cosh(\gamma_1 x)}{z_c \sinh(\gamma_1 x)} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} p_i \\ p_o \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2)$$

令(1)和(2)式的导纳矩阵 $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$, 显

然, 在等温流体管道中, 有 $y_{12} = y_{21}$. 根据文献^[17], 各热声组件的子网络拓扑描述如图2所示. 其中, 谐振腔可视为一个声容, 其导纳值为 $Y = i\omega V/(\rho_m c^2)$, 这里 V 是谐振腔的体积, c 是声速. 在考虑流相工质的黏性和传热效应下, 热声系统的封闭端不可视为无穷大的阻抗, 其阻抗为有限值, 封闭端的导纳 $Y = e^{-i\pi/4}(\gamma - 1)\sqrt{\omega\kappa}/(\rho_m c_p)/(\rho_m c^2)$, 此处 κ 和 c_p 分别是流相工质的导热系数和定压比热容.

从图2可以明显看到, 回热器存在一个压控流源, 在等温流体管道中, 由于 $y_{12} = y_{21}$, 所以不存在源项. 得到了各热声组件的网络拓扑图, 整机网络就可由这些子网络串联而成, 网络中各元件的值反映了各热声参数的耦合关系, 因此可以利用电网络的分析方法来研究整机网络的性能.

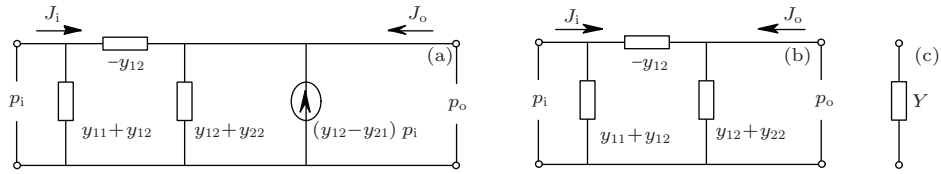


图2 各热声组件的网络拓扑 (a) 非等温流体管道回热器; (b) 等温流体管道换热器和谐振管; (c) 谐振腔和刚性封闭端

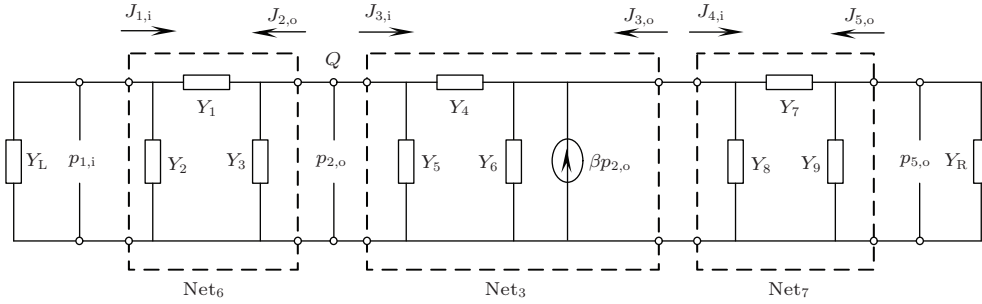


图3 驻波热声发动机闭环整机网络

考察图1所示的驻波热声发动机系统. 令室温腔、室温端换热器、回热器、高温端换热器和热腔的导纳矩阵分别为 \mathbf{Y}_1 — \mathbf{Y}_5 , 其导纳矩阵的元素分别用 $Y_{k,ij}$ 表示, $k=1-5; i, j=1, 2$. 各热声组件对应的子网络用 Net_1 — Net_5 表示. 两封闭端的导纳分别用 Y_L 和 Y_R 表示. 图2给出了各热声组件的网络拓扑描述, 整机的网络拓扑由对应的各热声组件子网络串联而成, 如图3所示. 其中, 室温腔和室温换热器的子网络 Net_1 和 Net_2 合并为 Net_6 , 高温换热器和热腔的子网络 Net_4 和 Net_5 合并为 Net_7 , 合并后的子网络 Net_6 和 Net_7 的网络导纳方程分别为

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_{1,i} \\ J_{2,o} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{6,11} & y_{6,12} \\ y_{6,21} & y_{6,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{2,o} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{1,11} - \frac{y_{1,12}y_{1,21}}{y_{1,22} + y_{2,11}} & -\frac{y_{1,12}y_{2,12}}{y_{1,22} + y_{2,11}} \\ -\frac{y_{1,21}y_{2,21}}{y_{1,22} + y_{2,11}} & y_{2,22} - \frac{y_{2,12}y_{2,21}}{y_{1,22} + y_{2,11}} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{2,o} \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} J_{4,i} \\ J_{5,o} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_{7,11} & y_{7,12} \\ y_{7,21} & y_{7,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{4,i} \\ p_{5,o} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} y_{4,11} - \frac{y_{4,12}y_{4,21}}{y_{4,22} + y_{5,11}} & -\frac{y_{4,12}y_{5,12}}{y_{4,22} + y_{5,11}} \\ -\frac{y_{4,21}y_{5,21}}{y_{4,22} + y_{5,11}} & y_{5,22} - \frac{y_{5,12}y_{5,21}}{y_{4,22} + y_{5,11}} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} p_{4,i} \\ p_{5,o} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

图3所示的整机网络由许多导纳元件和一个压控流源组成, 元件的值与各热声参数有关. 根据图2, 各导纳值和源参数分别为

$$\begin{aligned} Y_1 &= -y_{6,12}, & Y_2 &= y_{6,11} + y_{6,12}, \\ Y_3 &= y_{6,12} + y_{6,22}, & Y_4 &= -y_{3,12}, \\ Y_5 &= y_{3,11} + y_{3,12}, & Y_6 &= y_{3,12} + y_{3,22}, \\ \beta &= y_{3,12} - y_{3,21}, & Y_7 &= -y_{7,12}, \\ Y_8 &= y_{7,11} + y_{7,12}, & Y_9 &= y_{7,12} + y_{7,22}, \\ Y_L &= Y_R = e^{-i\pi/4} \sqrt{\omega\kappa/(\rho_m c_p)/(\rho_m c^2)}. \end{aligned}$$

3 驻波热声发动机的自激机理

令图3所示的整机二端口网络的导纳方程为

$$\begin{bmatrix} J_{1,i} \\ J_{5,o} \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{5,o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{5,o} \end{bmatrix},$$

则导纳矩阵 \mathbf{Y} 对应的厄米特矩阵 $\mathbf{Y}_P = \frac{1}{2} [(\bar{\mathbf{Y}})^T + \mathbf{Y}]$, 其厄米特式为 $(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{Y}_P \mathbf{p}$. 显然, \mathbf{Y}_P 是一个复数矩阵, 但其厄米特式却是一个实数, 下面证明之.

$$\text{令 } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} + in_{11} & m_{12} + in_{12} \\ m_{21} + in_{21} & m_{22} + in_{22} \end{bmatrix}, \text{ 则有}$$

$$\mathbf{Y}_P = \begin{bmatrix} m_{11} & \frac{m_{12} + m_{21}}{2} + i\frac{n_{12} - n_{21}}{2} \\ \frac{m_{12} + m_{21}}{2} - i\frac{n_{12} + n_{21}}{2} & m_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{Y}_P \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} \bar{p}_{1,i} & \bar{p}_{5,o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & \frac{m_{12} + m_{21}}{2} + i\frac{n_{12} - n_{21}}{2} \\ \frac{m_{12} + m_{21}}{2} - i\frac{n_{12} + n_{21}}{2} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{5,o} \end{bmatrix} \\ &= \bar{p}_{1,i} p_{1,i} m_{11} + \bar{p}_{5,o} p_{5,o} m_{22} + \frac{1}{2} [(m_{12} + m_{21})(p_{1,i} \bar{p}_{5,o} + \bar{p}_{1,i} p_{5,o}) - i(n_{12} - n_{21})(p_{1,i} \bar{p}_{5,o} - \bar{p}_{1,i} p_{5,o})] \\ &= |p_{1,i}|^2 m_{11} + |p_{5,o}|^2 m_{22} + (m_{12} + m_{21}) [\text{Re}(p_{1,i}) \text{Re}(p_{5,o}) + \text{Im}(p_{1,i}) \text{Im}(p_{5,o})] \\ &\quad - (n_{12} - n_{21}) [\text{Re}(p_{1,i}) \text{Im}(p_{5,o}) - \text{Im}(p_{1,i}) \text{Re}(p_{5,o})]. \end{aligned} \quad (5)$$

在热声系统中, 有功功流可写为

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{1}{2} \text{Re}(p\bar{J}) = \frac{1}{2} \text{Re}(\bar{p}J) \\ &= \frac{1}{2} |p|^2 \text{Re}\left(\frac{J}{p}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

对于图 3 所示的整机网络, 左端口的输入导纳为

$$Y_i = \frac{J_{1,i}}{p_{1,i}} = Y_{11} + \frac{p_{5,o}}{p_{1,i}} Y_{12},$$

右端口的输入导纳为

$$Y_o = \frac{J_{5,o}}{p_{5,o}} = Y_{22} + \frac{p_{1,i}}{p_{5,o}} Y_{21},$$

代入 (6) 式, 得到输入热声网络的有功功流为

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{1}{2} |p_{1,i}|^2 \text{Re}\left(Y_{11} + \frac{p_{5,o}}{p_{1,i}} Y_{12}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} |p_{5,o}|^2 \text{Re}\left(Y_{22} + \frac{p_{1,i}}{p_{5,o}} Y_{21}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[|p_{1,i}|^2 m_{11} + |p_{5,o}|^2 m_{22} \right. \\ &\quad \left. + \text{Re}(p_{5,o} Y_{12} \bar{p}_{1,i} + p_{1,i} Y_{21} \bar{p}_{5,o}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ |p_{1,i}|^2 m_{11} + |p_{5,o}|^2 m_{22} \right. \\ &\quad + (m_{12} + m_{21}) [\text{Re}(p_{1,i}) \text{Re}(p_{5,o}) \\ &\quad + \text{Im}(p_{1,i}) \text{Im}(p_{5,o})] \\ &\quad - (n_{12} - n_{21}) [\text{Re}(p_{1,i}) \text{Im}(p_{5,o}) \\ &\quad \left. - \text{Im}(p_{1,i}) \text{Re}(p_{5,o}) \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

比较 (5) 和 (7) 式, 得到

$$\dot{P} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{Y}_P \mathbf{p}. \quad (8)$$

(8) 式表明输入热声网络的有功功流正好为导纳矩阵的厄米特式的一半.

同理, 对应的厄米特矩阵 \mathbf{Y}_P , 我们也可以定义一个斜厄米特矩阵 $\mathbf{Y}_Q = \frac{1}{2} i [(\bar{\mathbf{Y}})^T - \mathbf{Y}]$, 相应的厄米特式为 $(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{Y}_Q \mathbf{p}$, 这里称其为厄米特第二形式, $(\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{Y}_P \mathbf{p}$ 称为厄米特第一形式. 同理, 我们也可以证明, 尽管 \mathbf{Y}_Q 是一个复数矩阵, 但厄米特第二形式却是一个实数.

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{Y}_Q \mathbf{p} &= \begin{bmatrix} \bar{p}_{1,i} & \bar{p}_{5,o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & \frac{n_{12} + n_{21}}{2} - i\frac{m_{12} - m_{21}}{2} \\ \frac{n_{12} + n_{21}}{2} + i\frac{m_{12} - m_{21}}{2} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,i} \\ p_{5,o} \end{bmatrix} \\ &= \bar{p}_{1,i} p_{1,i} n_{11} + \bar{p}_{5,o} p_{5,o} n_{22} \\ &\quad + \frac{1}{2} [(n_{12} + n_{21})(p_{1,i} \bar{p}_{5,o} + \bar{p}_{1,i} p_{5,o}) + i(m_{12} - m_{21})(p_{1,i} \bar{p}_{5,o} - \bar{p}_{1,i} p_{5,o})] \\ &= |p_{1,i}|^2 n_{11} + |p_{5,o}|^2 n_{22} + (n_{12} + n_{21}) [\text{Re}(p_{1,i}) \text{Re}(p_{5,o}) + \text{Im}(p_{1,i}) \text{Im}(p_{5,o})] \\ &\quad + (m_{12} - m_{21}) [\text{Re}(p_{1,i}) \text{Im}(p_{5,o}) - \text{Im}(p_{1,i}) \text{Re}(p_{5,o})]. \end{aligned} \quad (9)$$

在热声系统中, 无功功流可写为

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{1}{2} \text{Im} (p\bar{J}) = -\frac{1}{2} \text{Im} (\bar{p}J) \\ &= -\frac{1}{2} |p|^2 \text{Im} \left(\frac{J}{p} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

将两端口的输入导纳代入 (10) 式, 得到输入热声网络的无功功流为

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= -\frac{1}{2} |p_{1,i}|^2 \text{Im} \left(Y_{11} + \frac{p_{5,o}}{p_{1,i}} Y_{12} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} |p_{5,o}|^2 \text{Im} \left(Y_{22} + \frac{p_{1,i}}{p_{5,o}} Y_{21} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[|p_{1,i}|^2 n_{11} + |p_{5,o}|^2 n_{22} \right. \\ &\quad \left. + \text{Im} (p_{5,o} Y_{12} \bar{p}_{1,i} + p_{1,i} Y_{21} \bar{p}_{5,o}) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ |p_{1,i}|^2 n_{11} + |p_{5,o}|^2 n_{22} \right. \\ &\quad \left. + (n_{12} + n_{21}) [\text{Re} (p_{1,i}) \text{Re} (p_{5,o}) \right. \\ &\quad \left. + \text{Im} (p_{1,i}) \text{Im} (p_{5,o})] \right. \\ &\quad \left. + (m_{12} - m_{21}) [\text{Re} (p_{1,i}) \text{Im} (p_{5,o}) \right. \\ &\quad \left. - \text{Im} (p_{1,i}) \text{Re} (p_{5,o})] \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

联立 (9) 和 (11) 式, 得到

$$\dot{Q} = -\frac{1}{2} (\bar{p})^T \mathbf{Y}_Q \mathbf{p}, \quad (12)$$

(12) 式表明输入网络的无功功流正好是导纳矩阵的厄米特第二形式的 $-1/2$.

联立 (8) 和 (12) 式, 得到输入热声网络的视在功流为

$$\begin{aligned} \dot{W} = \dot{P} + i\dot{Q} &= \frac{1}{2} \left[(\bar{p})^T \mathbf{Y}_P \mathbf{p} - i(\bar{p})^T \mathbf{Y}_Q \mathbf{p} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\bar{p})^T (\mathbf{Y}_P - i\mathbf{Y}_Q) \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\bar{p})^T \bar{\mathbf{Y}} \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (13)$$

若热声网络的两端压力相等, 即 $p_{1,i} = p_{5,o}$, 则

(13) 式可改写为

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \frac{1}{2} |\bar{p}_{1,i}|^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |\bar{p}_{1,i}|^2 (\bar{Y}_{11} + \bar{Y}_{12} + \bar{Y}_{21} + \bar{Y}_{22}) \\ &= \frac{1}{2} |\bar{p}_{1,i}|^2 \sum \bar{Y}_{ij}, \end{aligned} \quad (14)$$

若 $\sum \bar{Y}_{ij} = 0$, 而 $p_{1,i} = p_{5,o} \neq 0$, 表明此时输入热声系统的视在功流为零, 若此状态下角频率 $\omega \neq 0$ 且为定值, 说明热声系统没有吸收外界的能量而能维持周期性振荡, 因此网络自激, 即功流平衡对应自激振荡.

由于 $\sum \bar{Y}_{ij} = 0$ 与 $\sum Y_{ij} = 0$ 等价, 因此热声系统产生并维持自激振荡的条件是采用流对称形式下整机网络的导纳矩阵的四个元素之和为零, 即 $\sum Y_{ij} = 0$.

但对任一实际热声系统而言, 两端口的压力并不总是相等, 需进行进一步分析. 对于图 3 所示的二端口网络, 我们利用闭环网络拆环原理^[16] 在 Q 点处断开, 得到图 4 所示的开环二端口热声整机网络. 此时, 很明显, 拆环后二端口网络两端的压力相等, $p_{2,o} = p_{3,i}$, 体积流率大小相等, 方向相反, $J_{2,o} = -J_{3,i}$, 因此在这种情况下可以利用自激条件 $\sum Y_{ij} = 0$.

对于图 4 所示的开环二端口热声整机网络, 其 Y 参数分别为

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \left. \frac{J_{2,o}}{p_{2,o}} \right|_{p_{3,i}=0} = Y_3 + \frac{Y_1 (Y_2 + Y_L)}{Y_1 + Y_2 + Y_L}, \\ Y_{12} &= \left. \frac{J_{2,o}}{p_{3,i}} \right|_{p_{2,o}=0} = 0, \\ Y_{21} &= \left. \frac{J_{3,i}}{p_{2,o}} \right|_{p_{3,i}=0} \\ &= -\beta Y_4 (Y_7 + Y_9 + Y_R) [(Y_4 + Y_6 + Y_8) \\ &\quad \times (Y_7 + Y_9 + Y_R) + Y_7 (Y_9 + Y_R)]^{-1}, \end{aligned}$$

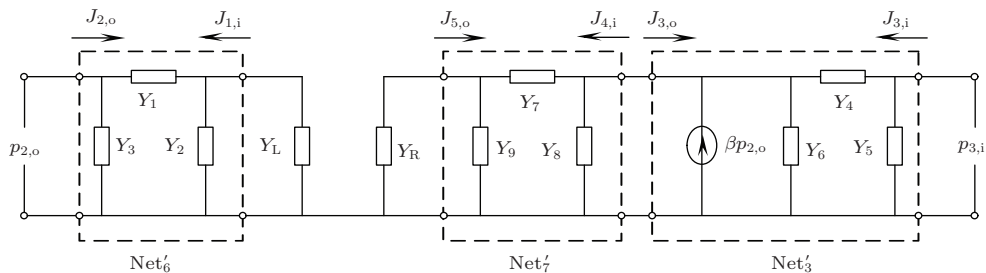


图 4 开环热声发动机整机网络拓扑

$$\begin{aligned}
 Y_{22} &= \frac{J_{3,i}}{p_{3,i}} \Big|_{p_{2,o}=0} \\
 &= Y_5 + Y_4 [(Y_6 + Y_8)(Y_7 + Y_9 + Y_R) \\
 &\quad + Y_7(Y_9 + Y_R)] [(Y_4 + Y_6 + Y_8) \\
 &\quad \times (Y_7 + Y_9 + Y_R) + Y_7(Y_9 + Y_R)]^{-1}.
 \end{aligned}$$

根据自激条件 $\sum Y_{ij} = 0$, 我们得到驻波热声发动机产生并维持自激振荡的条件:

$$\begin{aligned}
 \sum Y_{ij} &= Y_3 + Y_5 + \frac{Y_1(Y_2 + Y_L)}{Y_1 + Y_2 + Y_L} \\
 &\quad + Y_4 [(Y_6 + Y_8 - \beta)(Y_7 + Y_9 + Y_R) \\
 &\quad + Y_7(Y_9 + Y_R)] [(Y_4 + Y_6 + Y_8) \\
 &\quad \times (Y_7 + Y_9 + Y_R) + Y_7(Y_9 + Y_R)]^{-1} \\
 &= 0, \tag{15}
 \end{aligned}$$

式中, Y_1 — Y_9 , Y_L , Y_R 以及 β 与热声各参数有关. (15) 式反映了热声发动机的结构、运行环境、工作介质、频率以及温度之间的耦合关系.

(15) 式是一个复数方程, 在给定热声系统的结构以及运行条件下, 即可计算出温度和频率. 这一温度是驻波热声发动机实现自激振荡的最低温度, 我们称之为阈值温度, 只有回热器的实际热端温度大于阈值温度时, 热声发动机才能正常工作. 阈值温度反映了热声发动机利用低品位能源的能力. 计算出的频率是驻波热声发动机的工作频率, 即输出声波的频率, 反映了系统的谐振模态. 这一频率是一个正实数, 即虚部为零. 因为频率的虚部表示振幅的耗散, 虚部为正表示振幅衰减, 虚部为负表示振幅的增益, 所以只有虚部为零时才能产生振幅稳定的声波.

4 实验验证

4.1 基频谐振模态下的实验验证

我们利用 Arnott 等 [18] 得到的驻波热声发动机的实验数据对上述理论进行验证, 该驻波热声发动机的具体结构参数如表 1 所列. 他们采用氦气为流相工质, 室温腔以及室温换热器的温度保持在 20 °C, 分别在压力为 143, 170, 184, 198, 212, 239, 308 kPa 的条件下进行了起振实验.

在压力为 143 kPa 时, 利用 (15) 式做 $|\sum Y_{ij}|$ 与 f 和 T_H 的三维关系曲线, T_H 是回热器高温端的温度, 即阈值温度. 图 5 给出了这一三维图对应的二维剖面图. 从图 5 可以明显看到, 存在一个频

率和一个温度使 $|\sum Y_{ij}| = 0$, 即满足 (15) 式. 在 143 kPa 的压力下, 频率为 335.3 Hz, 阈值温度为 187.5 °C. 同理, 也可以计算出其他压力下对应的阈值温度和频率, 计算结果与实验结果如图 6 所示.

表 1 Arnott 等 [18] 得到的驻波热声发动机的结构参数

热声组件	孔径/mm	孔隙率	长度/mm
室温腔	42.58	0.992	1290
室温换热器	1.016	0.53	16.43
回热器	0.77	0.69	50.8
高端换热器	1.016	0.61	17.53
热腔	42.75	1	230.7

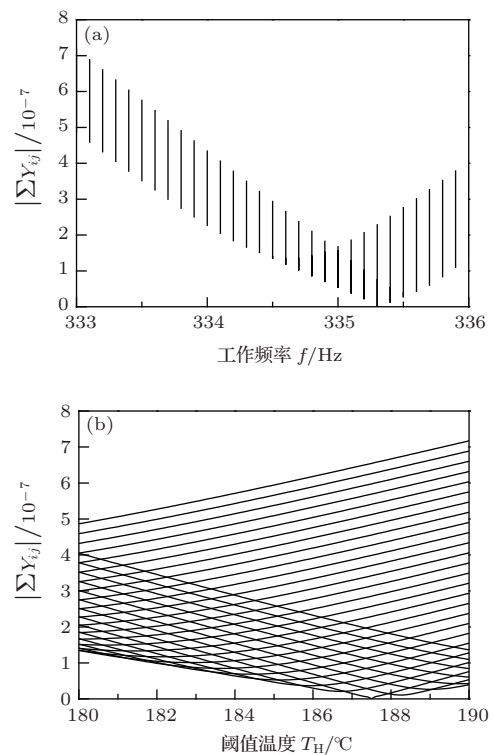


图 5 $|\sum Y_{ij}|$ 与工作频率 f 和阈值温度 T_H 的关系

由图 6 所示的计算结果可知, 阈值温度的最大误差为 7.78%, 最小误差为 3.35%, 工作频率的最大误差为 5.77%, 最小误差为 4.60%, 表明用 (15) 式计算阈值温度和工作频率是可行的.

同时, 我们可以看到, 在实验值和计算值中, 存在一个最优充气压力使阈值温度和工作频率最小, 分别为 198 kPa 和 212 kPa 下的条件, 表明此条件下热声系统对低品位能源的利用能力最大, 还表明计算值与实验值中压力与阈值温度和工作频率之间的耦合关系相同. 此外, 我们也可以看到, 阈值

温度的计算值比实验值小,这是因为计算值中阈值温度是指回热器高温端的温度,实验值中阈值温度是指高温端换热器的温度,两者必然存在传热温差,所以高温端换热器的温度大于回热器高温端的温度,即计算值比实验值小.

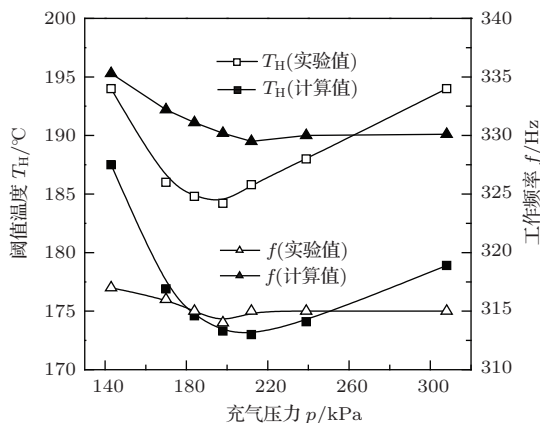


图6 工作频率 f 和阈值温度 T_H 与充气压力的关系

4.2 二阶频率谐振模式下的实验验证

我们利用文献[19]的驻波热声发动机的实验数据对二阶频率进行验证,该驻波热声发动机的具体结构参数如表2所列.文献[19]采用氮气为流相工质,室温腔以及室温换热器的温度保持在300 K,分别在压力为200, 300, 400, 500, 600 kPa的条件下进行了实验,得到了基频和二阶频率.

表2 文献[19]的驻波热声发动机的结构参数

热声组件	内径 /mm	长度 /mm	孔隙率	板间距 /mm	孔径 /mm
气库	85	500	—	—	—
谐振管	39	2600	—	—	—
室温换热器	59.5	40	0.25	—	3
回热器	59.5	110	0.4	0.6	—
热端换热器	59.5	50	0.35	1	—
热腔	59.5	60	—	—	—

在300 kPa的压力下,我们利用(15)式做 $\left| \sum Y_{ij} \right|$ 与 f 和 T_H 的三维关系曲线,图7给出了三维图对应的 $\left| \sum Y_{ij} \right|$ - f 二维剖面图,可以明显看到存在两个频率使 $\left| \sum Y_{ij} \right| = 0$,这两个频率对应基频和二阶频率.同理,也可以计算出其他压力下的频率,计算结果与实验结果如图8所示.

从图8可以看到,计算值与实验值符合得比较好,基频和二阶频率的误差在2%左右,这一误差比

4.1节中的结果小,表明对于低频热声发动机,(15)式能有效预测阈值温度和谐振频率,且误差较小;对于高频热声发动机,(15)式也能有效预测阈值温度和谐振频率,但误差相对稍大.同时我们也可以看到,基频下计算值偏小,二阶频率下计算值偏大.此外,随着充气压力的增大,计算值与实验值的变化趋势近似相同.

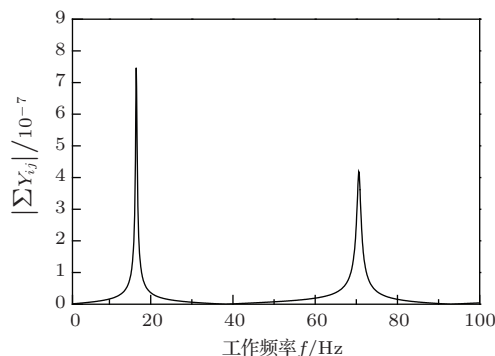


图7 $\left| \sum Y_{ij} \right|$ 与工作频率 f 的关系

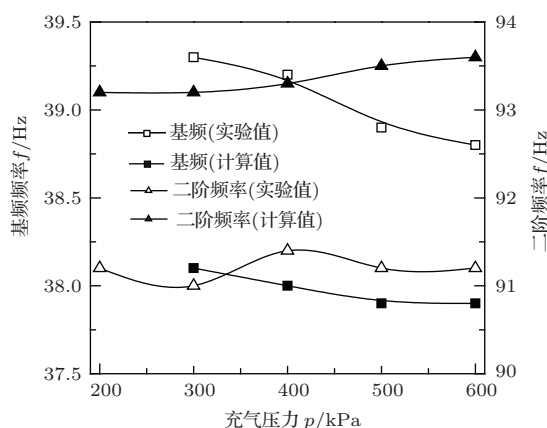


图8 基频和二阶频率与充气压力的关系

综合4.1节和4.2节的结果,表明在流对称形式下,驻波热声系统的二端口开环整机网络的导纳矩阵四个元素之和为零,即 $\sum Y_{ij} = 0$,能有效预测阈值温度和工作频率.当热声系统的功率平衡时,系统能够实现自激振荡,产生周期、振幅、相位稳定的声波.

5 结论

本文建立了驻波热声发动机系统的整机网络拓扑,将该网络比拟成电网络,利用厄米特式计算了输入热声网络的有功功流和无功功流,根据功流平衡对应自激,利用闭环网络拆环原理,分析了驻

波热声发动机的自激振荡机理, 在频率虚部为零的情况下计算了阈值温度和工作频率, 得到如下结论:

- 1) 功流平衡意味着网络自激;
- 2) 在采用流对称形式下, 驻波热声发动机二端口开环网络的导纳矩阵的四个元素之和为零时, 网络能产生自激振荡;
- 3) 在频率虚部为零时, 利用2)可以有效预测驻波热声发动机的阈值温度和工作频率, 预测值与实验值符合良好;
- 4) 在基频模式下存在一最优压力, 使阈值温度最低. 但随着压力的变化, 阈值温度和频率的变化幅度并不大.

参考文献

- [1] Swift G W 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **84** 1145
- [2] Wu F, Li Q, Guo F Z, Shu A Q 2012 *J. Wuhan Inst. Tech.* **34** 1 (in Chinese) [吴锋, 李青, 郭方中, 舒安庆 2012 武汉工程大学学报 **34** 1]
- [3] Yang Z C, Wu F, Guo F Z, Zhang C P 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 084303 (in Chinese) [杨志春, 吴锋, 郭方中, 张春萍 2011 物理学报 **60** 084303]
- [4] Ge H, Fan L, Xia J, Zhang S Y, Tao S, Yang Y T, Zhang H 2014 *Chin. Phys. B* **23** 074301
- [5] Guo F Z, Li Q 2007 *Heat Dynamics* (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press) p54 (in Chinese) [郭方中, 李青 2007 热动力学 (武汉: 华中科技大学出版社) 第54页]
- [6] Zhang X Q, Li Z Y, Wu J H, Li Q, Tu Q, Yu Z B, Guo F Z 2003 *Cryogenics* **1** 39 (in Chinese) [张晓青, 李正宇, 伍继浩, 李青, 涂虬, 禹智斌, 郭方中 2003 低温工程 **1** 39]
- [7] Tu Q, Li M, Li Q, Zhang X Q, Guo F Z 2003 *Vacuum Cryogenics* **9** 239 (in Chinese) [涂虬, 李敏, 李青, 张晓青, 郭方中 2003 真空与低温 **9** 239]
- [8] Tu Q, Li Q, Liu J X, Wu F, Guo F Z 2003 *Cryogenics* **2** 8 (in Chinese) [涂虬, 李青, 刘钧霞, 吴锋, 郭方中 2003 低温工程 **2** 8]
- [9] Chen X, Li Q, Li Z Y, Guo F Z 2004 *Cryogenics* **1** 27 (in Chinese) [陈熙, 李青, 李正宇, 郭方中 2004 低温工程 **1** 27]
- [10] Li Z Y, Li Q, Wu F, Chen X, Tu Q, Guo F Z 2004 *Cryogenics* **1** 17 (in Chinese) [李正宇, 李青, 吴锋, 陈熙, 涂虬, 郭方中 2004 低温工程 **1** 17]
- [11] Hu X H, Zhang X Q, Wang H L, Shu S M 2008 *Chin. Sci. Bull.* **53** 2109 (in Chinese) [胡兴华, 张晓青, 王惠龄, 舒水明 2008 科学通报 **53** 2109]
- [12] Yu G Y 2008 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [余国瑶 2008 博士学位论文 (北京: 中国科学院)]
- [13] Wu J H 2002 *Ph. D. Dissertation* (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology) (in Chinese) [伍继浩 2002 博士学位论文 (武汉: 华中科技大学)]
- [14] Wu F, Shu A Q, Guo F Z, Wang T 2014 *Energy* **68** 370
- [15] Huang B H 1990 *J. Guangxi Univ.* **15** 90 (in Chinese) [黄炳华 1990 广西大学学报 **15** 90]
- [16] Huang B H 1990 *J. Guangxi Univ.* **15** 81 (in Chinese) [黄炳华 1990 广西大学学报 **15** 81]
- [17] Hu X H 2008 *Ph. D. Dissertation* (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology) (in Chinese) [胡兴华 2008 博士学位论文 (武汉: 华中科技大学)]
- [18] Arnott W P, Belcher J R, Raspet R, Bass H 1994 *J. Acoust. Soc. Am.* **96** 370
- [19] Lai B H 2011 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [赖碧翠 2011 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]

Self-excited oscillation mechanism of a standing-wave thermoacoustic system*

Wang Tuo¹⁾²⁾ Wu Feng^{1)†} Li Duan-Yong¹⁾ Chen Hao¹⁾ Lin Jie¹⁾

1) (School of Mechanical and Electrical Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China)

2) (Architecture Design Institute, China Construction Third Engineering Bureau Group CO., LTD., Wuhan 430064, China)

(Received 29 July 2014; revised manuscript received 23 September 2014)

Abstract

The onset process of a thermoacoustic prime mover is a process generating and maintaining self-excited oscillation. It is helpful to have a better understanding of thermoacoustic effect by investigating the mechanism of thermoacoustic self-excited oscillation. The network model of a representative standing-wave thermoacoustic prime mover is established on the basis of thermoacoustic network theory. Comparing thermoacoustic network to electric network, the apparent power flux which inputs the thermoacoustic network is calculated by using the Hermitian form. In the network, the apparent power flux balance means establishing the self-excited oscillation. Based on the above, the threshold temperature and operation frequency of a thermoacoustic prime mover are calculated on condition that the imaginary part of angular frequency is equal to zero. The calculation results are in good agreement with the experimental results. For the coupling relationship of the main pressure with the threshold temperature and operation frequency, the calculation results are roughly close to the experimental results. The obtained results are helpful for the further studying of the thermoacoustic effect and the optimal designing of a thermoacoustic system.

Keywords: thermoacoustic engine, self-excited oscillation, network, threshold temperature

PACS: 43.35.Ud, 05.70.-a, 64.60.aq, 87.19.ln

DOI: [10.7498/aps.64.044301](https://doi.org/10.7498/aps.64.044301)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51176143).

† Corresponding author. E-mail: wangtuo1307@163.com