

基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆动力学模型

刘延柱 薛纭

Dynamical model of Cosserat elastic rod based on Gauss principle

Liu Yan-Zhu Xue Yun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 044601 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.044601

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.044601>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I4>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

变质量 Chetaev 型非完整系统 Appell 方程 Mei 对称性的共形不变性与守恒量

Conformal invariance and conserved quantity of Mei symmetry for Appell equations in nonholonomic systems of Chetaev's type with variable mass

物理学报.2014, 63(16): 164501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.164501>

相空间中相对运动完整力学系统的共形不变性与守恒量

Conformal invariance and conserved quantity of relative motion holonomic dynamical system in phase space

物理学报.2014, 63(10): 104502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.104502>

含时滞的非保守系统动力学的 Noether 对称性

Noether symmetries of dynamics for non-conservative systems with time delay

物理学报.2013, 62(23): 234502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.234502>

一阶 Lagrange 系统的梯度表示

A gradient representation of first-order Lagrange system

物理学报.2013, 62(21): 214501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.214501>

精确 Cosserat 弹性杆动力学的分析力学方法

Methods of analytical mechanics for exact Cosserat elastic rod dynamics

物理学报.2013, 62(4): 044601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.044601>

基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆动力学模型*

刘延柱^{1)†} 薛纭²⁾

1) (上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

2) (上海应用技术学院机械工程学院, 上海 201418)

(2014年8月15日收到; 2014年9月25日收到修改稿)

在动力学普遍原理中, 高斯最小约束原理的特点是通过寻求函数极值的变分方法直接得出运动规律, 而无须建立动力学微分方程. Kirchhoff 动力学比拟方法以刚性截面的姿态表述弹性细杆的几何形态, 并发展为以弧坐标 s 和时间 t 为自变量的弹性杆分析力学. 由于截面姿态的局部微小改变沿弧坐标的积累不受限制, Kirchhoff 模型适合描述弹性杆的超大变形. Cosserat 弹性杆模型考虑了 Kirchhoff 模型忽略的截面剪切变形、中心线伸缩变形和分布力等因素, 是更符合实际弹性杆的动力学模型. 建立了基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆的分析力学模型, 导出约束函数的普遍形式, 以平面运动为例进行讨论. 关于弹性杆空间不可自相侵占的特殊问题, 给出相应的约束条件对可能运动施加限制, 以避免自相侵占情况发生.

关键词: 高斯原理, 弹性细杆, Kirchhoff 动力学比拟, Cosserat 弹性杆

PACS: 46.70.Hg, 45.20.Jj, 45.10.Db

DOI: 10.7498/aps.64.044601

1 引言

虚功原理、虚功率原理及高斯原理为动力学普遍原理的 3 种等价形式. 其中高斯原理也称最小约束原理, 可叙述为: 在任意时刻, 系统的真实运动与位置和速度相同、但加速度不同的可能运动比较, 其约束函数取极小值^[1]. 高斯原理的特点是通过寻求函数极值的变分方法从可能运动中鉴别出真实运动规律, 而无须建立微分方程. 其形式统一, 对于带控制的系统, 动力学分析还可根据技术与系统的优化结合进行. 20 世纪 80 年代, 以 Popov, Lilov 等为代表, 应用高斯原理建立多体系统动力学模型的方法已十分完善^[2,3]. 近年来, 国外也有关于高斯原理的研究^[4,5]. 国内偶见将高斯原理用于刚柔耦合多体系统的建模^[6,7].

1859 年, Kirchhoff 提出的动力学比拟方法以刚性截面的姿态表述弹性细杆的几何形态, 并发展为以弧坐标 s 和时间 t 为自变量的弹性杆分析力学^[8-11]. 由于截面姿态的局部微小改变沿弧坐

标的积累不受限制, 适合描述弹性杆的超大变形. Cosserat 模型考虑了 Kirchhoff 模型忽略的截面剪切变形、中心线伸缩变形和体积力等因素, 是更符合实际的弹性杆动力学模型^[12-14]. 以弹性杆为背景的含空间和时间双自变量的分析力学近年来取得了显著进展^[15-18]. 本文以中心线的笛卡尔坐标和表述截面姿态的卡尔丹角为广义坐标, 建立基于高斯原理的 Cosserat 弹性杆分析力学模型, 导出约束函数的普遍形式. 以平面运动为例, 给出约束函数的计算公式. 关于弹性杆空间不可自相侵占的特殊问题, 给出相应的约束条件对可能运动施加限制, 以避免自相侵占的情况发生.

2 运动学分析

讨论长度为 l 的任意形状圆截面弹性杆. 以固定点 O_0 为原点建立惯性参考坐标系 $(O_0-\xi\eta\zeta)$, ξ 轴为垂直轴, η 轴和 ζ 轴为水平轴. 选择杆中心线上的 O 点为原点, 沿杆中心线建立弧坐标 s , 以确定中心线上任意点 P 的位置. 将 $(O_0-\xi\eta\zeta)$ 的原点移

* 国家自然科学基金 (批准号: 11372195) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liuyzhc@gmail.com

至 P 点, 如图 1 所示, 设 $(P-\xi\eta\zeta)$ 绕 ξ 轴转过 ψ 角为 $(P-x_0y_0z_0)$, 绕 y_0 轴转过 ϑ 角为截面的主轴坐标系 $(P-xyz)$, z 轴为截面的法线轴, 以 \mathbf{e}_3 为基矢量. 截面在 (x, y) 平面内保持刚性, 在 (y, z) 和 (x, z) 平面内的剪切变形使杆中心线产生无限小转动矢量 $\boldsymbol{\gamma}$, 其在 $(P-xyz)$ 中的投影式为

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_{23} \ \gamma_{13} \ 0)^T, \quad (1)$$

其中, γ_{23} 和 γ_{13} 为 $(P-xyz)$ 绕 x 轴和 y 轴转过的小角度, 改记为 $\varepsilon_1 = \gamma_{13}$ 和 $\varepsilon_2 = -\gamma_{23}$ (图 2). 设剪切变形后 $(P-xyz)$ 的位置为 $(P-x^*y^*z^*)$. z^* 轴为 z 轴转动后的位置, 沿杆中心线切线, 其基矢量 \mathbf{e}_3^* 在 $(P-xyz)$ 中的投影为

$$\mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{e}_3 = (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ 1)^T. \quad (2)$$

设 $(P-xyz)$ 绕 z 轴转过 φ 角后与截面固定, 记作 $(P-x_s y_s z_s)$. 卡尔丹角 ψ, ϑ, φ 确定刚性截面转动后的姿态.

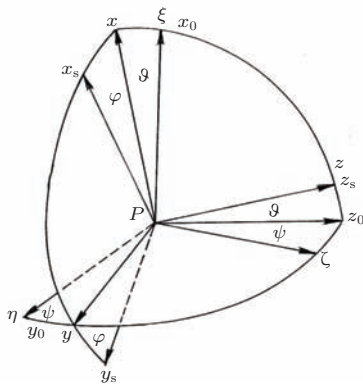


图 1 表示截面姿态的卡尔丹角

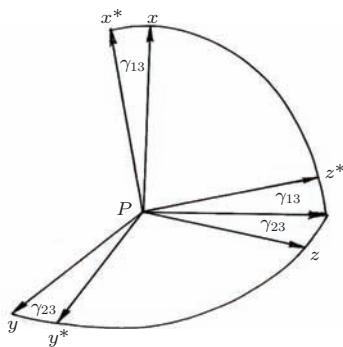


图 2 剪切变形引起的中心线转动

设 $(P-xyz)$ 的角位移对弧坐标 s 或时间 t 的变化率记作 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$, $(P-x_s y_s z_s)$ 的角位移对 s 或 t 的变化率为截面的弯扭度 $\boldsymbol{\omega}_S$ 或角速度 $\boldsymbol{\Omega}_S$. 分别以撇号

和点号表示对 s 或 t 的偏导数, 下标 $j = 1, 2, 3$ 表示各矢量在 $(P-xyz)$ 中的投影, 得到

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_{S1} = \psi' \cos \vartheta, \quad \omega_2 = \omega_{S2} = \vartheta', \\ \omega_3 &= \psi' \sin \vartheta, \quad \omega_{S3} = \dot{\phi}', \\ \boldsymbol{\Omega}_1 &= \boldsymbol{\Omega}_{S1} = \dot{\psi} \cos \vartheta, \quad \boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\Omega}_{S2} = \dot{\vartheta}, \\ \boldsymbol{\Omega}_3 &= \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad \boldsymbol{\Omega}_{S3} = \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 ϕ 为准坐标, 定义为

$$\phi' = \psi' \sin \vartheta + \varphi', \quad \dot{\phi} = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\varphi}. \quad (4)$$

设 $\mathbf{r}(s, t)$ 为弹性变形前 P 点相对固定点 O_0 的矢径, 沿 P 点处的中心线取长度为 Δs 的微元段 PQ , 以矢径增量 $\Delta \mathbf{r} = \Delta s \mathbf{e}_3$ 表示其位置. z 轴的基矢量 \mathbf{e}_3 等于矢径 \mathbf{r} 对弧坐标 s 的偏导数,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \mathbf{r}' = \mathbf{e}_3, \quad (5)$$

考虑截面剪切变形和中心线伸缩变形, 矢径 \mathbf{r} 改记为 \mathbf{r}^* , 其增量为 $\Delta \mathbf{r}^* = \Delta s^* \mathbf{e}_3^*$. \mathbf{e}_3^* 为变形后中心线切线的基矢量, 长度为 $\Delta s^* = \Delta s(1 + \varepsilon_3)$, ε_3 为中心线的轴向正应变. 将 s^* 视为变形后的弧坐标, 与变形前弧坐标 s 之间满足 $ds^*/ds = 1 + \varepsilon_3$. 将 γ_{13}, γ_{23} 改记为 $\varepsilon_1 = \gamma_{13}, \varepsilon_2 = -\gamma_{23}$, 仅保留应变 $\varepsilon_j (j = 1, 2, 3)$ 的一次项, 变形后的矢径 \mathbf{r}^* 对弧坐标 s 的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial s^*} \frac{\partial s^*}{\partial s} = \mathbf{e}_3^* (1 + \varepsilon_3) = \mathbf{e}_3 + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6)$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为 $\varepsilon_j (j = 1, 2, 3)$ 组成的弹性应变矢量.

杆在 t 时刻的中心线由变形后 P 点矢径 \mathbf{r}^* 的笛卡尔坐标 ξ, η, ζ 确定. 将 (6) 式向 $(P-xyz)$ 投影, 导出

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \xi' \cos \vartheta + \eta' \sin \psi \sin \vartheta - \zeta' \cos \psi \sin \vartheta, \\ \varepsilon_2 &= \eta' \cos \psi + \zeta' \sin \psi, \\ \varepsilon_3 &= \xi' \sin \vartheta - \eta' \sin \psi \cos \vartheta \\ &\quad + \zeta' \cos \psi \cos \vartheta - 1. \end{aligned} \quad (7)$$

将矢径 \mathbf{r}^* 对时间 t 求导计算 P 点的速度 \mathbf{v} , 得到

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{\xi} \cos \vartheta + \dot{\eta} \sin \psi \sin \vartheta - \dot{\zeta} \cos \psi \sin \vartheta, \\ v_2 &= \dot{\eta} \cos \psi + \dot{\zeta} \sin \psi, \\ v_3 &= \dot{\xi} \sin \vartheta - \dot{\eta} \sin \psi \cos \vartheta + \dot{\zeta} \cos \psi \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (8)$$

以 $\xi, \eta, \zeta, \psi, \vartheta, \varphi$ 为确定杆位形的广义坐标, 杆的弯扭度 ω_{Si} 和截面角速度 Ω_{Si} 、弹性应变 ε_i 及速度 $v_i (i = 1, 2, 3)$ 可利用 (3), (7), (8) 式由广义坐标及其对 s 和 t 的导数确定.

3 弹性杆的拘束

应用高斯原理讨论弹性杆动力学问题时,以时间 t 为自变量,弧坐标 s 作为计算拘束函数的积分变量. 设 ρ, S, \mathbf{J} 分别为杆的密度、截面积及单位长度杆的惯量张量. \mathbf{J} 在 $(P-xyz)$ 中的坐标阵为 $\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, J_1, J_3)$, 其中, $J_1 = \rho I$; $J_3 = \rho I_0$. 这里 I, I_0 为截面的惯量矩和极惯量矩. 设截面作用的弹性力主矢和主矩分别为 \mathbf{F} 和 \mathbf{M} , \mathbf{f} 为单位长度的分布力, 微元段 PQ 上作用的主矢和主矩(图 3)为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= (\mathbf{F}' + \mathbf{f}) \Delta s, \\ \Delta \mathbf{M} &= \mathbf{M}' \Delta s + \Delta \mathbf{r}^* \times \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (9)$$

设 \mathbf{F} 和 \mathbf{M} 遵循线性本构关系, $K = \kappa GS$ 和 $K_0 = ES$ 分别为抗剪刚度系数和抗拉刚度系数, $A = EI$ 和 $C = GI_0$ 分别为抗弯刚度系数和抗扭刚度系数. E, G 为杆的杨氏模量和剪切模量, κ 为截面形状系数, 圆截面的 $\kappa = 0.9$. 设杆无初始曲率和扭率, \mathbf{F} 和 \mathbf{M} 在 $(P-xyz)$ 中的投影为

$$\begin{aligned} F_1 &= K \varepsilon_1, \quad F_2 = K \varepsilon_2, \quad F_3 = K_0 \varepsilon_3, \\ M_1 &= A \omega_{S1}, \quad M_2 = A \omega_{S2}, \quad M_3 = C \omega_{S3}. \end{aligned} \quad (10)$$

利用刚体的拘束公式列写微元段 PQ 的拘束 $\Delta Z = \Gamma \Delta s$, 函数 Γ 为^[1]

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2} \left[\rho S \dot{\mathbf{v}}^2 + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_S \cdot (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\Omega}}_S) \right] \\ &\quad + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_S \cdot [\boldsymbol{\Omega}_S \times (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}_S)] \\ &\quad - \dot{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F}' + \mathbf{f}) - \dot{\boldsymbol{\Omega}}_S \cdot (\mathbf{M}' + \mathbf{e}_3^* \times \mathbf{F}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\mathbf{F}' = \tilde{\mathbf{F}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F}, \quad \mathbf{M}' = \tilde{\mathbf{M}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M}. \quad (12)$$

其中波浪号表示对 $(P-xyz)$ 的局部导数. 设杆的长度为 l , 弹性杆的拘束函数 Z 为

$$Z = \int_0^l \Gamma ds. \quad (13)$$

将被积函数 Γ 展开后得到

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2} \left[\rho S (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2) + J_1 (\dot{\Omega}_1^2 + \dot{\Omega}_2^2) \right. \\ &\quad \left. + J_3 \dot{\Omega}_3^2 \right] + (J_3 - J_1) (\Omega_2 \dot{\Omega}_1 - \Omega_1 \dot{\Omega}_2) \Omega_{S3} \\ &\quad - \dot{v}_1 [K (\varepsilon'_1 - \varepsilon_2 \omega_3) + K_0 \varepsilon_3 \omega_2 + f_1] \\ &\quad - \dot{v}_2 [K (\varepsilon'_2 + \varepsilon_1 \omega_3) - K_0 \varepsilon_3 \omega_1 + f_2] \\ &\quad - \dot{v}_3 [K_0 \varepsilon'_3 + K (\varepsilon_2 \omega_1 - \varepsilon_1 \omega_2) f_3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \dot{\Omega}_1 [A (\omega'_1 - \omega_2 \omega_3) + C \omega_2 \omega_{S3} \\ &+ (K_0 - K) \varepsilon_2 \varepsilon_3 - K \varepsilon_2] - \dot{\Omega}_2 [A (\omega'_2 + \omega_1 \omega_3) \\ &- C \omega_1 \omega_{S3} + (K - K_0) \varepsilon_1 \varepsilon_3 + K \varepsilon_1] \\ &- C \omega'_{S3} \dot{\Omega}_{S3}. \end{aligned} \quad (14)$$

利用 (3), (7), (8) 式, 拘束 $Z(t)$ 最终可表示为广义坐标对 t 的二阶导数 $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}, \ddot{\psi}, \ddot{\vartheta}, \ddot{\varphi}$ 的函数,

$$Z(t) = \int_0^l \Gamma (\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}, \ddot{\psi}, \ddot{\vartheta}, \ddot{\varphi}, \dots) ds. \quad (15)$$

省略号包含广义坐标 $\xi, \eta, \zeta, \psi, \vartheta, \varphi$ 及其对 t 的一阶导数和对 s 的一阶和二阶导数. 根据高斯原理, 在位置和速度不变的条件下, 真实运动的加速度与拘束 $Z(t)$ 的极小值相对应.

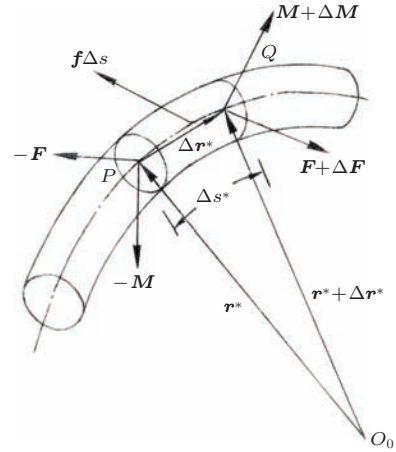


图 3 杆微元段的受力状态

4 平面运动特例

作为算例, 设弹性杆被限制在 (ζ, ξ) 坐标面内变形和运动. 设 O 点与固定点 O_0 重合, 令 $\psi = \varphi = \eta = 0$. 为简化表达, 略去任意点 P 相对 O 点变形后矢径 \mathbf{r}^* 及切线基矢量 \mathbf{e}_3^* 的星号角标. 杆中心线的位形以极坐标 (r, σ) 表示(图 4),

$$\zeta = r \cos \sigma, \quad \xi = r \sin \sigma. \quad (16)$$

利用 (7) 式计算杆的应变,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= r' \sin \beta + r \sigma' \cos \beta, \quad \varepsilon_2 = 0, \\ \varepsilon_3 &= r' \cos \beta - r \sigma' \sin \beta - 1; \end{aligned} \quad (17)$$

利用 (8) 式计算杆的速度

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{r} \sin \beta + r \dot{\sigma} \cos \beta, \quad v_2 = 0, \\ v_3 &= \dot{r} \cos \beta - r \dot{\sigma} \sin \beta, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\beta = \sigma - \vartheta$ 为矢径 \mathbf{r} 与 P 点处中心线切线基矢量 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{r}'$ 的夹角, 利用 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr'$ 得到

$$\beta = \arccos(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r) = \arccos(r'). \quad (19)$$

利用 (1) 式计算弯扭度和角速度,

$$\begin{aligned} \omega_{S1} = \omega_{S3} = \Omega_{S1} = \Omega_{S3} = 0, \\ \omega_{S2} = \vartheta', \quad \Omega_{S2} = \dot{\vartheta}. \end{aligned} \quad (20)$$

设杆的分布力 \mathbf{f} 为重力, 写作

$$\mathbf{f} = -\rho S g \mathbf{e}_\xi. \quad (21)$$

将以上 (17)—(21) 式代入 (14) 式计算函数 Γ , 得到

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{1}{2} & \left[\rho S (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_3^2) + J_1 \dot{\Omega}_2^2 \right] \\ & - \dot{v}_1 (K \varepsilon'_1 + K_0 \varepsilon_3 \omega_2 - \rho S g \cos \vartheta) \\ & - K \dot{v}_2 \varepsilon'_2 - \dot{v}_3 (K_0 \varepsilon'_3 - K \varepsilon_1 \omega_2 - \rho S g \sin \vartheta) \\ & - \dot{\Omega}_2 [A \omega'_2 + (K - K_0) \varepsilon_1 \varepsilon_3 + K \varepsilon_1] \\ & + \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

省略号是与加速度和角加速度无关项. 将 (17), (18) 式代入 (22) 式, 再代入 (13) 式即得到杆的拘束函数 $Z(t)$. 对于确定的广义坐标 r, σ, ϑ 及速度 $\dot{r}, \dot{\sigma}, \dot{\vartheta}$, 依据拘束函数 Z 的最小值判断真实运动的加速度 $\ddot{r}, \ddot{\sigma}, \ddot{\vartheta}$, 积分得出下个瞬时杆的速度和位形.

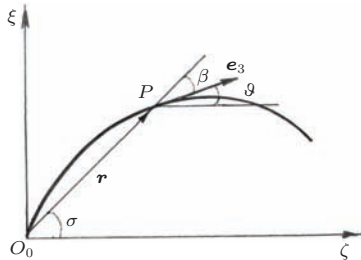


图4 杆的平面运动特例

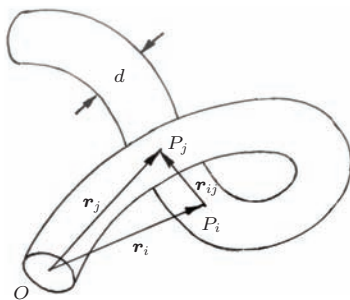


图5 杆的空间无侵占条件

5 空间无侵占条件

弹性杆是具有几何尺度的实体, 已占据的空间不容杆的其他部分侵占. 空间不可入性是计算弹性杆位形的特殊约束条件.

设 P_i 为杆中心线上弧坐标为 s_i 的任意点, P_j 为 P_i 的内侧区间 $(0, s_i)$ 内弧坐标为 s_j 的任意点. 设变形后 P_i 与 P_j 相对原点 O 的矢径分别为 \mathbf{r}_i 和 \mathbf{r}_j , P_i 至 P_j 的矢径为 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ (图5). 为避免杆出现空间侵占, P_i 与 P_j 之间距离应不小于杆截面的直径 d , 即 $r_{ij} \geq d$. 剪切变形对直径 d 的影响为剪应变的2阶小量, 可予忽略. 将 P_i 或 P_j 处的笛卡尔坐标 ξ, η, ζ 以下标 i, j 区分, 杆的空间无侵占条件为

$$(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2 \geq d^2. \quad (23)$$

为避免 P_i 与邻近 P_j 点间距小于 d 的误判, 可将 P_j 的取值范围缩减为 $(0, s_i - \pi d)$, πd 为杆在 P_i 处可能折返的弯曲段最短弧长. 应用高斯原理从可能运动中识别实际运动时, 只要用于比较的可能运动状态满足约束条件 (23), 杆的空间侵占情况可避免发生.

6 结 论

对于 Cosserat 弹性杆的以弧坐标 s 和时间 t 为双自变量的动力学问题, 可利用高斯原理将对微分方程的数值积分转化为变分问题处理. 基于高斯原理, 本文导出 Cosserat 弹性杆拘束函数的普遍公式以确定其动力学规律, 以杆的平面运动为特例导出具体计算公式. 作为高斯方法的独特优点, 只要用于比较的可能运动状态满足弹性杆空间不可入约束条件, 可避免发生杆的空间侵占现象.

参考文献

- [1] Liu Y Z 2001 *Advanced Dynamics* (Beijing: High Education Press) (in Chinese) [刘延柱 2001 高等动力学 (北京: 高等教育出版社)]
- [2] Popov E P, Vereshchagin A F, Zenkevich S A 1978 *Manipulative Robots, Dynamics and Algorithm* (Moscow: Science) (in Russian) [Попов Е П, Берещагин А Ф, Зенкевич С А 1978 Манипуляционные роботы, динамики и алгоритмы (Москва: Наука)]
- [3] Lilov L, Lorér M 1982 *Z. Angew. Math. Mech.* **62** 539

- [4] Kalaba R E, Udawadia F E 1993 *Trans. ASME J. Appl. Mech.* **60** 662
- [5] Kalaba R, Natsuyama H, Udawadia F 2004 *Int. J. General Syst.* **33** 63
- [6] Dong L L, Yan G R, Du Y T, Yu J J, Niu B L, Li R L 2001 *Acta Armament.* **22** 347 (in Chinese) [董龙雷, 闫桂荣, 杜彦亭, 余建军, 牛宝良, 李荣林 2001 兵工学报 **22** 347]
- [7] Hao M W, Ye Z Y 2011 *J. Guangxi Univ. (Nat. Sci. Ed.)* **36** 195 (in Chinese) [郝名望, 叶正寅 2011 广西大学学报 (自然科学版) **36** 195]
- [8] Liu Y Z, Zu J W 2004 *Acta Mech.* **167** 29
- [9] Liu Y Z, Xue Y 2005 *Chin. Quart. Mech.* **26** 1 (in Chinese) [刘延柱, 薛纭 2005 力学季刊 **26** 1]
- [10] Liu Y Z, Sheng L W 2007 *Acta Mech. Sin.* **23** 215
- [11] Liu Y Z, Xue Y 2011 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **43** 1151 (in Chinese) [刘延柱, 薛纭 2011 力学学报 **43** 1151]
- [12] Liu Y Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1
- [13] Liu Y Z, Xue Y 2011 *Appl. Math. Mech.* **32** 570 (in Chinese) [刘延柱, 薛纭 2011 应用数学和力学 **32** 570]
- [14] Liu Y Z 2012 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **44** 832 (in Chinese) [刘延柱 2012 力学学报 **44** 832]
- [15] Liu Y Z, Xue Y 2004 *Tech. Mech.* **24** 206
- [16] Xue Y, Liu Y Z, Chen L Q 2005 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **37** 485 (in Chinese) [薛纭, 刘延柱, 陈立群 2005 力学学报 **37** 485]
- [17] Xue Y, Liu Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3845 (in Chinese) [薛纭, 刘延柱 2006 物理学报 **55** 3845]
- [18] Xue Y, Weng D W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 34 (in Chinese) [薛纭, 翁德玮 2009 物理学报 **58** 34]

Dynamical model of Cosserat elastic rod based on Gauss principle*

Liu Yan-Zhu^{1)†} Xue Yun²⁾

1) (Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

2) (School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

(Received 15 August 2014; revised manuscript received 25 September 2014)

Abstract

Based on the generalized principles of dynamics, the feature of Gauss principle of least constraint is that the motion law can be directly obtained by using the variation method of seeking the minimal value of the constraint function without establishing any dynamic differential equations. According to the Kirchhoff's dynamic analogy, the configuration of an elastic rod can be described by the rotation of rigid cross section of the rod along the centerline. Since the local small change of the attitude of cross section can be accumulated infinitely along the arc-coordinate, the Kirchhoff's model is suited to describe the super-large deformation of elastic rod. Therefore the analytical mechanics of elastic rod with arc-coordinate s and time t as double arguments has been developed. The Cosserat model of elastic rod takes into consideration the factors neglected by the Kirchhoff model, such as the shear deformation of cross section, the tensile deformation of centerline, and distributed load, so it is more suitable to modeling a real elastic rod. In this paper, the model of the Cosserat rod is established based on the Gauss principle, and the constraint function of the rod is derived in the general form. The plane motion of the rod is discussed as a special case. As regards the special problem that different parts of the rod in space are unable to self-invade each other, a constraint condition is derived to restrict the possible configurations in variation calculation so as to avoid the invading possibility.

Keywords: Gauss principle, thin elastic rod, Kirchhoff's kinetic analogy, Cosserat elastic rod

PACS: 46.70.Hg, 45.20.Jj, 45.10.Db

DOI: 10.7498/aps.64.044601

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11372195).

† Corresponding author. E-mail: liuyzhc@gmail.com