

基于块稀疏贝叶斯学习的多任务压缩感知重构算法

文方青 张弓 贲德

A recovery algorithm for multitask compressive sensing based on block sparse Bayesian learning

Wen Fang-Qing Zhang Gong Ben De

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 070201 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.070201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

具有质量及频率涨落的欠阻尼线性谐振子的随机共振

Stochastic resonance of an underdamped linear harmonic oscillator with fluctuating mass fluctuating frequency

物理学报.2015, 64(2): 020202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.020202>

带有分数阶热流条件的分数阶热波方程及其参数估计问题

Parameters estimation for a one-dimensional time fractional thermal wave equation with fractional heat flux conditions

物理学报.2014, 63(14): 140202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.140202>

构造 Birkhoff 表示的广义 Hojman 方法

General Hojman's method for the construction of Birkhoffian representation

物理学报.2013, 62(9): 090205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.090205>

相位差图像复原技术研究

Phase diversity image restoration

物理学报.2012, 61(23): 230203 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.230203>

基于双带宽高斯滤波器的磁共振弹性图局域频率估算算法研究与实现

Study and realization of local frequency estimation algorithm in magnetic resonance elastography based on dual-bandwidth Gaussian filters

物理学报.2011, 60(9): 090204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.60.090204>

# 基于块稀疏贝叶斯学习的多任务压缩感知 重构算法\*

文方青<sup>1)2)</sup> 张弓<sup>1)2)†</sup> 贲德<sup>1)2)3)</sup>

1)(南京航空航天大学, 电子信息工程学院, 南京 210016)

2)(雷达成像与微波光子技术教育部重点实验室, 南京航空航天大学, 南京 210016)

3)(南京电子技术研究所, 南京 210039)

(2014年8月5日收到; 2014年10月29日收到修改稿)

本文提出一种基于块稀疏贝叶斯学习的多任务压缩感知重构算法, 利用块稀疏的单测量矢量模型求解多任务重构问题. 通过对信号统计特性和稀疏块内的结构特性进行联合数学建模, 将稀疏重构问题转贝叶斯框架下的特征参数的迭代更新问题. 本文算法不需要信号稀疏度和噪声强度的先验信息, 是一种高效的盲重构算法. 仿真实验表明, 本文算法能有效利用信号的统计特性和结构信息, 在重构精度和收敛速率方面能够很好地折衷.

**关键词:** 多任务压缩感知, 稀疏贝叶斯学习, 块稀疏框架

**PACS:** 02.30.Zz, 02.50.-r, 87.16.dt

**DOI:** 10.7498/aps.64.070201

## 1 引言

随着未来宽带、超宽带信号处理技术的发展, 人类对信号的采样和处理的要求越来越高. 在很多实际的应用中(如雷达探测、声呐定位、医学图像等), 感兴趣的目标相对应用背景可视为稀疏的, 或者说信号所承载的信息率是有限的. 目标的这种稀疏特性与复杂的信息系统、海量的数据率是极不平衡的, 压缩感知(compressive sensing, CS)是一种有效解决这种不平衡的理论方法. CS理论指出<sup>[1]</sup>, 如果某个信号是稀疏的或者经过某种变换后是稀疏的, 则利用一个与变换基不相关的观测矩阵可以将高维信号投影到低维空间中, 通过求解优化问题从少量的低维数据中高概率的重构高维信号. CS为稀疏信号的亚奈奎斯特采集提供了理论基础, 也使得信号处理产生了新思路和方法. 目前, CS已经

广泛应用于雷达<sup>[2]</sup>、图像处理<sup>[3-5]</sup>、认知无线电<sup>[6]</sup>等领域.

在实际的工程中, 往往能通过不同的观测矩阵对一个信号进行多次观测, 而信号在观测过程中稀疏结构一般保持不变, 从多个不同的低维观测中联合重构高维信号便构成一个多任务压缩感知(multitask compressive sensing, MCS)问题<sup>[7]</sup>. MCS是一类重要的稀疏表示模型, 利用稀疏信号结构的相关性往往能极大的提高CS重构性能. 文献<sup>[7]</sup>提出基于分层贝叶斯模型的MCS重构算法, 将稀疏重构问题转化为多任务学习问题, 利用稀疏矢量内部和外部的相关性, 提高重构性能. 文献<sup>[8]</sup>提出对稀疏矢量先验分布参数采用狄利克雷过程(Dirichlet process, DP)先验建模, 对多任务稀疏信息共享进行更为合理的假设. 文献<sup>[9]</sup>对MCS模型进行一般化处理, 对稀疏信号用拉普拉斯(Laplace)先验建

\* 国家自然科学基金(批准号: 61201367, 61271327, 61471191)、南京航空航天大学博士学位论文创新与创优基金(批准号: BCXJ14-08)、江苏省研究生培养创新工程(批准号: KYLX\_0277)、中央高校基本科研业务费专项资金和江苏高校优势学科建设工程(PADA)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: gzhang@nuaa.edu.cn

模, 把MCS模型归纳为一种基于拉普拉斯先验的MCS(Laplace prior-based MCS, LMCS)模型的特殊情况, 扩展了MCS的应用范围. 文献[10]提出将MCS应用到无线传感网络定位中, 利用贝叶斯算法的误差线(error bars)自适应的调整每个测量矩阵, 以满足不同的定位精度的要求. 文献[11]将实数MCS贝叶斯框架扩展到复数BCS领域, 提出一种基于多测量矢量(multiple measurement vector, MMV)模型的复MCS重构算法.

上述各种算法在建立贝叶斯建模时将MCS转化为多个单任务学习模型, 在多任务学习过程中, 相关统计参数更新速率慢, 导致这些算法效率较低. 一般稀疏矢量除了统计特征, 还具有一定的结构特征, 结构特征可为算法收敛提供额外的信息, 而这些特征往往被上述模型忽略. 为同时利用稀疏信号的统计特性和结构特性, 本文构造一种块稀疏贝叶斯学习模型. 首先利用Kronecker积的性质将多任务学习问题映射为单测量矢量(single measurement vector, SMV)的块稀疏问题, 其次构建相关向量机<sup>[12]</sup>(relevance vector machine, RVM)框架下的块稀疏SMV模型, 且建模时同时兼顾稀疏块间的统计特性和稀疏块内部的结构特性, 最后通过传统RVM框架推导了模型中统计特性参数和结构特性参数的迭代求解方法. 由于同时利用了稀疏信号的统计特性和结构信息, 同时RVM能有效克服传统基于最小二乘稳态误差大的缺陷问题<sup>[13]</sup>, 因此本文算法具有较快的收敛速度和更高的重构精度.

## 2 多任务压缩感知

考虑如下一个稀疏表示模型:

$$z = \Psi w, \quad (1)$$

其中 $\Psi \in R^{N \times N}$ 为一个正交基, 信号的稀疏性表现为 $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$ 中的元素只有 $K$ 个非零, 其他的元素都为零或者近似为零, 即 $\|w\|_0 = K$ ,  $\|w\|_0$ 为 $w$ 的 $l_0$ 范数. 在上述假设下, 信号 $z \in R^{N \times 1}$ 被称为在基 $\Psi$ 上是 $K$ 稀疏的. 由于 $K \ll N$ , 因而信号 $z$ 是冗余的, CS理论表示, 可以用一个与基不相关的测量矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$  ( $K < M < N$ )将高维信号投影到低维压缩空间

$$g = \Phi z + e = \Phi \Psi w + e = Bw + e, \quad (2)$$

其中 $B \in R^{M \times N}$ 为感知矩阵,  $e \in R^{M \times 1}$ 为观测高斯白噪声, 其方差为 $\sigma_e^2$ . CS理论已经证明, 由于信号 $z$ 具有稀疏性, 低维压缩信号 $g \in R^{M \times 1}$ 中已经包含了重构稀疏矢量 $w$ 的所需要的信息. 通过求解如下优化的约束问题可以高概率的恢复原始信号

$$\hat{w} = \arg \min \|w\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|g - Bw\|_2^2 \leq \sigma_e^2, \quad (3)$$

式中 $\|g - Bw\|_2$ 表示 $l_2$ 范数. 由于 $M < N$ , 上述逆过程为NP-hard问题, 一般无确定的解, 但是由于 $w$ 稀疏性的存在, 则有望通过线性规划找出确定解. 文献[14]指出, 在一定的条件下,  $l_0$ 优化问题可以通过一个 $l_1$ 优化问题来近似逼近, 即

$$\hat{w} = \arg \min \|w\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|g - Bw\|_2^2 \leq \sigma_e^2, \quad (4)$$

式中,  $\|w\|_1$ 表示 $w$ 的 $l_1$ 范数. (3)式和(4)式等价的条件是感知矩阵 $B$ 满足等距同构条件(Restricted Isometry Property, RIP)条件<sup>[15]</sup>

$$(1 - \delta) \|w\|_2^2 \leq \|Bw\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|w\|_2^2, \quad (5)$$

式中 $\delta$ 为一很小的常数. 一般来说信号的稀疏性是未知的, (4)式中的寻优问题可以被转化为一个带约束的二次规划问题

$$\hat{w} = \arg \min \left\{ \|g - Bw\|_2^2 + \eta \|w\|_1 \right\}, \quad (6)$$

式中 $\eta$ 为优化质量平衡参数. (6)式一般可以通过常见的优化算法如正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)算法<sup>[16]</sup>、稀疏贝叶斯学习(sparse Bayesian learning, SBL)算法<sup>[12]</sup>等算法求解. 此外, 也可以通过信号稀疏性进行 $p$ 范数约束<sup>[17]</sup>, 采用规则化的聚焦算法(regularized FOCUS, RFOCUSS)进行求解.

(2)式中的问题是一个典型的SMV模型. 在实际的工程中, 往往能通过不同的测量矩阵获取信号的多个低维观测样本

$$g^l = \Phi^l z^l + e^l = \Phi^l \Psi w^l + e^l = B^l w^l + e^l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad (7)$$

其中,  $\Phi^l \in R^{M \times N}$ 为第 $l$ 个观测矩阵,  $B^l = \Phi^l \Psi$ 为第 $l$ 个感知矩阵,  $w^l \in R^{N \times 1}$ 为第 $l$ 个观测时信号的稀疏表示系数向量,  $e^l$ 为第 $l$ 维测量噪声,  $L$ 为总的测量矢量维数. 一般认为信号是一个慢变的过程, 因此上述 $L$ 个观测过程中稀疏表示系数 $w^1, w^2, \dots, w^L$ 有相同的稀疏性, 即每个稀疏矢量 $w^1, w^2, \dots, w^L$ 中非零元素的位置相同, 只是

系数的大小不同. 在上述假设下, 由多个观测过程构成一个MCS问题, 利用多个稀疏系数间的相关性一般能较大的提高重构性能. 特别地, 当  $\Phi^1 = \Phi^2 = \dots = \Phi^L$  时, (7)式构成一个多测量矢量模型 (multiple measurement vectors, MMV). 现有的MCS算法主要针对MMV模型, 不具有普适性, 特别是稀疏矢量内部的某些结构不能被有效的利用.

### 3 块稀疏贝叶斯学习重构算法

利用稀疏信号的块状结构能有效的提高重构性能, 通过对MCS信号群的合理建模, 可将多任务间的相关性转化为SMV中稀疏矢量块结构特征. 贝叶斯学习框架已经被广泛应用于实际的工程中 [18,19], 其采用参数化的概率模型对系统求解, 为求解稀疏的结构信息提供了一种非常灵活的数学方法. 本文考虑利用贝叶斯框架对稀疏信号的统计特性和稀疏块内结构特性进行建模, 构造如下三个矩阵: 压缩信号矩阵  $\mathbf{Y} = [\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \dots, \mathbf{g}^L]$ , 稀疏源矩阵  $\mathbf{X} = [\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \dots, \mathbf{w}^L]$ , 观测噪声矩阵  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \dots, \mathbf{e}^L]$ . 假设稀疏源矩阵的每一行  $\mathbf{X}_{n\bullet}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) 是相互独立的, 第  $n$  个信源概率密度函数为高斯的, 且满足一定的相关性

$$p(\mathbf{X}_{n\bullet}; \gamma_n, \mathbf{R}_n) \sim N(0, \gamma_n \mathbf{R}_n), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

其中  $\gamma_n$  是控制方差特性的非负参数, 其表征了稀疏矢量间的统计特性. 当  $\gamma_n = 0$  时, 相应的  $\mathbf{X}_{n\bullet} = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{R}_n$  为稀疏源  $\mathbf{X}_{n\bullet}$  的协方差矩阵, 其是一个正定矩阵, 且具有对称的特性, 其表征稀疏源  $\mathbf{X}_{n\bullet}$  的结构相关特性. 令  $\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}^T) \in R^{ML \times 1}$ , 其中  $\text{vec}(\mathbf{Y}^T)$  表示将矩阵  $\mathbf{Y}^T$  的元素按列排成一行. 类似地, 令  $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X}^T) \in R^{NL \times 1}$ ,  $\mathbf{n} = \text{vec}(\mathbf{E}^T) \in R^{ML \times 1}$ , 且构造如下矩阵:

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \vdots \\ \Theta_M \end{bmatrix}, \quad \Theta_m = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{m\bullet}^1 \otimes \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{R}_{m\bullet}^2 \otimes \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{m\bullet}^L \otimes \mathbf{I}_L \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中  $\otimes$  表示克罗内克乘积, 利用上述定义的向量和矩阵可以将 (7) 式中的 MCS 模型稀疏表示为如下 SMV 模型:

$$\mathbf{y} = \Theta \mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (10)$$

其中  $\mathbf{x}$  一个块稀疏模型, 其系数中只有  $K$  块有值, 其余  $N - K$  块元素均为 0. (10) 式将稀疏源  $\mathbf{X}$  的相关特性转换为块稀疏矢量  $\mathbf{x}$  中稀疏块内的结构相关特性, 若 (10) 式中的噪声服从参数为  $\lambda = \sigma_n^2$  的高斯分布, 则  $\mathbf{y}$  的似然函数为

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{\frac{ML}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \|\mathbf{y} - \Theta \mathbf{x}\|_2^2\right). \quad (11)$$

上述模型直接利用 SBL 求解的困难在于求解后验概率函数会导致过学习问题, 计算量非常大. 由于 (8) 式中的假设存在, 赋予了块稀疏矢量  $\mathbf{x}$  如下先验分布:

$$p(\mathbf{x}|\gamma_n, \mathbf{R}_i) = \prod_{n=1}^N \left(\frac{\gamma_n}{2\pi}\right)^{\frac{L+1}{2}} \det^{-1/2}(\gamma_n \mathbf{R}_n) \times \exp\left(-\frac{\mathbf{x}_n^T (\gamma_n \mathbf{R}_n)^{-1} \mathbf{x}_n}{2}\right), \quad (12)$$

式中  $\mathbf{x}_n$  表示矢量  $\mathbf{x}$  的  $n$  块的所有元素组成的向量,  $\det(\gamma_n \mathbf{R}_n)$  为矩阵的行列式. 由贝叶斯定理, 可得  $\mathbf{x}$  的条件概率函数

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}; \lambda, \gamma_i, \mathbf{R}_i) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \lambda) p(\mathbf{x}|\gamma_n, \mathbf{R}_i)}{p(\mathbf{y}|\lambda, \gamma_n, \mathbf{R}_i)} = \left(\frac{\gamma_n}{2\pi}\right)^{\frac{NL+1}{2}} \det^{-1/2}(\Sigma) \times \exp\left\{-\frac{[\mathbf{x} - \mu]^T (\Sigma_n)^{-1} [\mathbf{x} - \mu]}{2}\right\}. \quad (13)$$

其均值和协方差分别为

$$\begin{aligned} \mu &= (\lambda \Gamma^{-1} + \Theta^T \Theta)^{-1} \Theta^T \mathbf{y} \\ &= \Gamma \Theta^T (\lambda \mathbf{I} + \Theta \Gamma \Theta^T)^{-1} \mathbf{y}, \\ \Sigma &= \left(\Gamma^{-1} + \frac{1}{\lambda} \Theta^T \Theta\right)^{-1} \\ &= \Gamma - \Gamma \Theta^T (\lambda \mathbf{I} + \Theta \Gamma \Theta^T)^{-1} \Theta \Gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

式中  $\Gamma = \text{diag}[\gamma_1 \mathbf{R}_1, \gamma_2 \mathbf{R}_2, \dots, \gamma_n \mathbf{R}_n]$  表示将矩阵  $\gamma_1 \mathbf{R}_1, \gamma_2 \mathbf{R}_2, \dots, \gamma_n \mathbf{R}_n$  排成对角块的形式.

$\mathbf{x}$  的稀疏性由  $\Gamma$  中的  $\gamma_n$  控制, 在贝叶斯学习过程中, 如果  $\gamma_n = 0$ , 则将感知矩阵  $\Theta$  中与  $\mathbf{x}$  的  $n$  块系数相应的列删除 [20]. 如果准确估计出参数  $\lambda$  和  $\Gamma$ , 则能获得上述后验概率函数, 从而获得对  $\mathbf{x}$  的估计. 为估计上述参数, 构造如下对数似然函数:

$$L(\lambda, \Gamma) = \log p(\mathbf{y}|\lambda, \Gamma)$$



$$= \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \lambda) p(\mathbf{x}|\mathbf{\Gamma}) \propto -\mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y} - \log |\mathbf{C}|, \quad (15)$$

式中  $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{\Theta} \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Theta}^T$ . 通过期望最大化(expectation-maximization, EM) 上述似然函数可以逐步估计出各个参数. EM 算法将  $\mathbf{x}$  视为已知的变量, 采用迭代的方式对似然函数进行最大化处理, 其优化目标为最大化如下函数:

$$\begin{aligned} D(\lambda, \mathbf{\Gamma}) &= E \{ \log p(\mathbf{y}|\lambda, \mathbf{\Gamma}) \} \\ &= E \{ \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \lambda) \} + E \{ p(\mathbf{x}|\mathbf{\Gamma}) \}. \end{aligned} \quad (16)$$

首先来推导 EM 迭代中最优  $\mathbf{\Gamma}$  参数. 假设所有稀疏源所含的结构相关性相同, 即  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 = \dots = \mathbf{R}_N = \mathbf{R}$ , 注意到上式中的前一项与  $\gamma_n$  和  $\mathbf{R}$  无关, 因此 (16) 式中的优化函数可以简化为如下优化函数:

$$\begin{aligned} D(\gamma_n, \mathbf{R}) &= -\frac{L}{2} \log(\Lambda) - \frac{N}{2} \log(|\mathbf{R}|) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \{ (\Lambda^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1}) (\mathbf{\Sigma} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\mu}^T) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

上式对  $\gamma_n$  求导, 并令导数为零, 可得第  $d+1$  次迭代过程中最优  $\gamma_n$  为

$$(\gamma_n)_{d+1} = \frac{\text{Tr} \{ \mathbf{R}_d^{-1} [\mathbf{\Sigma}_d + \boldsymbol{\mu}_d \boldsymbol{\mu}_d^T] \}}{L}, \quad (18)$$

式中  $\mathbf{R}_d$ ,  $\mathbf{\Sigma}_d$  及  $\boldsymbol{\mu}_d$  分别表示相应的参数在第  $d$  次迭代过程的估计值. 同理, (17) 式对  $\mathbf{R}$  求导并令导数为零, 可得第  $d+1$  次迭代过程中最优结构相关性参数  $\mathbf{R}$  为

$$\mathbf{R}_{d+1} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{\Sigma}_d + \boldsymbol{\mu}_d \boldsymbol{\mu}_d^T}{(\gamma_n)_d}, \quad (19)$$

式中  $\mathbf{\Sigma}_d$ ,  $\mathbf{\Sigma}_d$  及  $\boldsymbol{\mu}_d$  均为在第  $d$  次迭代过程相关参数的最优估计值.

类似的, 要估计噪声方差参数  $\lambda$ , 认为  $\mathbf{\Gamma}$  参数已知, 将优化函数 (16) 式中与  $\lambda$  无关后一项去除, 优化函数简化为

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= -\frac{ML}{2} \log \lambda - \frac{1}{2\lambda} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{\Theta} \mathbf{x}\|_2^2 \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr} (\mathbf{\Sigma} \mathbf{\Theta}^T \mathbf{\Theta}) \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

采用迭代的方式求第  $d+1$  次迭代过程中最优的  $\lambda$  值时, 假设第  $d$  次迭代后已经获得其他参数的最优

值, 可将上式进一步简化. 对上式进行求导, 并令导数为零可得第  $d+1$  次迭代的最优  $\lambda$  为

$$\lambda_{d+1} = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{\Theta} \mathbf{x}_d\|_2^2 + \lambda_d [NL - \text{Tr} (\mathbf{\Sigma}_d \mathbf{\Gamma}_d^{-1})]}{ML}, \quad (21)$$

式中  $\mathbf{x}_d$ ,  $\mathbf{\Sigma}_d$  及  $\mathbf{\Gamma}_d$  均为在第  $d$  次迭代过程相关参数的最优估计值.

综上所述, 现将本文算法的步骤总结为如下:

**步骤 1** 将多任务压缩数据  $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \dots, \mathbf{g}^L$  构成矩阵  $\mathbf{Y}$ , 并矢量化为向量  $\mathbf{y}$ ; 按照 (9) 式构造 SMV 模型的感知矩阵  $\mathbf{\Theta}$ .

**步骤 2** 初始化结构性参数  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , 初始化解向量的系数全为 1, 即  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{1}$ .

**步骤 3** 按 (18), (19) 和 (21) 式分别更新参数  $\gamma_n$ ,  $\mathbf{R}$  和  $\lambda$ . 如果  $\gamma_n$  小于某个设定的阈值, 则将  $\gamma_n$  置零, 并将感知矩阵中响应的列剔除, 相应的系数矢量块也置零.

**步骤 4** 按计算 (14) 式中的均值和方差.

**步骤 5** 若迭代次数达到预设的最大次数或者相邻两次迭代过程中  $\mathbf{x}$  的变化小于某个预设的阈值, 则迭代终止, 否则继续步骤 3 和步骤 4.

**步骤 6** 输出  $\mathbf{x}$ , 还原稀疏矢量  $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \dots, \mathbf{w}^L$ .

## 4 仿真实验与分析

为验证本文算法的有效性, 使用 Matlab 对本文算法性能进行仿真. 其中, 稀疏基矩阵  $\mathbf{\Psi}$  为傅里叶基, 信号长度  $N = 512$ , 不同观测稀疏信号为一个自回归 (autoregression, AR) 高斯过程, 回归参数  $r = 0.9$ . 本文选取 FOCUSS 算法和 SBL 算法这两种盲估计算法与本文所提算法进行对比, 为评价重构效果, 选择成功率<sup>[20]</sup>、归一化均方误差 (normalized mean square error, NMSE) 和运行时间作为重构性能评价标准. 其中, 成功率为仿真实验中重构稀疏矢量的最大  $K$  个非零系数位置全部与实际非零元素位置相同的次数所占所有仿真实验次数百分比. 在不同的仿真条件下所有的算法均进行 1000 次蒙特卡洛仿真, 每次仿真所用的稀疏矢量非零元素的大小和位置随机生成, 噪声为高斯白噪声.

在不同信噪比条件下本文算法和其他盲估计算法性能对比如图 1 所示, 其中测量长度  $M = 50$ , 信号稀疏度为  $K = 10$ , 任务数目  $L = 8$ . 由图可

知, 随着信噪比增加, 所有的重构算法的性能都会提升. 由于利用了信号统计特征, 贝叶斯类算法在重构误差和重构概率方面的性能优于 FOCUSS 算法. 由于贝叶斯类算法需要迭代的计算各种参数, 因此在运行速度方面没有特别明显优势. 由于利用了稀疏信号的结构信息, 本文算法比 SBL 算法收敛更快, 而且本文算法能得到更好的重构性能.

在不同任务数目  $L$  下本文算法和其他重构算法性能对比如图 2 所示, 其中测量长度  $M = 50$ , 信号稀疏度为  $K = 10$ , 信噪比为 15 dB. 由图 2 可知, 随着任务数目  $L$  增加, 所有的重构算法的性能都会提升. 当  $L > 5$  后, 各种算法性能重构性能会比较稳定, 不会显著变化. 且随着任务数目增加, 信号的统计特征对信号稀疏求解贡献更大, 因此本文算

法性能会趋近 SBL 算法.

图 3 显示了观测维数  $M$  与重构性能的关系, 其中任务数目  $L = 8$ , 信号稀疏度为  $K = 10$ , 信噪比为 15 dB. 从图中可以看出测量矢量维数  $M$  越大, 各种算法重构效果就越好. 本文算法重构新能与 SBL 接近, 均优于 FOCUSS 算法. 尽管基于贝叶斯框架的算法计算复杂度高于 FOCUSS 算法, 但本文算法在相同的条件下比 SBL 算法收敛更快.

在不同信号稀疏度  $K$  下本文算法和其他算法性能仿真结果如图 4 所示. 由于随着稀疏度  $K$  值上升, 感知矩阵  $\Theta$  的 RIP 特性会被破坏, 因此随着稀疏度  $K$  变大, 所有的算法重构性能会随之变差. 但综合仿真结果, 本文所提的块稀疏贝叶斯学习算法重构性能仍然优于其他两种算法.

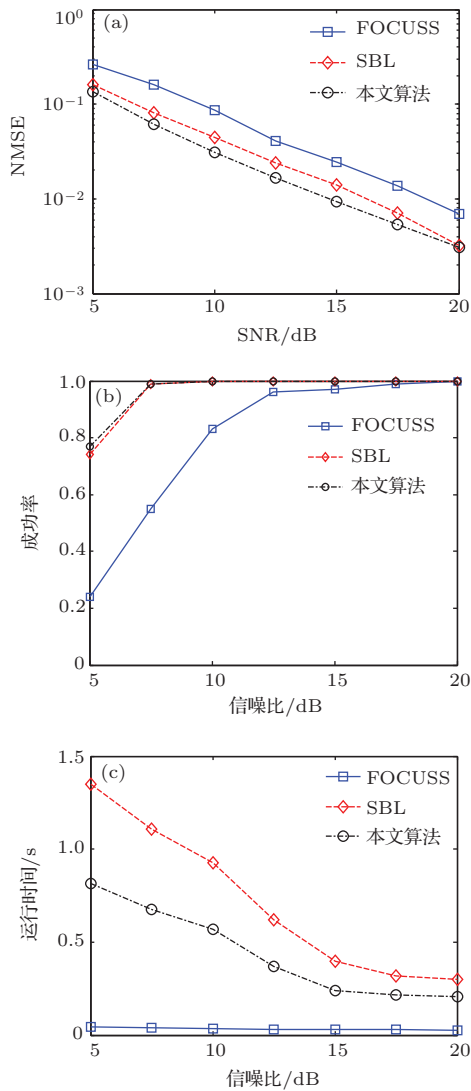


图 1 不同信噪比下各种算法重构性能的比较 (a) NMSE 对比; (b) 成功率对比; (c) 运行时间对比

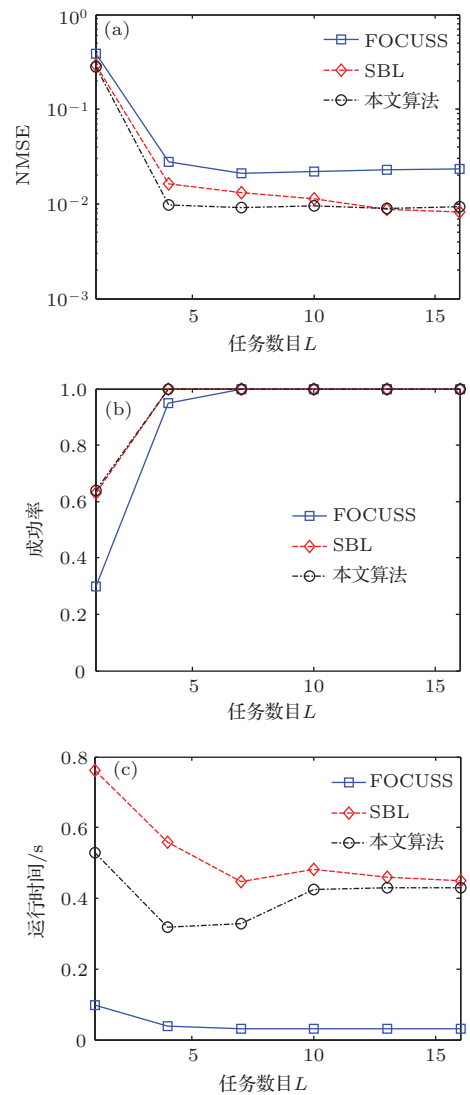


图 2 不同任务数目  $L$  各种算法重构性能的比较 (a) NMSE 对比; (b) 成功率对比; (c) 运行时间对比

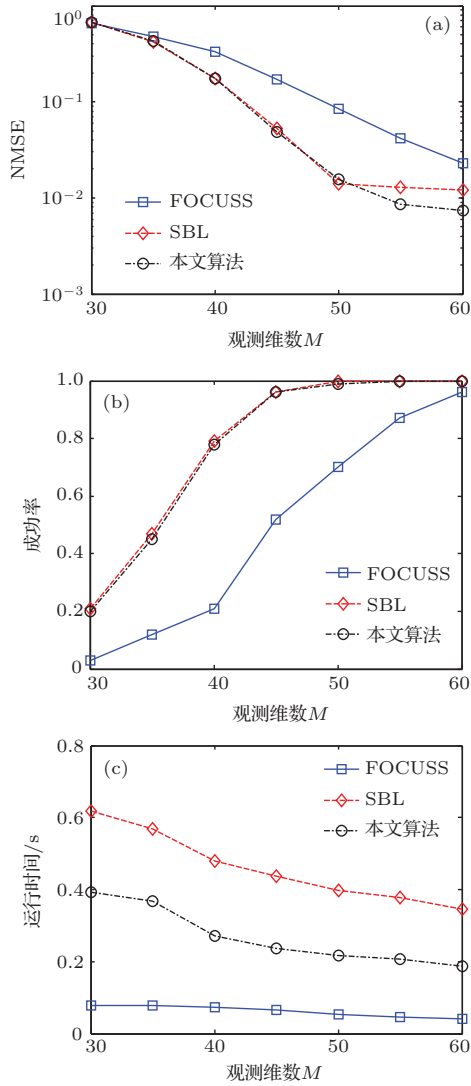


图3 不同观测维数  $M$  各种算法重构性能的比较 (a) NMSE对比; (b) 成功率对比; (c) 运行时间对比

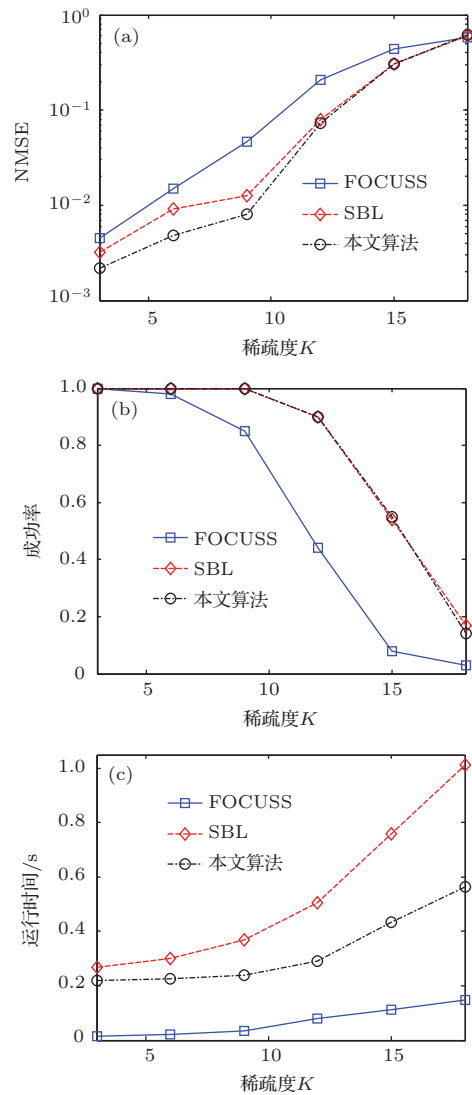


图4 不同稀疏度  $K$  各种算法重构性能的比较 (a) NMSE对比; (b) 成功率对比; (c) 运行时间对比

## 5 结论

本文提出了一种基于块稀疏贝叶斯学习的MCS盲重构算法, 该算法将多个重构问题转化为单个测量矢量模型. 通过构建贝叶斯框架, 将稀疏矢量的统计特性和结构特性参数化, 从而将重构问题转化为参数学习问题, 并推导了相关参数的最优估计方法. 本文分别对比了所提算法与基于最小二乘的FOCUSS算法与基于贝叶斯框架的SBL算法的重构性能. 仿真结果表明, 本文算法能克服FOCUSS算法稳态误差大的缺点, 同时弥补贝叶斯学习的不足, 在重构精度和收敛速率方面能很好的折衷.

## 参考文献

- [1] Donoho D L 2006 *IEEE Trans Inform Theory* **52** 1289
- [2] Zhang J D, Zhu D Y, Zhang G 2012 *IEEE Trans. SP* **60** 1718
- [3] Wang L Y, Li L, Yan B, Jiang C S, Wang H Y, Bao S L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 088106
- [4] Zhao S M, Zhuang P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 054203
- [5] Sun Y L, Tao J X 2014 *Chin. Phys. B* **23** 078703
- [6] Zhang J C, Fu N, Qiao L Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 030701 (in Chinese) [张京超, 付宁, 乔立岩 2014 物理学报 **63** 030701]
- [7] Ji S, Dunson D, Carin L 2009 *IEEE Trans. SP* **57** 92
- [8] Qi Y, Liu D, Dunson D 2008 *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning*, Helsinki, Finland, July 5–9 2008
- [9] Wang Y G, Yang L, Tang L 2013 *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* **2013** 1
- [10] Li R P, Zhao Z F, Palicot J, Zhang H G 2014 *IET Commun* **8** 1736

- [11] Wu Q S, Yimin D, Amin M G, Himed B 2014 *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing* Florence, Italy May 4–9 2014
- [12] Ji S H, Xue Y, Carin L 2008 *IEEE Trans. SP* **56** 2346
- [13] Hao C Q, Wang J, Deng B 2012 *Acta Phys. Sin* **61** 148901 (in Chinese) [郝崇清, 王江, 邓斌 2012 物理学报 **61** 148901]
- [14] Candes E J 2008 *Comptes Rendus Mathematique* **346** 589
- [15] Candes E J Tao T 2005 *IEEE Trans Inform Theory* **51** 4203
- [16] Tropp J A, Gilbert A C 2007 *IEEE Trans Inform Theory* **53** 4655
- [17] Ning F L, He B J, Wei J 2013 *Acta Phys. Sin* **62** 174214 (in Chinese) [宁方立, 何碧静, 韦娟 2013 物理学报 **62** 174214]
- [18] Huang S X Zhao X F Sheng Z 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5084
- [19] Sheng Z 2013 *Chin. Phys. B* **22** 029302
- [20] Zhang Z, Rao B D 2011 *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* **5** 912
- [21] Wipf D P, Rao D B 2007 *IEEE Trans. SP* **55** 3704

## A recovery algorithm for multitask compressive sensing based on block sparse Bayesian learning\*

Wen Fang-Qing<sup>1)2)</sup> Zhang Gong<sup>1)2)†</sup> Ben De<sup>1)2)3)</sup>

1) (College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

2) (Key Laboratory of Radar Imaging and Microwave Photonics, Ministry of Education, Nanjing 210016, China)

3) (Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing 210039, China)

( Received 5 August 2014; revised manuscript received 29 October 2014 )

### Abstract

As a widely applied model for compressive sensing, the multitask compressive sensing can improve the performance of the inversion by appropriately exploiting the interrelationships of the tasks. The existing multitask compressive sensing recovery algorithms only utilize the statistical characteristics of a sparse signal, the structural characteristics of the sparse signal have not been taken into consideration. A multitask compressive sensing recovery algorithm is proposed in this paper based on the block sparse Bayesian learning. The block sparse single measurement vector model is applied to the multi-task problem. Both statistical and block structural characteristics of the sparse signal are used to build a mathematical model, and the sparse inverse problem is linked to the parameter iteration problems in the Bayesian framework. The proposed algorithm does not require the sparseness information and noise beforehand, which turns out to be an effective blind recovery algorithm. Extensive numerical experiments show that the proposed algorithm can exploit both statistical and structural characteristics of the signal, therefore it may reach a good trade-off between the recovery accuracy and the convergence rate.

**Keywords:** multitask compressive sensing, sparse Bayesian learning, block sparse framework

**PACS:** 02.30.Zz, 02.50.-r, 87.16.dt

**DOI:** 10.7498/aps.64.070201

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61201367, 61271327, 61471191), the Funding for Outstanding Doctoral Dissertation in NUAA of China (Grant No. BCXJ14-08), the Funding of Innovation Program for Graduate Education, Jiangsu Province of China (Grant Nos. KYLX\_0277), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, and Partly Funded by the Priority Academic Program Development of Higher Education Institutions of Jiangsu Province, China (PADA).

† Corresponding author. E-mail: [gzhang@nuaa.edu.cn](mailto:gzhang@nuaa.edu.cn)