

非对称耦合粒子链在棘齿势中的确定性定向运输

季袁冬 屠浙 赖莉 罗懋康

Deterministic directional transport of asymmetrically coupled nonlinear oscillators in a ratchet potential

Ji Yuan-Dong Tu Zhe Lai Li Luo Mao-Kang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 070501 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.070501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

群体迁移行为的理论与实证研究

Theoretical and empirical studies on group behaviors

物理学报.2015, 64(3): 030502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030502>

非对称双稳耦合网络系统的尺度随机共振研究

System size stochastic resonance in asymmetric bistable coupled network systems

物理学报.2014, 63(22): 220503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.220503>

系统非对称性及记忆性对布朗马达输运行为的影响

Influences of the system symmetry and memory on the transport behavior of Brownian motor

物理学报.2014, 63(16): 160502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.160502>

空时非对称分数阶类Langevin棘齿

Spatiotemporally asymmetric fractional Langevin-like ratchet

物理学报.2014, 63(16): 160503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.160503>

分数阶非对称耦合系统在对称周期势中的定向运输

Directional transport of fractional asymmetric coupling system in symmetric periodic potential

物理学报.2014, 63(12): 120503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.120503>

非对称耦合粒子链在棘齿势中的确定性定向输运*

季袁冬¹⁾²⁾ 屠浙¹⁾ 赖莉¹⁾ 罗懋康^{1)2)†}

1)(四川大学数学学院, 成都 610065)

2)(四川大学空天科学与工程学院, 成都 610065)

(2014年10月10日收到; 2014年10月23日收到修改稿)

针对不受外力和噪声驱动的非对称耦合粒子链在棘齿势中的运动, 建立了相应的数学模型, 并对其确定性定向输运现象进行研究. 仿真结果表明: 在粒子间的非对称耦合和具有空间反演非对称的棘齿势的共同作用下, 粒子链能够产生定向输运现象, 并在适当参数条件下还能形成反向定向流; 粒子链平均速度关于耦合系数、势垒高度、弹簧自由长度等系统参数分别都存在广义共振现象, 即存在最佳参数使得定向输运速度达到最大; 在其他参数固定的情况下, 粒子链平均速度关于弹簧自由长度变化的曲线具有近似反对称的特点, 并存在广义多峰共振现象.

关键词: 非对称耦合, 棘齿势, 确定性定向输运, 广义共振

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.64.070501

1 引言

近年来, 非线性系统的定向输运现象在物理、生物、化学等不同学科领域受到了学者们的广泛关注^[1-7], 棘齿系统能够有效地利用系统的棘齿效应将非定向外部驱动力或涨落(噪声)的能量部分转化为系统定向输运的能量^[4,5]. 然而, 噪声在大多数情况下并不起主导作用, 一般把在没有噪声时产生定向输运的系统称为确定性棘齿系统, 相应的定向输运过程称为确定性定向输运^[5].

以往关于定向输运的研究多集中于单分子马达, 随着研究的不断深入, 人们发现在许多情况下分子马达以集体形式工作, 此时粒子或马达之间的相互作用将不可避免^[2-9], 并且其定向输运现象在控制输运、分离细小颗粒以及实现某些生物功能等多方面具有广泛的应用前景^[5-8,10,11]. 因而, 研究耦合系统的定向输运成为了分子马达研究的重要方向之一, 吸引了众多学者对其展开多方面的深入研究. 例如, Lipowsky 等^[12]发现多个分子马达

之间的耦合作用可以大大提高输运速度; Roostalu 等^[13]发现驱动蛋白 Cin8 通过多个马达之间的耦合作用可以改变输运方向; Downton 等^[14]发现多分子马达链的内部损耗会使其输运效率远低于单分子马达; Klumpp 等^[15]发现输运距离会随驱动蛋白-1 马达数目的增加而迅速增大.

目前, 对耦合系统的定向输运研究大多集中于简谐耦合情形, 而对于非对称耦合情形的研究相对较少^[2-4,8-15]. 本文针对不受外力和噪声驱动的非对称耦合粒子链在棘齿势中的运动, 建立了相应的数学模型, 并以粒子链平均速度为考察对象研究了系统的确定性定向输运现象. 数值仿真结果表明: 即使没有外力和噪声驱动, 在粒子间的非对称耦合和具有空间反演非对称的棘齿势的共同作用下, 粒子链也能够产生定向输运现象, 并在适当参数条件下还能形成反向定向流; 粒子链平均速度关于耦合系数、势垒高度、弹簧自由长度等系统参数分别都存在广义共振现象, 即粒子链平均速度随这些参数的变化出现了非单调变化, 且存在最佳参数使得定向输运速度达到最大; 在其他参数固定的情况下,

* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)和电子信息控制重点实验室项目(批准号: 2013035)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

粒子链平均速度关于弹簧自由长度变化的曲线具有近似反对称的特点, 并存在广义多峰共振现象.

2 模型

不受外力和噪声驱动的 N 个最近邻耦合粒子在周期势场中的运动可由如下非线性微分方程来刻画:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i} + g(x_{i+1}, x_i, x_{i-1}), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x_i(t)$ 为第 i 个粒子的位移, $V(x)$ 为周期势函数, $g(x_{i+1}, x_i, x_{i-1})$ 为第 i 个粒子的最近邻耦合函数.

本文研究一种特殊的非对称耦合情形, 即单向耦合, 它广泛存在于神经网络的信号传输、交通流等许多现象之中^[5,7], 选取如下形式的单向耦合函数:

$$g(x_{i+1}, x_i, x_{i-1}) = k(x_{i+1} - x_i - a), \quad (2)$$

式中 k 为耦合系数, a 为粒子间弹簧自由长度. 并选取如下正弦形式的棘齿势:

$$\begin{aligned} V(x) &= -\frac{1}{2}U_0 \left[\sin(2\pi x/L) + \frac{1}{4} \sin(4\pi x/L) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

式中 L 为周期势的空间周期, U_0 为势垒高度. 棘齿势的示意图如图 1 所示.

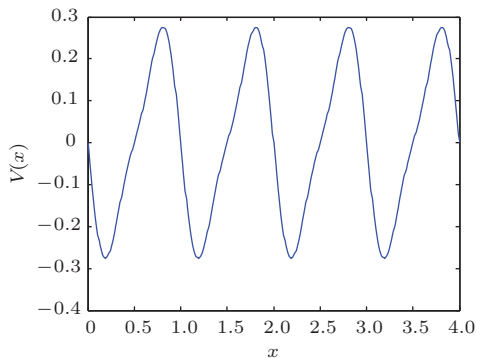


图 1 势函数 $V(x)$ 示意图

3 仿真与讨论

在宏观上, 粒子链平均速度反映了粒子链的整体运动趋势, 故本文以粒子链平均速度为考察对象. 下面, 我们通过数值仿真研究在没有外力和噪

声驱动情况下, 处于棘齿势中的非对称耦合粒子链的确定性定向输运现象, 以及耦合强度 k 、势垒高度 U_0 和弹簧自由长度 a 等系统参数对定向输运速度 v 的影响. 粒子链平均速度定义^[5]为

$$v = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_0^T \dot{x}_j(t) dt, \quad (4)$$

式中 T 为仿真时间. 在数值仿真中我们选取仿真采样步长为 $\Delta t = 0.01$ s, 仿真时间为 $T = 50$ s, 粒子数为 $N = 10$, 若无特别说明, 取耦合系数 $k = 10$, 势垒高度 $U_0 = 0.5$, 弹簧自由长度 $a = 0.2$.

3.1 粒子链位移

图 2 给出了不同参数下各粒子位移 $x_i(t)$ 随时

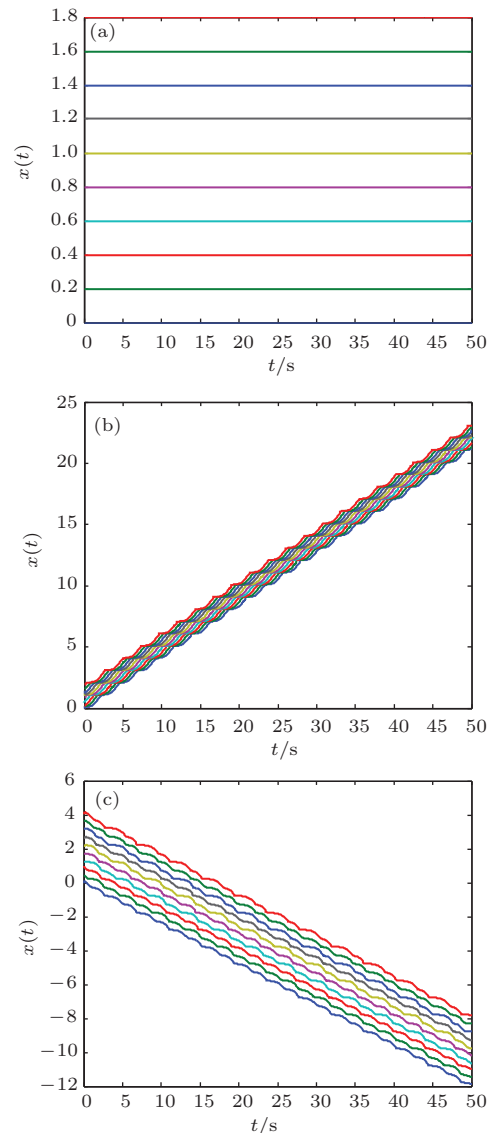


图 2 (网刊彩色) 不同参数下的粒子链位移图 (a) $k = 10, U_0 = 0, a = 0.2$; (b) $k = 10, U_0 = 0.5, a = 0.2$; (c) $k = 20, U_0 = 0.5, a = 0.45$

间的演化. 从图中可以看到, 粒子链的运动表现出对系统内部参数具有复杂依赖性, 并且在不受外部确定性力或随机力驱动的情况下, 通过各粒子之间的非对称耦合及具有空间反演非对称性的棘齿势的共同作用, 粒子链仍能往同一方向运动, 即产生了确定性定向输运现象, 甚至还能形成反向定向流.

3.2 粒子链平均速度与各系统参数的关系

图3给出了在不同势垒高度下粒子链平均速度 v 与耦合系数 k 的关系. 在棘齿势存在的情况下 (即 $U_0 \neq 0$), 弱耦合 (如 $k = 0, k = 1$) 的系统无法产生定向流, 而适当强度的耦合则可以促使粒子链越过势垒而形成定向运动; 另一方面, 在棘齿势消失的情况下 (即 $U_0 = 0$), 不论粒子之间的耦合系数有多大, 都无法促使粒子链形成定向输运. 可见, 粒子之间适当强度的耦合与系统内部的棘齿势是粒子链在无外部驱动力的情况下产生定向流的两个必不可少的重要因素.

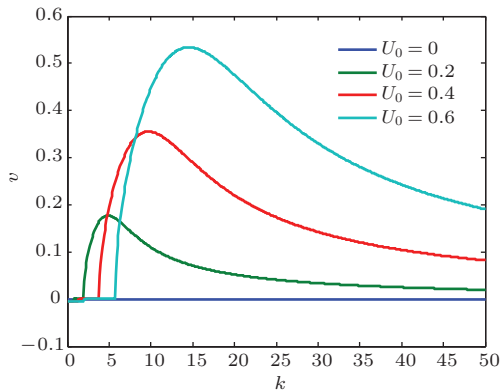


图3 (网刊彩色) 不同势垒高度下粒子链平均速度 v 与耦合系数 k 的关系

进一步考察势垒高度固定不变的情况, 我们可以观察到粒子链平均速度随耦合系数的增大出现了非单调变化, 即出现了广义共振现象, 且存在最佳耦合系数使得粒子链平均速度达到最大. 具体来说, 当耦合系数很小时, 由于系统没有外部驱动力, 故粒子链无法越过势垒, 因而不能形成定向输运; 特别地, 当 $k = 0$ 时, 粒子间没有相互作用, 即各个粒子相互独立, 这时系统就等价于单粒子系统. 当耦合系数足够大时, 粒子链平均速度随耦合系数的增大而迅速增大; 但当耦合系数过大时, 粒子间的相互作用就会变成对粒子的束缚, 使得粒子链平均速度反而减小; 特别地, 当耦合系数 $k \rightarrow \infty$ 时, 系

统的动力学行为相当于单粒子在有效势

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V(x + ia) \quad (5)$$

中的运动 [5,9]. 在后面的讨论中, 主要研究耦合系数 k 为有限值的情况下, 由于粒子间相互作用而引起的确定性定向输运.

由图3可知, 随着势垒高度的增大, 共振曲线整体右移, 同时峰值流速也相应提高, 这是因为粒子链获得了更大的势能, 并通过系统的非线性作用将其转化为定向运动的能量; 另一方面, 恰能形成粒子链定向输运的耦合系数阈值也相应增大, 这是因为粒子链需要借助更强的耦合才能使其越过更高的势垒而形成定向流.

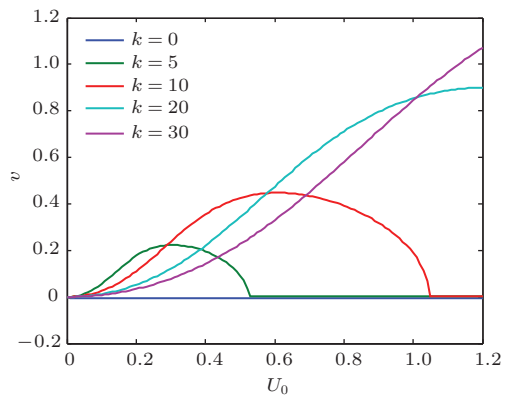


图4 (网刊彩色) 不同耦合系数下粒子链平均速度 v 与势垒高度 U_0 的关系

图4给出了不同耦合系数下粒子链平均速度 v 与势垒高度 U_0 的关系. 可以看到, 耦合系数越大, 能够促使系统形成定向输运的势垒高度变化范围也越大. 此外, 当耦合系数为零时 ($k = 0$), $v(U_0)$ 曲线是一条恒为零的水平直线, 即此时粒子链由于没有内部相互作用力的驱动而无法产生定向流; 当耦合系数较小时 (如 $k = 5, k = 10$), 粒子链平均速度具有随势垒高度的增大而呈先增后减小的趋势, 即系统存在广义共振现象, 但随着势垒高度的进一步增大, 粒子链将无法越过高势垒而迫使定向输运现象消失, 即出现了钉扎现象; 当耦合系数较大时 (如 $k = 20, k = 30$), 在图中的势垒变化范围内, 粒子链平均速度则是单调递增的.

模型(1)所刻画的系统存在两个空间尺度: 弹簧自由长度 a 和棘齿势空间周期 L , 二者的合作与竞争可以导致复杂的输运行为. 图5给出了不同弹簧自由长度下粒子链平均速度 v 与势垒高度 U_0 的关系. 可以看到, 不同的弹簧自由长度对应着不同

的 $v(U_0)$ 曲线, 弹簧自由长度不仅影响粒子链的定向输运速度(如 $a = 0.3$ 和 $a = 0.4$), 同时还影响粒子链的定向输运方向(如 $a = 0.2$ 和 $a = 0.45$), 并且在反向流方向也存在着广义共振现象.

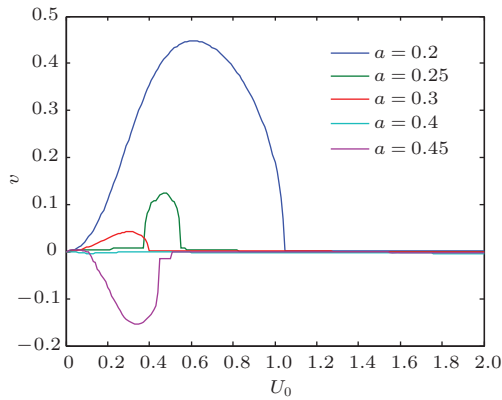


图5 (网刊彩色) 不同弹簧自由长度下粒子链平均速度 v 与势垒高度 U_0 的关系

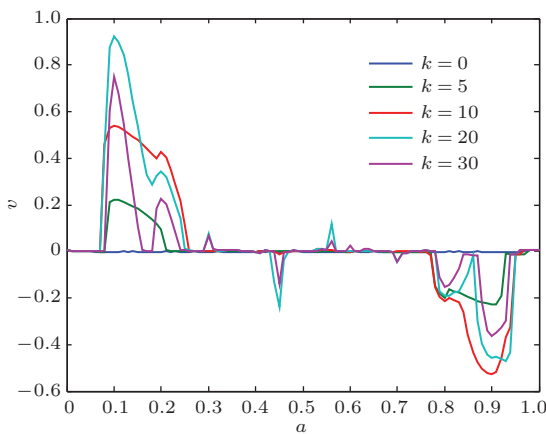


图6 (网刊彩色) 不同耦合系数下粒子链平均速度 v 与弹簧自由长度 a 的关系

图6给出了不同耦合系数下粒子链平均速度 v 与弹簧自由长度 a 的关系. 可以看到, 图中所有曲线都具有关于 $a = 0.5$ 近似反对称的特点, 即 $v(a) \approx -v(1 - a)$, 这里不完全相等是因为棘齿势是空间反演非对称的. 当弹簧自由长度 $a \in [0, 0.5]$ 时, 粒子链以正向的定向流为主, 而当 $a \in [0.5, 1]$ 时, 则以反向的定向流为主. 但在某些耦合系数下(如 $k = 20, k = 30$), 我们却可以在 $a = 0.5$ 附近区域看到相反情况, 即在 $[0, 0.5]$ 内出现反向流, 而在 $[0.5, 1]$ 内出现正向流.

考虑弹簧自由长度 $a \in [0, 0.5]$ 的情形, 可以看到, 粒子链平均速度 v 关于弹簧自由长度 a 是非单调变化的, 即存在共振峰, 并且在 a 的部分区域内还存在钉扎现象, 故类似于 $v(k)$ 和 $v(U_0)$, 弹簧自

由长度 a 也可作为一个优化参数使得定向流速度 v 最大. 此外, 随着耦合系数 k 的逐渐增大, $v(a)$ 曲线由单峰共振逐渐变为存在反向流现象的多峰共振.

4 结 论

本文研究了不受外力和噪声驱动的非对称耦合粒子链在棘齿势中的确定性定向输运现象, 以及系统参数对粒子链平均速度的影响. 数值仿真结果表明: 1) 在粒子间的非对称耦合及具有空间反演非对称的棘齿势的共同作用下, 粒子链可以在没有外部作用力(包括确定性力和随机力)驱动的情况下产生定向输运, 并在适当参数条件下还能形成反向定向流; 2) 粒子链平均速度关于各系统参数(耦合系数、势垒高度、弹簧自由长度)具有非单调变化的特点, 即存在最佳参数使得定向输运速度达到最大; 3) 在其他参数固定的情况下, 粒子链平均速度关于弹簧自由长度的变化曲线 $v(a)$ 关于 $a = 0.5$ 具有近似反对称的特点, 并且随着耦合系数 k 的逐渐增大, $v(a)$ 曲线由单峰共振逐渐变为存在反向流现象的多峰共振.

参考文献

- [1] Fendrik A J, Romanelli L, Reale M V 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041149
- [2] Zhang H W, Wen S T, Chen G R, Li Y X, Cao Z X, Li W 2012 *Chin. Phys. B* **21** 038701
- [3] Zhao A K, Zhang H W, Liu Y X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110506
- [4] Lai L, Zhou X X, Ma H, Luo M K 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 150502 (in Chinese) [赖莉, 周薛雪, 马洪, 罗懋康 2013 物理学报 **62** 150502]
- [5] Zheng Z G 2004 *Spantiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) p279, 292 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 279, 292 页]
- [6] Chen H B, Zheng Z G 2012 *J. Univ. Shanghai for Science and Technology* **34** 6 (in Chinese) [陈宏斌, 郑志刚 2012 上海理工大学学报 **34** 6]
- [7] Tu Z, Lai L, Luo M K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 120503 (in Chinese) [屠浙, 赖莉, 罗懋康 2014 物理学报 **63** 120503]
- [8] Guérin T, Prost J, Martin P 2010 *Current Opininion in Cell Biology* **22** 14
- [9] Wang F, Deng C, Tu Z, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 040501 (in Chinese) [王飞, 邓翠, 屠浙, 马洪 2013 物理学报 **62** 040501]
- [10] Savel E S, Marchesoni F, Nori F 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 10601

- [11] Veigel C, Schmidt C F 2011 *Nat. Rev. Mol. Cel. Biol.* **12** 163
 [12] Lipowsky R, Klumpp S, Nieuwenhuizen T M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 108101
 [13] Roostalu J, Hetrich C, Bieling P, Telley I A, Schiebel E, Surrey T 2011 *Science* **332** 94
 [14] Downton M T, Zuckermann M J, Craig E M, Plischke M, Linke H 2006 *Phys. Rev. E* **73** 011909
 [15] Beeg J, Klumpp S, Dimova R, Gracia R S, Unger E, Lipowsky R 2008 *Biophys. J.* **94** 532

Deterministic directional transport of asymmetrically coupled nonlinear oscillators in a ratchet potential*

Ji Yuan-Dong¹⁾²⁾ Tu Zhe¹⁾ Lai Li¹⁾ Luo Mao-Kang^{1)2)†}

1) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

2) (*School of Aeronautics and Astronautics, Sichuan University, Chengdu 610065, China*)

(Received 10 October 2014; revised manuscript received 23 October 2014)

Abstract

In the absence of external force and noise, a deterministic transport model for asymmetrically coupled nonlinear oscillators in a ratchet potential is established. By numerical simulation, both directed current and reversely directed current can be obtained by selecting appropriate parameters. The complex dependences of current velocity on the model parameters are discussed. It is observed that the average velocity of the particle chain varies non-monotonically with coupling strength and potential height, indicating a generalized resonance phenomenon. When the other parameters are fixed, the speed curve which is dependent on spring free length has a roughly inverse symmetry, and there also exists a generalized multi-peak resonance.

Keywords: asymmetrically coupled, ratchet potential, deterministic directional transport, generalized resonance

PACS: 05.10.Gg, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.64.070501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238), and the Foundation of Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, China (Grant No. 2013035).

† Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn