

具有双重时滞的时变耦合复杂网络的牵制外同步研究

韩敏 张雅美 张檬

Outer synchronization analysis of two time-varying networks with double delays based on pinning control

Han Min Zhang Ya-Mei Zhang Meng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 070506 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.070506

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070506>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

异质神经元的排列对环形耦合神经网络频率同步的影响

[Effects of arrangement of heterogeneous neurons on frequency synchronization of a ring-coupled neuronal network](#)

物理学报.2014, 63(18): 180507 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.180507>

最优的 Newman-Watts 网络与遍历网络的同步

[Optimal Newman-Watts networks and synchronization of Ergodic network](#)

物理学报.2013, 62(24): 240510 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.240510>

一类高聚类系数的加权无标度网络及其同步能力分析

[A weighted scale-free network model with high clustering and its synchronizability](#)

物理学报.2013, 62(22): 220506 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.220506>

部分线性的分数阶混沌系统修正函数投影同步

[Modified function projective synchronization for a class of partially linear fractional order chaotic systems](#)

物理学报.2013, 62(18): 180505 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.180505>

基于反演自适应动态滑模的 FitzHugh-Nagumo 神经元混沌同步控制

[Chaos synchronization of FitzHugh-Nagumo neurons via backstepping and adaptive dynamical sliding mode control](#)

物理学报.2013, 62(17): 170511 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.170511>

具有双重时滞的时变耦合复杂网络的牵制外同步研究*

韩敏[†] 张雅美 张檬

(大连理工大学, 电子信息与电气工程学部, 大连 116024)

(2014年9月11日收到; 2014年11月11日收到修改稿)

针对同时具有节点时滞和耦合时滞的时变耦合复杂网络的外同步问题, 提出一种简单有效的自适应牵制控制方法. 首先构建一种贴近实际的驱动-响应复杂网络模型, 在模型中引入双重时滞和时变不对称外部耦合矩阵. 进一步设计易于实现的自适应牵制控制器, 对网络中的一部分关键节点进行控制. 构造适当的Lyapunov泛函, 利用LaSalle不变集原理和线性矩阵不等式, 给出两个复杂网络实现外同步的充分条件. 最后, 仿真结果表明所提同步方法的有效性, 同时揭示耦合时滞对同步收敛速度的影响.

关键词: 时滞, 时变耦合, 牵制控制, 外同步

PACS: 05.45.Xt, 89.75.-k, 02.30.Ks

DOI: 10.7498/aps.64.070506

1 引言

复杂网络广泛存在于自然界和日常生活中, 如生物网络、交通网络等^[1]. 同步是复杂网络中较为显著的动力学行为^[2], 通常指通过系统自身耦合或施加外力等策略使两个或者多个动力系统共享相同的动态行为, 如极限环、混沌现象^[3]等. 由于其在工程方面如保密通信、信号处理、机器人列队、化学反应等存在重大的应用潜力, 受到人们的广泛关注. 早期, 复杂网络同步的研究主要集中于网络内部各个节点之间的同步研究, 这种同步被称为内同步^[4], 已取得了很多有意义的研究成果^[5,6]. 然而, 在真实世界中, 存在不同群体的相互制约, 在进行群体间的复杂网络动力学行为研究时, 进行两个或者多个网络之间的同步控制, 也就是所谓的外同步^[7,8], 显得更为重要. 2007年, Li等^[9]通过open-plus-closed-loop控制技术实现了两个单向耦合复杂网络间的外同步. Tang等^[10]通过设计自适应控制器, 研究了两个异结构复杂网络的同步. Wu等^[11]研究了两个节点不同且具有未知参数的复杂

网络, 给出了一定条件下外同步的结论.

另一方面, 建立各种能够准确反映实际网络系统特性的网络模型是研究复杂网络的基础. 为了使所研究的复杂网络模型更加贴近实际, 研究人员先后研究了具有噪声^[12]、扰动^[13]和时滞^[14]等影响因素的复杂网络的同步. 其中, 时滞是自然界普遍存在的一种现象, 通常由有限的信号传输和记忆效应所引起. 复杂网络中的时滞通常包括节点时滞^[15]和耦合时滞^[16]两种, 由于两种时滞的引入会给问题的分析和综合带来很大的困难, 因此同时考虑节点时滞和耦合时滞的研究并不多见^[17]. 此外, 现有文献中多假设网络的外部耦合矩阵是非时变的, 不能够满足生活中真实网络结构演化的这一特性. 因此, 具有双重时滞的时变耦合复杂网络的外同步具有一定的研究意义.

目前, 为解决上述复杂网络同步问题, 研究人员多使用全局控制的方法, 对网络中的所有节点加入控制器^[12-17]. 这种方法的思想简单, 但应用到节点数目繁多的复杂网络上, 不仅不易实现, 还会大大增加控制的难度和经济花销. 2004年, Li

* 国家自然科学基金(批准号: 61374154)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: minhan@dlut.edu.cn

等^[18]提出将牵制控制的思想用于复杂网络的同步. 牵制控制是减少控制器的有效手段, 通过选取网络中部分节点施加控制, 利用关键节点与其他节点的连接关系来实现网络的同步, 可以有效地减少计算负荷和设备资源. 随后, Chen等^[19]设计了单一的牵制控制器, 实现了复杂网络的内同步. Guo等^[20]研究了基于牵制控制的时滞耦合网络的广义同步问题. Lu等^[21]提出了有效的牵制脉冲控制策略实现了非线性随机网络的同步, 随后Lu等^[22]通过设计单一的脉冲控制器实现了动态网络的全局指数同步. 上述工作均将牵制控制成功地用于实现复杂网络的内同步^[23]. 但是, 目前应用牵制控制实现网络外同步的工作并不多见, 且研究的复杂网络模型较为保守. Fan等^[24]通过设计状态观测器, 首先将牵制控制用于两个简单的复杂网络的外同步. Zheng等^[25]研究了两个具有耦合时滞的复杂网络的牵制外同步问题, 并给出了同步的充分条件.

基于上述讨论, 本文针对同时具有耦合时滞和节点时滞的复杂网络, 建立具有双重时滞的时变耦合驱动-响应复杂网络模型, 设计适当的自适应牵制控制器, 基于一定的牵制控制策略, 给出保守性小, 易于实现的牵制外同步控制准则. 最后用两个数值仿真验证所提方法的有效性.

2 网络模型与预备条件

考虑由 N 个节点构成的具有节点时滞和耦合时滞的复杂动态网络, 其模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = & f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_i(t - \tau_1)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{x}_j(t) \\ & + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \mathbf{x}_j(t - \tau_2), \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in R^n$ 为第 i 个节点的状态向量; $f: R^n \rightarrow R^n$ 是一个非线性光滑函数; $c_1 > 0, c_2 > 0$ 分别是无时滞和有时滞边耦合强度; $\tau_1 \geq 0$ 为节点时滞, $\tau_2 \geq 0$ 为耦合时滞; $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) \in R^{N \times N}$ 和 $\mathbf{B}(t) = (b_{ij}(t)) \in R^{N \times N}$ 分别是网络无时滞部分和有时滞部分对应的时变外部耦合矩阵, 表示网络的拓扑结构, 满足如下条件: 如果节点 i 和 j 存在无时滞耦合边 ($i \neq j$), 则 $a_{ij}(t) > 0$, 否则 $a_{ij}(t) = 0$; 如果节点 i 和 j 存在时滞耦合边 ($i \neq j$), 则 $b_{ij}(t) > 0$,

否则 $b_{ij}(t) = 0$. 另外, 假设 $\mathbf{A}(t)$ 和 $\mathbf{B}(t)$ 均满足耗散条件

$$\begin{aligned} a_{ii}(t) = & - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ b_{ii}(t) = & - \sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

基于混沌同步中驱动-响应的概念, 将网络(1)视为驱动网络, 下面给出对应的响应网络模型:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_i(t) = & f(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{y}_i(t - \tau_1)) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{y}_j(t) \\ & + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \mathbf{y}_j(t - \tau_2) + \mathbf{u}_i(t), \\ & i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{y}_i(t) = (y_{i1}(t), y_{i2}(t), \dots, y_{in}(t))^T \in R^n$ 为第 i 个节点的状态向量; $\mathbf{u}_i(t)$ 是所需要设计的牵制控制器.

注1 从驱动-响应网络的模型可以看出本文所研究的两个网络具有如下特点: 1) 同时考虑了节点时滞和耦合时滞的影响, 复杂网络模型更具一般性; 2) 两个网络的外部耦合矩阵是时变的且不要求是对称的; 3) 加入自适应牵制控制器, 对网络的关键节点进行控制.

为了研究问题方便, 给出相关的假设和引理:

假设1^[26] 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ 和 $t > 0$, 存在一个正定对角矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 和正数 $\gamma > 0, \eta > 0$, 使得向量函数 f 有下列不等式成立

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{y}_i(t))^T \mathbf{P} (f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_i(t - \tau)) \\ & - f(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{y}_i(t - \tau))) \\ & \leq \gamma (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{y}_i(t))^T (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{y}_i(t)) \\ & + \eta (\mathbf{x}_i(t - \tau) - \mathbf{y}_i(t - \tau))^T \\ & \times (\mathbf{x}_i(t - \tau) - \mathbf{y}_i(t - \tau)). \end{aligned}$$

假设2^[14] 对于时变外部耦合矩阵 $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t)$, 假设存在常数 a, b 使得

$$\|a_{ij}(t)\| \leq a \quad \text{且} \quad \|b_{ij}(t)\| \leq b, \quad a, b > 0,$$

即耦合矩阵的元素有界.

注2 假设2限制了正常情况下实际网络拓扑结构的演化特征. 尽管外部耦合矩阵可能是时变的, 但是网络的耦合强度是有限的, 也就是说耦合矩阵的元素是有界的.

引理 1 [23] 假设 Q 和 R 都是对称矩阵, 矩阵 S 取适当维数, 如果满足

$$\begin{pmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{pmatrix} < 0,$$

当且仅当 $R < 0$ 和 $Q - SR^{-1}S^T < 0$.

3 控制器设计与同步分析

首先, 定义两个网络节点状态变量之间的误差

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{y}_i(t) - \mathbf{x}_i(t), \quad (4)$$

则误差随时间的演化关系为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i(t) &= \dot{\mathbf{y}}_i(t) - \dot{\mathbf{x}}_i(t) \\ &= f(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{y}_i(t - \tau_1)) - f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_i(t - \tau_1)) \\ &\quad + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) \\ &\quad + c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t - \tau_2) + \mathbf{u}_i(t). \end{aligned} \quad (5)$$

针对第 2 部分建立的驱动-响应网络模型, 下面设计合适的牵制自适应控制器, 利用 LaSalle 不变集原理 [27] 和线性矩阵不等式, 得到驱动网络 (1) 和响应网络 (3) 的同步条件. 主要结果由如下的定理给出.

定理 1 如果假设 1、假设 2 成立, 取如下控制器形式, 选择前 l 个节点进行控制:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(t) &= \begin{cases} -D_i(t) \mathbf{e}_i(t), & 1 \leq i \leq l, \\ 0, & 1 + l \leq i \leq N, \end{cases} \\ \dot{D}_i(t) &= \delta_i \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $D_i(t)$ 为控制器增益, δ_i 为控制器增益参数取正常数, $\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 为正定对角矩阵, 若满足下面的条件:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{I}_N + ac_1 \mathbf{K} + \mathbf{Q} - \mathbf{D} \\ + \frac{b^2 c_2^2 \mathbf{K} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{K}^T}{4} < 0, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\alpha = \frac{\gamma + \eta + \varepsilon}{\min(p_i)}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(\underbrace{\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_l}_l, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-l}),$$

Q 是恰当维数的正定矩阵, 则驱动网络 (1) 和响应网络 (3) 可实现同步.

注 3 根据文献 [28, 29], 对于有向网络, 选取对网络中出度大于入度的节点进行控制的牵制策略. 此处, 若假设外部耦合矩阵为 \mathbf{G} , 则第 i 个节点的出度 = $\sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ji}$, 第 i 个节点的入度

$$= -g_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij}.$$

证明 选取如下的 Lyapunov 函数:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}_i(t) \\ &\quad + \eta \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_1}^t \mathbf{e}_i^T(\theta) \mathbf{e}_i(\theta) d\theta \\ &\quad + \sum_{i=1}^n p_i \int_{t-\tau_2}^t \tilde{\mathbf{e}}_i^T(\theta) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{e}}_i(\theta) d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} (D_i(t) - \bar{d}_i)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 \bar{d}_i 是一待定的充分大的正常数,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(t) &= (e_{i1}(t), e_{i2}(t), \dots, e_{in}(t))^T, \\ \tilde{\mathbf{e}}_i(t) &= (e_{1i}(t), e_{2i}(t), \dots, e_{Ni}(t))^T. \end{aligned}$$

将 $V(t)$ 沿误差系统 (5) 求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}_i(t) + \eta \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{e}_i(t) \\ &\quad - \eta \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t - \tau_1) \mathbf{e}_i(t - \tau_1) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n p_i \tilde{\mathbf{e}}_i^T(t) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{e}}_i(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n p_i \tilde{\mathbf{e}}_i^T(t - \tau_2) \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{e}}_i(t - \tau_2) \\ &\quad + \frac{1}{\delta_i} \sum_{i=1}^N (D_i(t) - \bar{d}_i) \dot{D}_i(t). \end{aligned} \quad (9)$$

代入 (5) 式、(6) 式整理得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i^T(t) \mathbf{P} (f(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{y}_i(t - \tau_1)) \\ &\quad - f(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_i(t - \tau_1))) + c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij}(t) \mathbf{e}_j(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ c_2 \sum_{j=1}^N b_{ij}(t)e_j(t - \tau_2)) + \eta \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \\
 &- \eta \sum_{i=1}^N e_i^T(t - \tau_1)e_i(t - \tau_1) \\
 &+ \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t) \\
 &- \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t - \tau_2) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t - \tau_2) \\
 &- \sum_{i=1}^l \bar{d}_i e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t). \tag{10}
 \end{aligned}$$

根据假设1和假设2有

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq (\gamma + \eta) \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \\
 &+ c_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(t)e_i^T(t) \mathbf{P} e_j(t) \\
 &+ c_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij}(t)e_i^T(t) \mathbf{P} e_j(t - \tau_2) \\
 &+ \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t) \\
 &- \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t - \tau_2) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t - \tau_2) \\
 &- \sum_{i=1}^l \bar{d}_i e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) \\
 &\leq -\varepsilon \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \\
 &+ \frac{\gamma + \eta + \varepsilon}{\min(p_i)} \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \mathbf{P} e_i(t) \\
 &+ ac_1 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) \mathbf{P} e_j(t) \\
 &+ bc_2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N e_i^T(t) \mathbf{P} e_j(t - \tau_2) \\
 &+ \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t) \\
 &- \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t - \tau_2) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t - \tau_2) \\
 &- \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{D} \tilde{e}_i(t). \tag{11}
 \end{aligned}$$

将(11)式进行整理并写成线性矩阵不等式的形式得到

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq -\varepsilon \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) + \alpha \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \tilde{e}_i(t) \\
 &+ ac_1 \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{K} \tilde{e}_i(t) \\
 &+ bc_2 \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{K} \tilde{e}_i(t - \tau_2) \\
 &+ \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t) \\
 &- \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t - \tau_2) \mathbf{Q} \tilde{e}_i(t - \tau_2) \\
 &- \sum_{i=1}^n p_i \tilde{e}_i^T(t) \mathbf{D} \tilde{e}_i(t) \\
 &= -\varepsilon \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \\
 &+ \sum_{i=1}^n p_i (\tilde{e}_i^T(t), \tilde{e}_i^T(t - \tau_2)) \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{I}_N + ac_1 \mathbf{K} + \mathbf{Q} - \mathbf{D} & \frac{bc_2 \mathbf{K}}{2} \\ \frac{bc_2 \mathbf{K}^T}{2} & -\mathbf{Q} \end{bmatrix} \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} \tilde{e}_i^T(t) \\ \tilde{e}_i^T(t - \tau_2) \end{bmatrix}. \tag{12}
 \end{aligned}$$

由(7)式,

$$\alpha \mathbf{I}_N + ac_1 \mathbf{K} + \mathbf{Q} - \mathbf{D} + \frac{b^2 c_2^2 \mathbf{K} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{K}^T}{4} < 0,$$

又由引理1得到

$$\begin{bmatrix} \alpha \mathbf{I}_N + ac_1 \mathbf{K} + \mathbf{Q} - \mathbf{D} & \frac{bc_2 \mathbf{K}}{2} \\ \frac{bc_2 \mathbf{K}^T}{2} & -\mathbf{Q} \end{bmatrix} < 0. \tag{13}$$

则有 $\dot{V}(t) \leq -\varepsilon \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t)$.

可以得到, 包含在 $E = \{\dot{V}(t) = 0\} = \{e_i(t) = 0\}$ 中最大的不变集合是 $M = \{e_i(t) = 0, D_i(t) = \bar{d}_i, 1 \leq i \leq N\}$. 根据 Lasalle 不变原理, (5) 式的始于任意初值的轨线都将全局渐进收敛于集合 M , 特别的, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e_i(t) \rightarrow 0$, $D_i(t) \rightarrow \bar{d}_i$, 其中 \bar{d}_i 是正常数. 这就意味着驱动网络(1)和响应网络(3)实现了外同步.

4 数值仿真

为了验证定理1的有效性, 在MATLAB2013环境下, 分别给出网络节点数为10, 系统维数为1和网络节点数为5, 系统维数为3的两组同步误差演化趋势数值仿真.

仿真1

考虑物理中光学双稳 ikeda 系统, 运动方程为

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b\sin(x(t - \tau)). \quad (14)$$

取参量值 $a = 1.0, b = 4.0, \tau = 2$ 时, 系统满足耗散性, 取初值为0.5, 得到系统的相图如图1. 从图中可看出系统进入混沌状态, 且该系统的吸引子是有界的, 因此同步理论的条件是满足的. 仿真实验时, 取状态方程(13)作为目标网络和响应网络的节点.

假设驱动网络和响应网络含有10个节点, 即 $N = 10$, 其第 i 个节点是光学双稳 ikeda 系统. 根据所构建的驱动网络(1)和响应网络(3)的形式, 基于网络拆分的思想, 如图2所示, 将复杂网络按照有无耦合时滞拆分为耦合时滞为0的星形网络部分和耦合时滞为0.5的环形网络部分.

分别选择星形网络和环形网络所对应的时变不对称外部耦合矩阵如下:

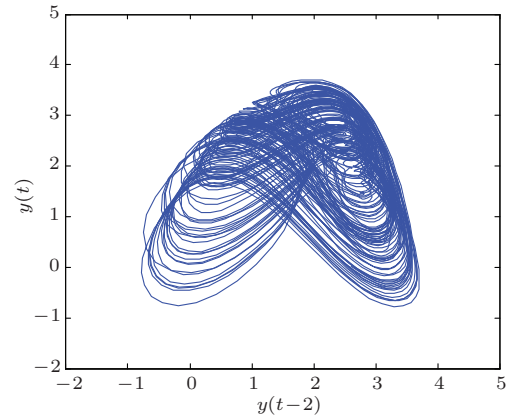


图1 Ikeda 混沌吸引子相图

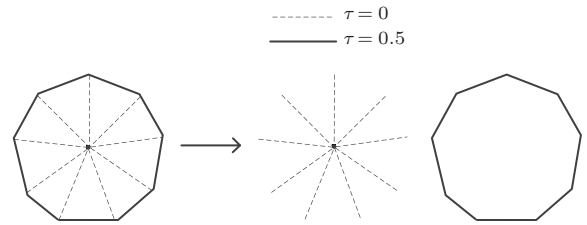


图2 复杂网络拆分

$$A = \begin{bmatrix} -9 \sin t & \sin t & \sin t & \sin t & \sin t & \sin t & \sin t & \sin t & \sin t & \sin t \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \sin t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin t \\ 1 & -\sin t - 1 & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin t & -\sin t - 1 \end{bmatrix}.$$

表1 10节点复杂网络的度分布

节点 i	1	2	3	4	5
出度(星形/环形)	9/2	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$
入度(星形/环形)	$9 \sin t/2 \sin t$	$1/1 + \sin t$	$1/2 \sin t$	$1/2 \sin t$	$1/2 \sin t$
节点 i	6	7	8	9	10
出度(星形/环形)	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$
入度(星形/环形)	$1/2 \sin t$	$1/2 \sin t$	$1/2 \sin t$	$1/2 \sin t$	$1/1 + \sin t$

假定耦合强度 $c_1 = 0.8, c_2 = 0.4$; 增益参数 $\delta_i = 8$; 耦合时滞量 $\tau_2 = 0.5$. 选择初始条件 $x(0), y(0)$ 为 $[0, 1]$ 之间的随机数. 依据外部耦合矩阵 $A(t)$ 和 $B(t)$, 得到复杂网络的度分布如表1所示. 从表1可看出, 该网络结构中的第一个节点的出度大于入度, 根据注3, 选择响应网络中的第一个节点进行牵制控制, 取控制器增益的初值为 $D_1(0) = 1$. 图3为数值仿真同步误差曲线. 从图3、图4可以看出, 经过短暂的时间后, 两个网络的同步得以实现, 仿真表明了同步判据的有效性.

两个网络达到同步的收敛速度越小, 同步变的越来越困难.

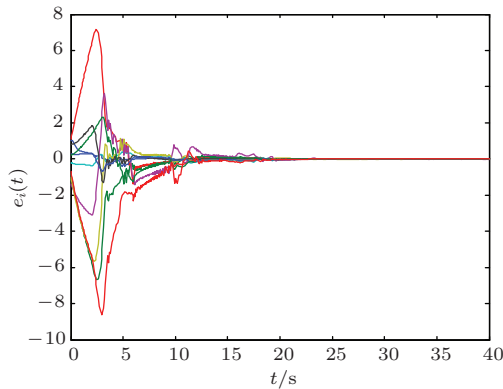


图3 (网刊彩色) 复杂网络同步误差曲线 ($i = 1, 2, \dots, 10$)

定义平均误差:

$$E(t) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N |y_i(t) - x_i(t)|^2 / N \right)}, \quad (15)$$

此处 $N = 10$.

在牵制控制下, 选择不同的耦合时滞 τ 进行仿真, 其他条件同上. 图5显示了不同耦合时滞下同步的平均误差响应曲线, 为了显示清楚, 又截取了 27 s 到 35 s 之间的曲线进行放大, 从图中可以看出, 当 τ 为 0.5 或 2 时, 平均误差很快趋于零, 但当 τ 为 10 或 14 时, 平均误差的波动较大且趋于零的速度明显变慢. 也就是说, 复杂网络的耦合时滞越大,

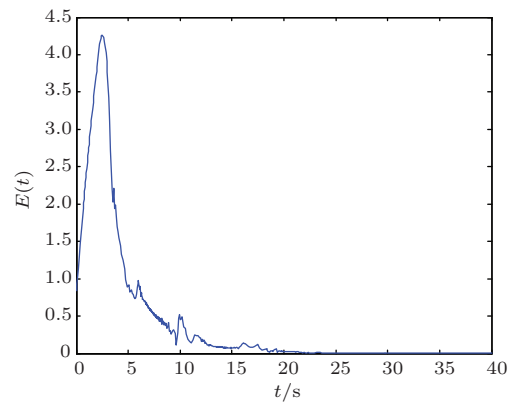


图4 同步平均误差随时间的演化曲线

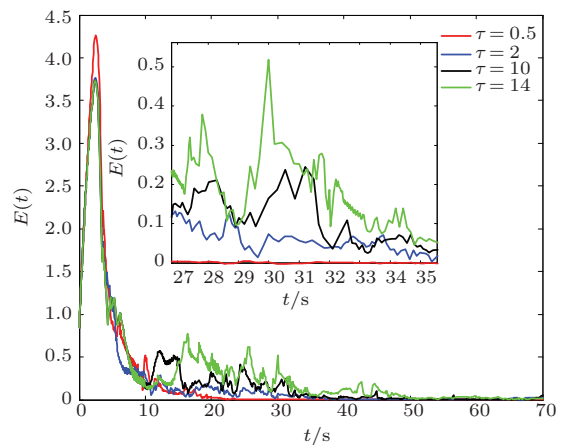


图5 (网刊彩色) 不同耦合时滞的平均误差曲线

仿真2

假设复杂网络含有5个节点, 其第 i 个节点是时滞 Lorenz 系统, 系统描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i1} &= -ax_{i1} + ax_{i2}, \\ \dot{x}_{i2} &= cx_{i1} + (k-1)x_{i2} - x_{i1}x_{i3} + kx_{i2}(t-\tau), \\ \dot{x}_{i3} &= -bx_{i3} + x_{i1}x_{i2}. \end{aligned} \quad (16)$$

取参量值 $a = 10, b = 8/3, c = 28, k = 5, \tau = 0.1$ 时系统进入混沌状态. 同仿真1, 将复杂网络拆分为耦合时滞为0的星形网络部分和耦合时滞为0.5的环形网络部分, 分别选择时变不对称耦合矩阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} -4 \sin t & \sin t & \sin t & \sin t & \sin t \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 \sin t & \sin t & 0 & 0 & \sin t \\ 2 & -\sin t - 2 & \sin t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & \sin t & -2 \sin t & \sin t \\ 2 & 0 & 0 & \sin t & -\sin t - 2 \end{bmatrix}.$$

假定耦合强度 $c_1 = 0.01, c_2 = 0.01$; 增益参数 $\delta_i = 8$; 耦合时滞量 $\tau_2 = 0.5$. 选择初始条件 $\mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0)$ 为 $[0, 2]$ 之间的随机数. 从表2可以看出, 该网络结构中的第一个节点的出度大于入度. 根据注3, 选择响应网络中的第一个节点进行牵制控制, 取控制器增益的初值为 $D_1(0) = 1$. 图6为两个复杂网络同步的误差曲线, 从图中可以看出, 在网络响应的初期, 由于两个网络各节点状态变量所取的初值不同, 误差随时间演化的差异十分明显. 但经过一段时间后, 两个网络相对应的节点间的误差随时间

演化均趋于零, 两个网络实现了混沌同步. 图7描述了牵制控制器增益随时间的演化曲线. 结果表明, 控制器增益会根据同步误差自动地调整为适当的常数.

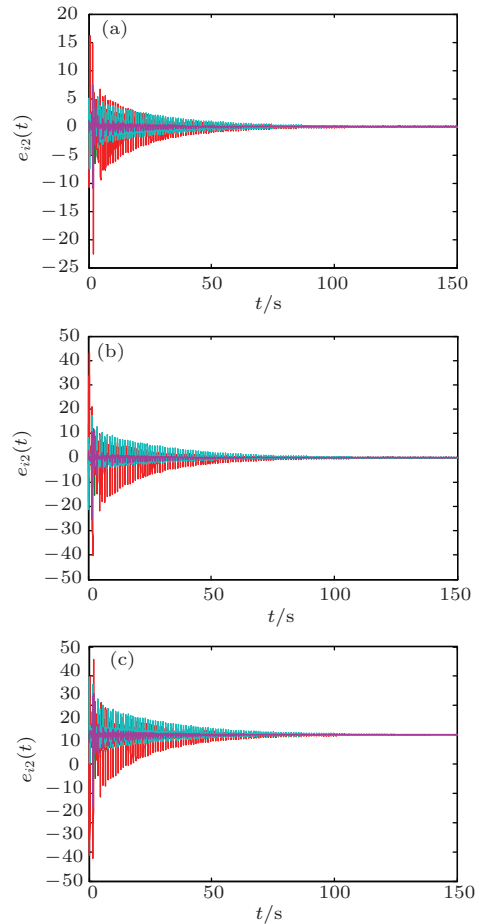


图6 (网刊彩色) 复杂网络同步误差曲线 ($i = 1, 2, \dots, 5$) (a) 误差 $e_{i1}(t)$; (b) 误差 $e_{i2}(t)$; (c) 误差 $e_{i3}(t)$

表2 5节点复杂网络的度分布

节点 i	1	2	3	4	5
出度 (星形/环形)	8/4	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$	$\sin t/2 \sin t$
入度 (星形/环形)	$4 \sin t/2 \sin t$	$2/2 + \sin t$	$2/2 \sin t$	$2/2 \sin t$	$2/2 + \sin t$

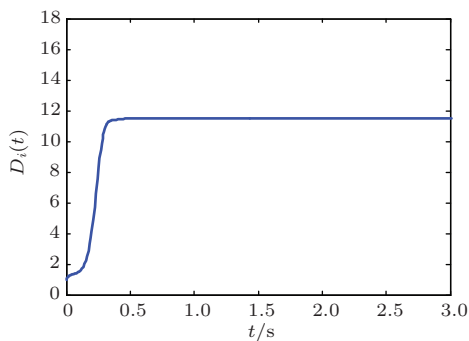


图7 牵制控制器增益随时间的演化曲线

5 结 论

鉴于节点时滞和耦合时滞在复杂网络中的客观存在, 本文通过构建双重时滞作用下的具有时变不对称外部耦合矩阵的驱动-响应复杂网络模型, 研究了两个复杂网络在牵制控制作用下的外同步. 所研究的网络模型涵盖了许多现有模型, 更具有-般性和实用性. 利用有效的牵制控制策略, 在复杂网络的关键节点上加入牵制自适应控制器, 通过构造适当的 Lyapunov 泛函, 基于 LaSalle 不变集原理

和线性矩阵不等式,得到了两个复杂网络实现同步的充分条件. 数值仿真在不同的网络节点个数和节点系统维数的情况下,分别证实了所提方法的有效性.

参考文献

- [1] Strogatz S H 2001 *Nature* **410** 268
- [2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [3] Han M, Niu Z Q, Han B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6824 (in Chinese) [韩敏, 牛志强, 韩冰 2008 物理学报 **57** 6824]
- [4] Li K, Guan S G, Gong X F, Lai C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 7133
- [5] Lü L, Li G, Guo L, Meng L, Zou J R, Yang M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080507
- [6] Zhang Q J, Zhao J C 2012 *Chin. Phys. B* **21** 040502
- [7] Wang G J, Cao J D, Lu J Q 2010 *Physica A* **389** 1480
- [8] Zhang M, Lü L, Lü N, Fan X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220508 (in Chinese) [张檬, 吕翎, 吕娜, 范鑫 2012 物理学报 **61** 220508]
- [9] Li C P, Sun W G, Kurths J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046204
- [10] Tang H W, Chen L, Lu J A, Tse C K 2008 *Physica A* **387** 5623
- [11] Wu Z Y, Fu X C 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 685
- [12] Sun Y Z, Li W, Ruan J 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** 989
- [13] Lu J Q, Ho D W C, Cao J D, Kurths J 2011 *IEEE Trans. neural netw.* **22** 329
- [14] Fang X L, Yang Q, Yan W J 2014 *Math. Probl. Eng.* **2014** 437673
- [15] Cai S M, He Q B, Hao J J, Liu Z R 2010 *Phys. Lett. A* **374** 2539
- [16] Li K, Guan S G, Gong X F, Lai C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 7133
- [17] Liang Y, Wang X Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 018901 (in Chinese) [梁义, 王兴元 2013 物理学报 **62** 018901]
- [18] Li X, Wang X F, Chen G R 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst. I-Regul. Pap.* **51** 2074
- [19] Chen T P, Liu X W, Lu W L 2007 *IEEE Trans. Circuits Syst. I-Regul. Pap.* **54** 1317
- [20] Guo W L, Austin F, Chen S H, Sun W 2009 *Phys. Lett. A* **373** 1565
- [21] Lu J Q, Kurths J, Cao J D, Mahdavi N, Huang C 2012 *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **23** 285
- [22] Lu J Q, Ho D W C, Cao J D, Kurths J 2013 *Nonlinear Anal.-Real World Appl.* **14** 581
- [23] Wang S G, Yao H X 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050508
- [24] Fan C X, Jiang G P, Jiang F H 2010 *IEEE Trans. Circuits Syst. I-Regul. Pap.* **57** 2991
- [25] Zheng S, Bi Q S 2011 *Phys. Scr.* **84** 025008
- [26] Hu C, Yu J, Jiang H J, Teng Z D 2011 *Phys. Lett. A* **375** 873
- [27] LaSalle J P 1960 *Proc Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **46** 363
- [28] Yu W W, Chen G R, Lü J H, Kurths J 2013 *SIAM J. Control Optim.* **51** 1395
- [29] Song Q, Cao J D 2010 *IEEE Trans. Circuits Syst. I-Regul. Pap.* **57** 672

Outer synchronization analysis of two time-varying networks with double delays based on pinning control*

Han Min[†] Zhang Ya-Mei Zhang Meng

(Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

(Received 11 September 2014; revised manuscript received 11 November 2014)

Abstract

It is well known that time delay is universal in complex networks. However, in most existing researches outer synchronization is realized between two networks with time delay by adding controllers to all nodes which may bring great economic costs and increase the difficulties in control in practice. In this paper, in order to deal with the problem of outer synchronization between two time-varying coupling networks with node delay and coupling delay, an adaptive pinning control scheme is proposed. First, a more realistic drive-response complex network model is constructed by introducing double delays and asymmetric coupling configuration matrices. Then, we design an adaptive pinning controller which is easy to implement, and choose an effective pinning strategy to control a crucial part of the nodes in the response network. Based on LaSalle' invariance principle and the linear matrix inequality, we may rigorously prove that the outer synchronization between the proposed drive-response networks can be achieved, and meanwhile some sufficient conditions are derived by adopting an appropriate Lyapunov-Krasovskii energy function. Finally, numerical simulation experiments are employed to verify the correctness and the effectiveness of the proposed method. Results indicate that the drive-response networks with double delays can indeed achieve outer synchronization by pinning control. Moreover, the synchronization is independent of coupling delay. And the remarkable influences of coupling delays on the synchronization speed are also revealed.

Keywords: delays, time-varying coupling, pinning control, outer synchronization

PACS: 05.45.Xt, 89.75.-k, 02.30.Ks

DOI: [10.7498/aps.64.070506](https://doi.org/10.7498/aps.64.070506)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61374154).

[†] Corresponding author. E-mail: minhan@dlut.edu.cn