

基于指数再生窗 Gabor 框架的窄脉冲欠 Nyquist 采样与重构

陈鹏 孟晨 孙连峰 王成 杨森

Sub-Nyquist sampling and reconstruction of short pulses based on Gabor frames with exponential reproducing windows

Chen Peng Meng Chen Sun Lian-Feng Wang Cheng Yang Sen

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 64, 070701 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.070701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I7>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于选择性测量的自适应压缩感知方法

[An adaptive compressed sensing method based on selective measure](#)

物理学报.2014, 63(20): 200701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.200701>

基于马尔科夫链蒙特卡罗的时延估计算法

[Time delay estimation using Markov Chain Monte Carlo method](#)

物理学报.2014, 63(13): 130701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.130701>

一种面向信息带宽的频谱感知方法研究

[Investigation of information bandwidth oriented spectrum sensing method](#)

物理学报.2014, 63(3): 030701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.030701>

沿时间逐步求解应力的拉格朗日分析方法研究

[Study on Lagrangian analysis for solving the stress gradually along the time](#)

物理学报.2012, 61(20): 200703 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.200703>

基于指数再生窗 Gabor 框架的窄脉冲欠 Nyquist 采样与重构*

陈鹏¹⁾ 孟晨¹⁾ 孙连峰^{2)†} 王成¹⁾ 杨森¹⁾

1) (机械工程学院, 导弹工程系, 石家庄 050003)

2) (国家纳米科学中心, 北京 100190)

(2014年9月19日收到; 2014年10月26日收到修改稿)

基于 Gabor 框架的窄脉冲信号采样及重构效果已经得到验证, 其解决了有限新息率 (finite rate of innovation, FRI) 采样方法无法在波形未知的情况下重构出脉冲波形的问题. 但是目前的 Gabor 框架采样系统的窗函数构造复杂且难以物理实现. 本文将指数再生窗函数引入 Gabor 框架, 将窗函数序列调制部分简化为一阶巴特沃斯模拟滤波器, 构造了 Gabor 系数重构所需要的压缩感知 (compressed sensing, CS) 测量矩阵. 为了使得测量矩阵满足信号精确重构所需的约束等距特性 (restricted isometry property, RIP), 根据高阶指数样条函数能量聚集特性, 选择了最优的窗函数支撑宽度, 推导了信号重构所需的约束条件, 还对其鲁棒性进行了分析. 本文通过仿真实验对上述分析进行了有效验证, 该系统可应用于测试仪器、状态监测、雷达及通信领域等多种背景下的窄脉冲信号采样与重构.

关键词: Gabor 框架, 指数再生窗函数, 欠采样, 压缩感知

PACS: 07.05.Hd, 07.05.Kf, 07.50.Qx, 84.40.Ua

DOI: 10.7498/aps.64.070701

1 引言

近年来数字信号处理技术飞速发展, 传统电路中越来越多模拟电路完成的功能都可以通过数字电路实现, 信号采样技术作为模拟系统与数字世界的纽带, 对电子技术水平的提高起着决定性的作用. 欠 Nyquist 采样技术是近年来国内外研究的热点, 在核磁共振^[1,2]、频谱感知^[3]、雷达^[4,5]及通信^[6]领域具有广泛的需求. 压缩感知理论的发展促使稀疏信号可以通过相比传统欠 Nyquist 采样更加简单、低成本的电路实现.

目前, 稀疏信号欠奈奎斯特采样方法主要有两大类. 第一类是针对频域稀疏的多带信号或谐波信号采样, 其首先利用调制宽带转换器 (modulated wideband converter, MWC) 或随机解调器 (random demodulator, RD) 对信号在频域进行平

移变换或伸缩变换, 获得稀疏的频域信息, 再通过子空间探测和插值对原始信号波形进行重构^[7,8]. 第二类是针对时域稀疏的 FRI 信号采样, 其主要是通过选择合适的采样核函数滤波器, 对波形已知的时域稀疏信号进行傅里叶变换, 获取傅里叶系数, 再通过零化滤波等方法对原始信号中脉冲的幅度和延迟信息进行探测, 最终代入信号函数模型对信号进行恢复^[9,10]. 但是这两种方法都不能同时兼顾信号的时域和频域信息, 对于时域和频域结构都未知的波形无法完成采样和重构. 文献^[11]提出了利用 Gabor 框架对信号进行变换, 获得信号的时频系数, 再通过子空间探测和 Gabor 反变换对信号进行重构. 此种方法克服了上面两种方法的不足, 在理论上针对时域稀疏的窄脉冲信号证明具有好的效果. 但是文献讨论的分段样条曲线和 B 样条曲线窗函数在现实中构建滤波器时极其复杂, 仅具有理论意义. 在测量矩阵设计方面, 文献^[11]采用伯努利

* 国家自然科学基金 (批准号: 61372039) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: slf@nanoctr.cn

矩阵, 虽然随机矩阵能产生尺寸接近最优的 RIP 矩阵, 但确定性 RIP 矩阵更利于物理设计, 并且从构造解码算法角度来看, 确定性矩阵利于降低内存和设计快速的恢复算法. 同时, 文献 [11] 为了简化系统, 构建的 Gabor 框架为临界抽样或过抽样框架, 此类框架鲁棒性较差, 当采样通道中存在噪声或失配时获得的采样结果很难的到矫正.

指数样条窗函数不但满足 Gabor 框架中时域紧支撑的要求 [12], 而且其指数再生特性使得构建的采样核函数滤波器更加简单. 同时, 利用指数再生系数构建的测量矩阵为确定性矩阵, 具有比确定性傅里叶矩阵更好的 RIP, 相比较伯努利矩阵也更利于物理实现. 本文构建了基于指数样条窗函数的 Gabor 采样框架, 利用指数样条窗的指数再生特性, 将采样部分复杂的窗函数调制和积分的实现转化为工程应用中可实现的简单模拟滤波器, 实现欠奈奎斯特采样. 通过设计最优的确定性测量矩阵, 对 Gabor 系数进行重构并进而实现原始信号恢复. 为了保证信号的精确重构, 本文还推导了采样系统构建所需的约束条件. 由于基于指数再生窗函数的 Gabor 框架为高度冗余的框架, 本文提出的采样系统相比文献 [11] 中的系统具有更强的鲁棒性, 能够抑制通道噪声及失配产生的系统误差.

2 基于 Gabor 框架的窄脉冲信号采集方法

2.1 信号模型

定义有限长度的连续时间多脉冲信号 $x(t)$, $t \in [0, T]$. 信号单个脉冲最大宽度为 W , 脉冲最大个数为 N_p , 脉冲位置未知且可重叠, 波形未知. 根据测不准原理, 此类信号不能保证带限, 但是为了便于研究, 将信号定义为 ϵ_Ω -带限信号, 即定义本质带宽 $F = [-\Omega/2, \Omega/2]$, 存在 $\epsilon_\Omega < 1$ 和, 使得

$$\int_{F^c} |\hat{x}(if)|^2 d\omega \leq \epsilon_\Omega \|x(t)\|_2^2, \quad (1)$$

其中 F^c 表示 F 以外的频带, $\hat{x}(if)$ 为 $x(t)$ 的傅里叶变换, 根据帕斯瓦尔定理, $\|\hat{x}(if)\|_2^2 = \|x(t)\|_2^2$.

2.2 基于 Gabor 框架的窄脉冲信号采集方法

定义 1 [12] 对于任意 $x(t), g(t) \in L_2(\mathbf{R})$, 定义调制算子 M_f 和位移算子 T_τ , 满足 $M_f x(t) =$

$e^{-i2\pi ft} x(t)$, $T_\tau x(t) = x(t - \tau)$. 存在常数 $0 < A \leq B < \infty$, 使得函数集合 $G(g, a, b) = \{M_{bl} T_{ak} g(t); k, l \in \mathbf{Z}\}$ 满足

$$A \|x\|^2 \leq \sum_{k,l \in \mathbf{Z}} |\langle x, M_{ak} T_{bl} g \rangle|^2 \leq B \|x\|^2, \quad (2)$$

则 $G(g, a, b)$ 为 Gabor 框架. A 和 B 定义为框架界, 若 $A = B$, $G(g, a, b)$ 为紧框架.

定义 1 中, $x(t)$ 和 $g(t)$ 分别为信号和 Gabor 框架窗函数, 存在 $\gamma(t) \in L_2(\mathbf{R})$, 利用框架系数 $z_{k,l} = \langle x, M_{bl} T_{ak} g \rangle$ 可以将 $x(t)$ 在 $G(g, a, b)$ 框架中进行展开

$$x = \sum_{k,l \in \mathbf{R}} z_{k,l} M_{bl} T_{ak} \gamma. \quad (3)$$

这里, $\gamma(t)$ 为 $g(t)$ 的对偶窗, $G(\gamma, a, b) = \{M_{bl} T_{ak} \gamma(t); k, l \in \mathbf{R}\}$ 为 $G(g, a, b)$ 的对偶框架. Gabor 框架中, 时频采样单元为时间长度 a 和频率长度 b 构成的栅格, 计为 (a, b) . 采样框架的冗余度 $\mu = ab$, 当 $\mu > 1$ 时为欠抽样, 会造成信息丢失, 而根据 Balian-Law 定理, $\mu = 1$ 时为临界采样, 不可能构成框架, 所以要求 $\mu \in (0, 1)$. 定义 S 为框架算子, 标准对偶窗 $\gamma = bS^{-1}g$. 如果框架在 $[-W/2, W/2]$ 上紧支撑, $a = \mu W$, $b = 1/W$, 则框架算子具有简单的形式 $S(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |g(t - ak)|^2$. 采样系统的基本结构如图 1 所示.

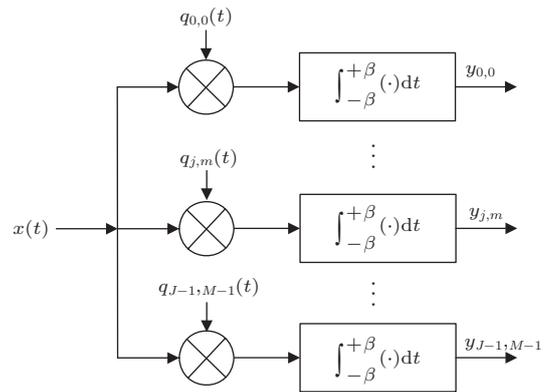


图 1 Gabor 采样系统结构

图 1 中, $q_{j,m}(t) = w_j(t) s_m(t)$, $0 \leq j \leq J$, $0 \leq m \leq M$, $j, m \in \mathbf{Z}$. $w_j(t) = \sum_{l=-L_0}^{L_0} d_{jl} e^{2\pi i blt}$ 用于频域调制, $s_m(t) = \sum_{k=-K_0}^{K_0} c_{mk} \overline{g(t - ak)}$ 用于时域采样. $x(t)$ 分 JM 个通道进行采样, 每一个通道

上采集的信号可表示为

$$y_{j,m} = \int_0^T f(t)q_{j,m}(t)dt = \sum_{l=-L_0}^{L_0} d_{jl} \sum_{k=-K_0}^{K_0} c_{mk} \langle x, M_{bl}T_{ak}g \rangle. \quad (4)$$

采集到的信号构成 $J \times M$ 的矩阵 \mathbf{Y} , 其元素为 $y_{j,m}$. 重构分为两步, 第一步是由 \mathbf{Y} 获得 $K \times L$ 的矩阵 \mathbf{Z} , 元素为 Gabor 系数 $z_{k,l} = \langle x, M_{bl}T_{ak}g \rangle$, 其中 $K = 2K_0 + 1, L = 2L_0 + 1$; 第二步是根据 (3) 式利用 Gabor 系数和对偶窗求出原始信号 $x(t)$.

求解 \mathbf{Z} 的过程即为解方程组

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\mathbf{U}^T, \quad \mathbf{U} = \mathbf{C}\mathbf{Z}, \quad (5)$$

\mathbf{D} 为 $w_j(t)$ 中频域调制分量的加权系数, 对于多脉冲信号, \mathbf{D} 的选取并不影响信号采样率. 如果 \mathbf{D} 为满足 $J \geq L$ 的列满秩矩阵, 则 $\mathbf{U}^T = \mathbf{D}^\dagger \mathbf{Y}$, \mathbf{D}^\dagger 为 \mathbf{D} 的 Moore-Penrose 逆. 文献 [11] 指出, 为了简化硬件实现, 可以令 $\mathbf{D} = \mathbf{I}$, 其中 \mathbf{I} 为单位矩阵, 这样 (5) 式中简化为

$$\mathbf{Z}' = \arg \min |\text{supp} \mathbf{Z}| \text{ s.t. } \mathbf{U} = \mathbf{C}\mathbf{Z}. \quad (6)$$

这是一个多观测向量 (multiple measurement vector, MMV) 问题, 目前有很多 CS 重构算法可以解决此问题 [13,14]. 利用 (3) 式对原始信号 $x(t)$ 进行重构, 其误差界可以用定理 1 表示.

定理 1 [11] $x(t)$ 为有限时间信号, 时域支撑区间为 $[-\beta/2, \beta/2]$, $\epsilon_\Omega \in B(\epsilon_\Omega < 1)$ 倍功率衰减带限为 $[-\Omega/2, \Omega/2]$, $\gamma(t) \in S_0$ 为 Gabor 框架 $G(g, a, b)$ 的对偶原子. 对于每一个 $\epsilon_B > 0$ 和 $\epsilon_E > 0$, 都存在 $0 < K_0 < +\infty$ 和 $0 < L_0 < +\infty$, 使得

$$\left\| x - \sum_{k=-K_0}^{K_0} \sum_{l=-L_0}^{L_0} z_{k,l} M_{bl} T_{ak} g \right\|_2 \leq \tilde{C}_0 (\epsilon_\Omega + \epsilon_B) \|x\|_2, \quad (7)$$

其中,

$$\tilde{C}_0 = C_{a,b}^2 \|\gamma\|_{S_0} \|g\|_{S_0},$$

$$C_{a,b} = (1 + 1/a)^{1/2} (1 + 1/b)^{1/2},$$

这里的 S_0 为 Segal 代数空间 [15].

2.3 存在的问题

基于 Gabor 框架的采样系统包括多个通道, 每个通道由 $w_j(t)$ 和 $s_m(t)$ 两个函数串联组成. 其中矩阵 \mathbf{D} 和调制函数 $w_j(t)$ 可由多种序列构成, 文献

[16] 对比了 Maximal, Gold, Hadamard, Kasami 以及高斯伪随机序列等多种序列, 其在无论理论还是实践上都已经比较成熟. 而调制窗函数 $s_m(t)$ 的直接应用在文献 [11] 中首次提出, 矩阵 \mathbf{C} 直接选择了 Bernoulli 矩阵, 关于窗函数也仅分析过分段样条曲线、B 样条曲线和高斯窗. 文献中设计的 $s_m(t)$ 函数存在两个主要问题:

1) 通过 Bernoulli 矩阵 \mathbf{C} 对窗函数进行调制, 在实际的物理应用中非常困难. 如果函数 $s_m(t)$ 的实现在函数 $q_{j,m}(t)$ 与信号 $x(t)$ 的相乘阶段完成, 生成 $s_m(t)$ 必须使用复杂的任意波形发生器. 为了保证每个叠加的窗函数平移相等的时间间隔, 对于波形发生器的精度要求很高. 同时, 在相乘的过程中必须保证各个通道具有很高精度的同步. 这样付出的代价就大大高于普通的多通道并行采样, 使得基于 Gabor 框架的采样系统在采集窄脉冲信号时仅仅具有理论意义.

2) 在文献 [11] 中研究的函数 $s_m(t)$ 中每个窗函数 $g(t - ak)$ 要求保持较低的冗余度 μ . 文中分析了 $\mu = 0.3, \mu = 0.5$ 和 $\mu = 0.75$ 三种情况下的系统重构误差, 虽然具有很好的效果, 但是都是在无系统噪声或失配的条件下完成的. 根据框架理论, μ 越小, 系统的鲁棒性越好 [17]. 而 μ 越小, 问题 1) 就越突出, 这是一个矛盾的问题.

对于以上两个问题, 本文在解决了问题 1) 的同时, 大大提高了冗余度 μ , 使系统具有更好的鲁棒性, 两个问题同时得到良好的解决.

3 指数再生窗函数

指数再生窗函数在 FRI 信号采样中已得到一定的应用 [12], 将其引入 Gabor 框架, 会具有更好的频域特性和系统可实现性.

定义 2 [18] 指数再生样条函数 $g(t)$ 是满足

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} v_{n,k} g(t - k) = e^{\alpha_n t} \quad (8)$$

的一类函数, 其中, $n = 0, 1, \dots, N, \alpha_n \in \mathbf{C}$. 选取 $g(t)$ 的双正交对偶窗 $\gamma(t)$, 则系数可表示为 $v_{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_n t} \gamma(t - k) dt$. 注意, $v_{n,k}$ 为关于 k 的离散时间序列, 满足

$$v_{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_n t} e^{\alpha_n k} \gamma(t) dt = e^{\alpha_n k} v_{n,0}. \quad (9)$$

指数再生窗函数源于指数样条曲线, 一般窗函数和指数样条函数的卷积都可构成指数再

生窗函数. 标准的一阶指数样条函数为 $\beta_\alpha = e^{\alpha} \text{rect}(t - \frac{1}{2})$, 其傅里叶变换表达式为 $\hat{\beta}_\alpha(\omega) = \frac{1 - e^{\alpha - j\omega}}{j\omega - \alpha}$. N 阶的指数样条曲线为 N 个一阶函数的卷积 $\beta_\alpha(t) = (\beta_{\alpha_1} * \beta_{\alpha_2} * \dots * \beta_{\alpha_N})(t)$, 其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$. 一般的指数再生窗函数表达式为 $\phi(t) = \psi(t) * \beta_\alpha(t)$, $\psi(t)$ 为任意函数, 本文中为了方便研究, 取 $\psi(t) = \delta(t)$, 则 $\phi(t) = \beta_\alpha(t)$.

这里引入 $\beta_\alpha(t)$ 的一个重要性质, 即 $\{T_{ak}\beta_\alpha(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 可构成一个 Riesz 基^[19]. 此性质决定了 $\{M_{bl}T_{ak}\beta_\alpha(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 仍是一个 Riesz 基. 文献^[18]中定理 9.6.1 指出, $L_2(\mathbf{R})$ 空间 L 的 Riesz 基是 L 的框架, 且框架界和 Riesz 基界一致, 可见 $\{M_{bl}T_{ak}\beta_\alpha(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 为 Gabor 框架, 且满足 (1) 式. 文献^[17]中定理 4.1 对 Gabor 框架的参数 $a, b \in \mathbf{Z}$ 做了更详细的说明, 若 a, b 中任意一个和单个 $\beta_\alpha(t)$ 的支撑宽度 W_β 不成比例, 则 $0 < a < W_\beta$, 且 $0 < b < 1/W_\beta$.

4 基于指数再生窗函数的采样与信号重构

4.1 Gabor 窗函数的设计

对于窄脉冲信号, 设采样框架窗函数支撑域为 $[0, W_g]$. 为了方便计算对偶窗, 取 $a = \mu W_g$, $b = 1/W_g$. 采样过程中, 需要保证采样框架覆盖 $[0, T]$, 则 $K = \lceil (W_g + T)/\mu W_g \rceil - 1$, $L = \lceil (B + \Omega)W_g \rceil - 1$. 根据 (4) 式, 由于获取的采样点 $y_{j,m}$ 是在完整的 $[0, T]$ 上经过积分后获得, 则采样率就降到了 $1/T$ 以下.

标准的 N 阶平滑的指数样条窗函数 $\beta_\alpha(t)$ 在 $[0, N]$ 上紧支撑, 构建 Gabor 框架窗函数时在 $\beta_\alpha(t)$ 的时域乘上一个缩放因子 N/W_g , 可得到 $[0, W_g]$ 上紧支撑的窗函数 $g(t) = \beta_\alpha(tN/W_g)$. 相应的, $g(t)$ 的对偶窗函数为 $\gamma(t) = \tilde{\beta}_\alpha(tN/W_g)$. 此时可获得调制函数

$$s_m(t) = \sum_{k=0}^{K-1} c_{m,k} \overline{\beta_\alpha(tN/W_g - \mu Nk)}. \quad (10)$$

注意, 下标 m 和 n 与数量 M 和 N 虽然是相等的, 但是为了方便区分通道和指数样条曲线的平滑阶数, 在本文中依然用不同的字母分别表示. 关于引入指数样条窗函数对系统产生的简化效果, 可以通过命题 1 进行描述.

命题 1 基于指数再生窗函数的 Gabor 框架采样系统, 若其窗函数为 $g(t) = \beta_\alpha(tN/W_g)$, 时频栅格为 $(\mu W_g, 1/W_g)$, $x(t)$ 在第 (j, m) 个通道的响应为经 $w_j(t)$ 调制的信号于滤波器 $\chi_m(t)$ 在时间 $t = \lceil T \rceil$ 处的瞬时响应, $\chi_m(t)$ 表达式为

$$\chi_m(t) = e^{-\overline{\alpha_m} N t / W_g} \text{rect}(t - T/2). \quad (11)$$

证明 为了保证平移的指数样条窗可以在 $[0, T]$ 构成一个指数曲线, 令平移指标集的下限和上限值分别为 K_1 和 K_2 , 则

$$\begin{aligned} K_1 a &\geq -W_g \\ K_2 a &\leq T + W_g \\ K_1 &= -N \\ \rightarrow K_2 &= \lceil (T + W_g)N/W_g \rceil - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

根据 (12) 式, 整个时间域上的信号可以切分为 $K = K_2 - K_1$ 段进行处理. 根据 (8) 式, 由 K 个加权指数样条窗函数平移叠加可以获得

$$s_m(t) = \begin{cases} e^{\overline{\alpha_m} N t / W_g}, & t \in [0, T], \\ 0, & t \notin [0, T], \end{cases} \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} m &= \{1, 2, \dots, M\}, \\ v_{m,k} &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha_m t} \tilde{\beta}(t - k) dt, \end{aligned}$$

根据第 3 节定义, 可知 $\tilde{\beta}(t - k) = e^{\alpha_m k} \tilde{\beta}(t)$, 所以 $v_{m,k} = e^{\alpha_m k} v_{m,0}$. 设计函数

$$\chi_m^*(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} v_{m,p} \overline{\beta_\alpha(-tN/W_g + \mu N(p-1))},$$

根据 (13) 式知 $\chi_m^*(t) = e^{-\overline{\alpha_m} N t / W_g}$.

令 $p, q \in \{K_1, K_1 + 1, \dots, K_2\}$ 且 $p + q = K - 2N$, 这里将 $\chi_m^*(t)$ 在 $[0, T]$ 内截短, 得 $\chi_m(t) = \chi_m^*(t) \text{rect}(t - T/2)$, 令 $\mu = 1/N$ 则

$$\begin{aligned} y_{j,m} &= \int_0^T x(t) w_j(t) s_m(t) dt \\ &= \int_0^T x(t) w_j(t) \sum_{q=K_1}^{K_2} c_{m,q} \overline{\beta_\alpha(tN/W_g - q)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T x(t)w_j(t) \sum_{p=K_1}^{K_2} c_{m,p} \overline{\beta_{\alpha}(tN/W_g - \mu N(K - 2N - p))} dt \\
 &= \int_0^T x(t)w_j(t) \sum_{p=K_1}^{K_2} c_{m,p} \overline{\beta_{\alpha}\left(-(\tau - t) \frac{N}{W_g} + \mu N(p - 1)\right)} dt \\
 &= (x(t)w_j(t) * \chi_m(t)) [\tau].
 \end{aligned} \tag{14}$$

如果 $c_{m,k} = v_{m,q}$, 则

$$y_{m,k} = (x(t)w_j(t) * \chi_m(t)) [\tau],$$

根据 (12) 式对采样时间进行计算, 得到 $\tau = W_g(K_2 - K_1 - 2N + 1)/N = [T]$.

说明 1 采样点为 $t = [T] \geq T$, 保证了滤波后采样点包含 $[0, T]$ 内所有信息. 由命题 1 可知, $\chi_m(t)$ 是将系统第 j 个通道内积环节转化为卷积环节后, $s_m(t)$ 所对应的滤波器函数, 这样框架窗函数 $\beta_{\alpha}(t)$ 的设计就转化成了滤波器 $\chi_m(t)$ 设计的问题. 对 $\chi_m(t)$ 进行拉普拉斯变换得到频率响应

$$X_m(s) = \frac{1 - e^{-T(s + \overline{\alpha}_m N/W_g)}}{s + \overline{\alpha}_m N/W_g}. \tag{15}$$

由 (15) 式可知, 窗函数的设计主要在于序列 α 的选取. 令 $\alpha_m = \alpha_0 + i\lambda(m)$, 其中 $m = 1, 2, \dots, M$, 由拉普拉斯变换收敛要求知 $\text{Re}[s] > -\alpha_0$. 为了简化 $X_m(s)$, 可取 $\alpha_0 = W_g/WN$. 由于信号 $x(t)$ 脉宽远小于总时长, 即 $T \gg W$, 如果 $W \geq W_g$, 则满足 $e^{-T(s + \overline{\alpha}_m N/W)} = e^{-TW_g/W^2} e^{T(mi\lambda(m)N/W - s)} \rightarrow 0$. 这样系统第 j 个通道的 $s_m(t)$ 就转化为一个一阶巴特沃斯滤波器

$$X_m(s) = \frac{1}{(s + \overline{\alpha}_m N/W)}.$$

说明 2 由于 $g(t) = \beta_{\alpha}(tN/W_g)$ 为 N 个一阶指数样条函数 $\beta_{\alpha_m}(tN/W_g)$ 的卷积, 所以为了保证窗函数 $g(t)$ 为紧支撑的实函数, 对于 $m = 0, 1, \dots, M - 1$, 选取序列 α 能够满足 $\lambda(m) + \lambda(M - m) = 0$. 在本文中 $\lambda(m)$ 的选取为奇数

$$\lambda(m) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{K}(2m - M + 1), & M \text{ 为偶数,} \\ -\frac{2\pi}{K} \frac{2m - M + 1}{2}, & M \text{ 为奇数.} \end{cases} \tag{16}$$

此时, 采样系统的加窗过程可以通过滤波器实现, 如图 2 所示.

说明 3 第 j 个通道的信号采集可以转换为信号 $x(t)$ 被 $w_j(t)$ 调制后再经过滤波器 $\chi_m(t)$ 实现,

关于 $w_j(t)$ 的选取文献 [20] 提供了很多随机序列进行实现, 而在时域信号积分环节由于使用了滤波器 $\chi_m(t)$, 将不再受到 $s_m(t)$ 复杂的生成波形的困扰. 但是这样采集信号需要使用 $J \times M$ 个通道, 通过图 3 中的改进模型可以将图 1 系统通道数削减为 J .

在本模型中, 令 $s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} s_m(t + W_g K_m/N)$, 信号通过滤波器 $\chi(t)$ 后, 第 j 个通道中时间 $t = \tau m$ 时采样的到得结果为 y_j , 并且 $\tau = W_g K/N$. $s(t)$ 对应的滤波器 $\chi(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \chi_m\left(t + \frac{W_g K_m}{N}\right)$, 其拉普拉斯变换 $X(s) = \sum_{m=0}^{M-1} e^{\frac{W_g K_m s}{N}} X_m(s)$. 需要指出

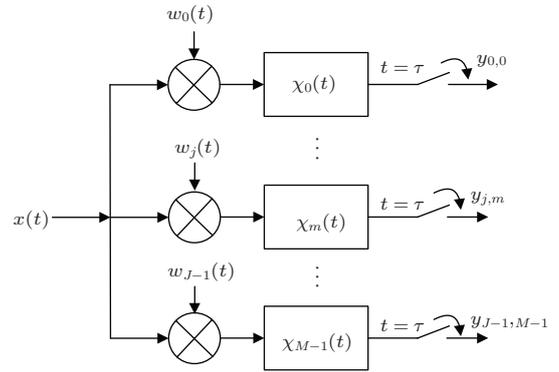


图 2 Gabor 采样系统滤波器结构模型

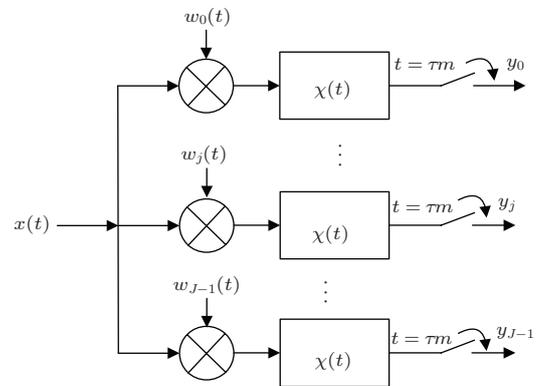


图 3 Gabor 采样系统改进模型

的是, 延时项 $e^{W_g K_s/N}$ 并不表示在实际电路中必须存在延时滤波器, 它的意义在于保证卷积过程中 $s_m(t)$ 在时域不存在混叠.

4.2 信号重构

在本文中, 首要解决的问题是测量矩阵 \mathbf{C} 的确定. 根据系统设计和指数再生窗函数的定义, \mathbf{C} 中的元素 $c_{m,k}$ 可通过计算系数 $v_{m,k}$ 间接获得, 表达式如命题 2.

命题 2 \mathbf{C} 中的元素 $c_{m,k}$ 的表达式为

$$c_{m,k} = e^{\overline{\alpha_m k}} \frac{\Xi(m)}{|\Xi(m)|^2},$$

$$\Xi(m) = \frac{W_g}{N} \prod_{n=1}^N \frac{1 - e^{\overline{\alpha_n + \alpha_m}}}{\overline{\alpha_n + \alpha_m}}, \quad (17)$$

其中, $m \in \{1, \dots, M\}$, $k \in \{K_1, K_1 + 1, \dots, K_2\}$.

证明 令 $p, q \in \{K_1, K_1 + 1, \dots, K_2\}$, $p + q = K - 2N$, 则

$$c_{m,k} = v_{m,q} = v_{m,(K-2N-p)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overline{\alpha_m} Nt/W_g}$$

$$\times \widetilde{\beta}_\alpha(-tN/W_g + (K - 2N - p - 1)) dt$$

$$= e^{\overline{\alpha_m}(K-2N-p)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overline{\alpha_m} Nt/W_g}$$

$$\times \widetilde{\beta}_\alpha(-tN/W_g - 1) dt$$

$$= e^{\overline{\alpha_m} q} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overline{\alpha_m} Nt/W_g} \widetilde{\beta}_{-\alpha}(tN/W_g) dt$$

$$\stackrel{*}{=} e^{\overline{\alpha_m k}} \frac{\Xi(m)}{|\Xi(m)|^2}. \quad (18)$$

(18) 式中, 在 * 步计算时, 假设 $s = \overline{\alpha_m} Nt/W_g$, 将积分简化为对 $\widetilde{\beta}_{-\alpha}(tN/W_g)$ 的拉普拉斯变换可得. 若 $\beta(t)$ 的拉普拉斯变换为 $B_\alpha(s)$, 则对偶函数的拉普拉斯变换 $\widetilde{B}_\alpha(s) = \frac{B_\alpha(s)}{|B_\alpha(s)|^2}$. 证毕.

说明 确定了测量矩阵 \mathbf{C} 后, (6) 式中的问题能否精确求解, 测量矩阵 \mathbf{C} 的约束等距特性(RIP)十分关键, 但是 \mathbf{C} 的 S 阶 RIP 常数 δ_S 没有很好的计算方法, 本文中采用间接的方法进行考察. 定义矩阵 Θ 的列相干性为 $\theta(\Theta) := \max_{i \neq j} \frac{|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|}{\|\varphi_i\|_2 \|\varphi_j\|_2}$, 矩阵 Θ 满足常数为 $\delta_S = (S - 1)\theta(\Theta)$ 的 S 阶 RIP 性质 [21]. 文献 [22] 指出, DFT 矩阵 $\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{K}} e^{i2\pi mk/K} \right\}_{M \times K}$ 和其子矩阵都具有很好的 RIP 性质, 本文通过对比 \mathbf{C} 和 \mathbf{F} 矩阵的

列相干性考察其 RIP. 将 (18) 式中的系数代入相干性计算公式, 可得 $\theta(\mathbf{C}) \leq \theta(\mathbf{F})$. 因此, 矩阵 \mathbf{C} 比一般的 DFT 矩阵具有更加严格的 RIP 性质. 根据文献 [23], 当 $M \geq cS \log^4(K)$, DFT 矩阵 \mathbf{F} 的任意行构成的子矩阵满足 S 阶 RIP 条件, 此约束条件依然适用于本文中矩阵 \mathbf{C} .

在本文提出的采样系统中, 稀疏度 S 即为 \mathbf{Z} 列向量的非零值的个数. 由于每一列都是对相同时域稀疏信号的加窗调制, 所以矩阵 \mathbf{Z} 每一列中非零值的位置和个数都完全相同. 根据系统设计, 由于冗余度 $\mu = 1/ab = 1/N$, 可得 $S = \left\lceil \left(1 + \frac{W}{W_g}\right) N \right\rceil N_p$. 如果 $W_g = W$, 稀疏度与文献 [11] 中相同, 即 $S = \lceil 2\mu^{-1} \rceil = 2N$. 如果 $W_g \gg W$, 稀疏度趋于下限, 即 $S \rightarrow N$. 但是无论在哪种情况, 都存在 $S > N = M$. 根据前面分析, 还可以得到 Gabor 系数矩阵 \mathbf{Z} 列向量的维度, 即测量矩阵 \mathbf{C} 的列数 $K = \left\lceil \frac{TN}{W_g} - 1 \right\rceil + 2N$. 为满足约束条件, 需要选择合适的 W_g 和 N . 得到 Gabor 系数矩阵 \mathbf{Z} 之后, 就可以根据 (3) 式对信号进行重构, 其误差上限可遵循文献 [11] 中的定理 III.1.

4.3 信号重构的约束条件

N 阶指数样条函数在 $[0, W_g]$ 上紧支撑, 随着 N 的增大, 窗函数越来越集中在比较窄的支撑域上, 图 4 为当 $W_g = W$, 且 $\lambda(m) + \lambda(M - m) = 0$ 条件下, 对幅度和窗宽都进行归一化得到的函数曲线.

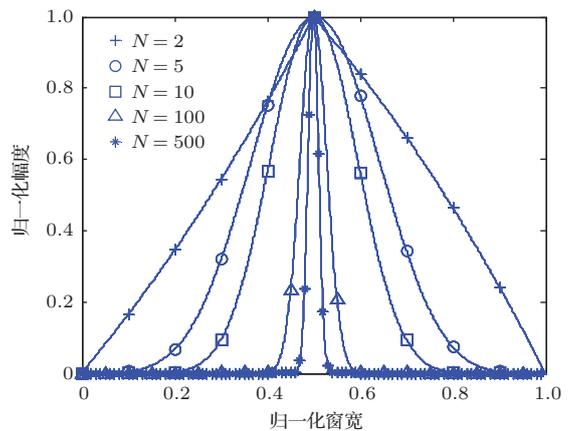


图 4 幅度和窗宽都归一化的指数样条曲线

如果 $T_E = [t_1, t_2]$, 且 $0 \leq t_1 < t_2 \leq W_g$, 对于 $T_{E1}^c = [0, t_1]$, $T_{E2}^c = [t_2, W_g]$, 存在 $\epsilon_W < 1$, 满足式,

则定义 $W_E = |T_E|$ 为窗函数 $\phi(t)$ 的 ϵ_W -本质窗宽.

$$\left(\int_{T_{E_1}^c + T_{E_2}^c} |\phi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \epsilon_W \|\phi(t)\|_2. \quad (19)$$

在这种情况下, 根据文献 [11] 中的定理 III. 1, 关于利用 (3) 式对原始信号 $x(t)$ 进行重构的误差界可以用推论 1 表示.

推论 1 $x(t)$ 为有限时间信号, 时域支撑区间为 $[-\beta/2, \beta/2]$, $\epsilon_\Omega (\epsilon_\Omega < 1)$ 倍功率衰减带限为 $[-\Omega/2, \Omega/2]$, $\gamma \in S_0$ 为 Gabor 框架 $G(\varphi, a, b)$ 的对偶原子. 对于每一个 $\epsilon_B > 0$ 和 $\epsilon_E > 0$, 都存在 $-\infty < K_1 < 0 < K_2 < +\infty$ 和 $0 < L_0 < +\infty$, 使得

$$\left\| x - \sum_{k=K_1}^{K_2} \sum_{l=-L_0}^{L_0} z_{k,l} M_{bl} T_{ak} g \right\|_2 \leq \tilde{C}_0 (\epsilon_\Omega + \epsilon_B + \epsilon_W + \epsilon_B \epsilon_W) \|x\|_2, \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= C_{a,b}^2 \|\gamma\|_{S_0} \|g\|_{S_0}, \\ C_{a,b} &= (1 + 1/a)^{1/2} (1 + 1/b)^{1/2}. \end{aligned}$$

需要说明的是, 如果 $g_c(t)$ 是 $g(t)$ 在频带 $[-B/2, B/2]$ 上满足误差为 ϵ_B 的近似, 在利用 CS 算法求解 \mathbf{Z} 时根据 (19) 式对非零极小项进行了舍弃后可得到时域截短窗 $g_c(t)$, 则满足 $\|g - g_c\|_{S_0} \leq (\epsilon_B + \epsilon_W + \epsilon_B \epsilon_W) \|g\|_{S_0}$, 根据文献 [11] 中的证明即可得到此推论. 为了使常数项 $\epsilon_B + \epsilon_W + \epsilon_B \epsilon_W$ 保持足够小, 关键在于 Gabor 系数矩阵 \mathbf{Z} 的精确重构. 根据文献 [24], 需要保证测量矩阵 \mathbf{C} 满足 RIP 条件, 信号重构的约束条件如定理 2.

定理 2 对于最大脉冲个数为 N_p 的多窄脉冲信号 $x(t)$, 通过基于 Gabor 的采样系统进行欠 Nyquist 采样. 如果使用在 $[0, W_g]$ 上紧支撑且 ϵ_W -本质窗宽为 W_E 的 N 阶指数样条函数作为窗函数, $M \times K$ 的矩阵 \mathbf{C} 为重构中对应的测量矩阵. 存在常数 $\eta(N, \epsilon_W) = W_E/W_g$, $c > 0$, 满足

$$\begin{aligned} &c N_p \left(1 + \frac{1}{\eta(N, \epsilon_W)} \right) \\ &\times \log^4 \left(\frac{T}{\eta(N, \epsilon_W) W} + 2N - 1 \right) \leq 1. \quad (21) \end{aligned}$$

则信号可以得到精确重构. 其中 δ_S 为稀疏度为 S 的 RIP 常数.

证明 在基于 Gabor 框架的欠 Nyquist 采样系统中, 若信号脉冲个数为 N_p , 系数矩阵 \mathbf{Z} 的稀

疏度为

$$\begin{aligned} S &= \left[\left(1 + \frac{W}{W_g} \right) N \right] N_p \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{\eta(N, \epsilon_W)} \right) N \right] N_p \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{\eta(N, \epsilon_W)} \right) N_p N. \quad (22) \end{aligned}$$

矩阵 \mathbf{Z} 的列向量的维度为

$$\begin{aligned} K &= \left[\frac{TN}{\eta(N, \epsilon_W) W_g} - 1 \right] + 2N \\ &\geq \frac{TN}{\eta(N, \epsilon_W) W_g} + 2N - 1. \quad (23) \end{aligned}$$

根据文献 [21], 为了保证高精度的重构, 需要满足 $M \geq cS \log^4 K$, 由于本系统中 $M = N$, 将 (22) 和 (23) 式代入此约束条件即可得到 (21) 式. 证毕.

说明 1 常数 ϵ_W 的选择是一个折中的过程. $\eta(N, \epsilon_W)$ 的大小与 ϵ_W 正相关, 增大 ϵ_W 可以保证 (21) 式更加容易满足, 但是势必会增大信号重构的误差. 但是对 ϵ_W 要求过分严格, 则系数矩阵 \mathbf{Z} 就有可能完全无法获得. 通过使用不同的 MMV 重构算法可以适当的放宽要求, 比如多信号分类 (multiple signal classification, MUSIC) 算法比同步正交匹配追踪 (simultaneous orthogonal matching pursuit, SOMP) 算法需要有更宽的重构条件, 可以容忍更小的 $\eta(N, \epsilon_W)$, 相应地, 可以选择更小的常数 ϵ_W 对信号重构进行约束.

在 ϵ_W 确定的情况下, $\eta(N, \epsilon_W)$ 的大小与 N 也呈正相关, 根据 (21) 式, 随着 N 增大, 稀疏度 S 不考虑本质窗宽的条件下减小. 同时列向量维度基本上不随 N 的线性增大而线性增大, 只是进行缓慢的波动增长. 所以 N 的线性增长对系数矩阵 \mathbf{Z} 求解造成的压力在这里可以平衡掉.

说明 2 c 是一个与稀疏度 S 和测量矩阵 \mathbf{C} 尺寸无关的常数, 但是和重构成功率密切相关. 在满足 (21) 式的条件下, c 的上限越高, 重构成功率越大. 虽然 N 的增加会降低 c 的上限, 但是根据说明 1 的分析, 通过选择合适的 ϵ_W 和 N , 仍然可以保证优异的重构精度.

根据文献 [11], Gabor 框架对信号重构, 当取 $W_E = W$ 时, 可以获得最优的重构效果. 此时, 存在 $W_g = \eta W$. \mathbf{Z} 的列向量维度为 $K = \left[\frac{T}{\eta W} + 1 \right] + 2N - 1$, 大大低于 $W_g = W$ 时的维度. 重构过程中, 设时域区间为 $[0, T']$, 其中 $T' = T + 2\eta W$, 则 \mathbf{Z} 的列向量维度可表示

为 $K \approx \frac{T'N}{\eta W}$. 同时令频域区间为 $[0, \Omega']$, 其中 $\Omega' = \Omega + B/\eta$, 则 \mathbf{Z} 的列数为 $L \approx \eta W \Omega'$. 可得到 \mathbf{Z} 的尺寸为 $K'L' \approx \frac{T'N}{\eta W} \eta W \Omega' = T' \Omega' N$, 可见指数样条曲线的平滑阶数 N 越大, \mathbf{Z} 的尺寸越大, 重构过程中的运算复杂度越高. 但是由于 (21) 式更容易满足, 其对信号的使用范围也越宽, 系统可以采集和重构脉宽更大或脉冲更多的多脉冲信号.

4.4 采样系统的鲁棒性

在本文中, 系统的冗余度为 $\mu = 1/N$, N 越大, 冗余度越高. 本文中的框架为冗余度为 $\mu = 1/N$ 的 Gabor 框架 $G(g, a, b)$, 其中 $g(t) = \beta_{\alpha}(tN/W_g)$, 由于 $a = \mu W_g$, 则 $T_{ak}g(t) = \beta_{\alpha}(tN/W_g - k)$.

根据文献 [19] 的定理 12.2.1, $\{T_{ak}g(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$ 构成一组 Riesz 基, 且满足

$$bA \|x\|^2 \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\langle x, T_{ak}g(t) \rangle|^2 \leq bB \|x\|^2. \quad (24)$$

若框架中各个原子完全正交, 即冗余度 $\mu = 1$, 假设 $\{\rho_{kl}\}_{k,l \in \mathbf{Z}}$ 为均值为 0, 方差为 1 的随机变量, ε 为每个通道中引入的误差或者噪声, 则系统重建误差的期望值为 $E(\Delta x) = \frac{KL\varepsilon^2}{b^2}$. 而对于冗余框架 $G(g, a, b)$, 其误差期望值上限为 $E'(\Delta x) \leq \frac{K'L}{B^2} \varepsilon^2$. 相比较冗余度为 $\mu = 1$ 的情况, $K' = K/\mu$, 则 $E'(\Delta x)/E(\Delta x) \leq b^2/\mu B^2$.

根据文献 [18], 框架的上 Riesz 边界可以用下式进行估计:

$$B \leq \frac{M_{\alpha}}{b \sqrt{\max_{n=1, \dots, N} M_{-|\alpha_n|}}}, \quad (25)$$

其中 $M_{\alpha} = \frac{e^{\text{Re}(\alpha)} - 1}{\text{Re}(\alpha)}$, $\text{Re}(\alpha) = \eta(N, \epsilon_W)/N$. 根据定理 2, 如果 N 太小, 测量矩阵 \mathbf{C} 会过于扁平, 导致信号根本无法重构. 这里对 $N = \{10, 11, \dots, 100\}$ 等多种情况下的 $E'(\Delta x)/E(\Delta x)$ 进行粗略估计, 描述其变化的大概趋势. 通过计算机计算, 大概选取 $\epsilon_W = 0.01$, 利用 $\eta = \sqrt{N}/1.2$ 对比值常数进行拟合, 可以得到 $E'(\Delta x)/E(\Delta x)$ 的变化趋势图. 如图 5 所示.

由图 5 可知, 当窗函数平滑阶数为 N 时, 系统冗余度为 $\mu = 1/N$, 相比冗余度为 $\mu = 1$ 时, $E'(\Delta x)/E(\Delta x)$ 大大下降. 虽然图 5 中的估计比较粗略, 但是基本从理论上体现了冗余度变化对系统鲁棒性的影响. 冗余度越高, 基于指数再生核函数

Gabor 框架中每个通道的系统噪声对信号重构的影响越小.

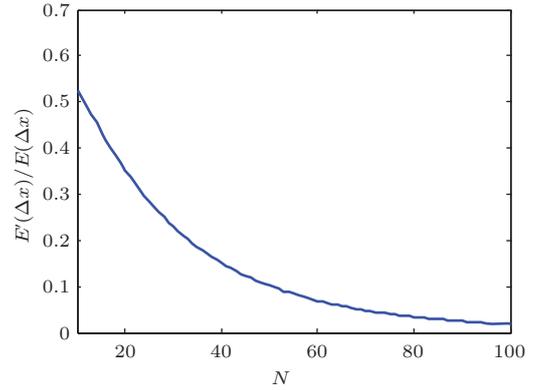


图 5 采样系统鲁棒性与冗余度的关系

5 仿真实验

本节通过数值仿真对前面分析的合理性进行验证. 仿真实验对时间长度为 $T = 20$ ms 的多脉冲信号进行了采样和重构, 脉冲从包含单脉宽度为 $W = 0.5$ ms 的单周期的正弦脉冲、高斯脉冲和三阶 B 样条脉冲构成的集合中随机选取. 实验在 500 次蒙特卡洛仿真后, 通过计算相对误差 $\|x - \hat{x}\|_2 / \|x\|_2$ 对重构效果进行评价. 在求解 \mathbf{Z} 时选用 SOMP 重构算法, 不需要对稀疏度有非常精确的预知.

实验 1 选取脉冲个数为 $N_p = 1, 3, 5$ 的三种多脉冲信号进行采样和重构. 不同于文献 [11] 中的采样系统可以任意选择冗余度 μ , 本文中冗余度由 N 决定, 为 $\mu = 1/N$. 采样通道数为 $JM = JN$, 意味着增加 N 会成倍增加通道个数. 而且, 根据前面分析, N 的增加也会使稀疏度 S' 适当增加. 所以在实验中, 重点研究指数样条窗函数的平滑阶数 N 对信号重构效果的影响. 实验中设定 $\epsilon_W \approx 0.01$, 根据 $\epsilon_{\Omega} \approx 0.005$ 的能量限制设置频域采集带宽. 图 6 反应了随着 N 的增加, 系统重构误差的变化趋势.

从图 6 可以看出随着 N 的增加重构误差呈下降趋势, 在 $N_p = 1, 3, 5$ 三种情况下, 当 $N \geq 70$, 误差可以稳定的保持在 0.6% 以下. 在对 \mathbf{Z} 利用 CS 重构算法求解时, 随着 N_p 增大, 稀疏度 S' 随之增大, \mathbf{Z} 的求解精度有略微的降低, 但是变化幅度微小. 同时, N 的增大使得测量矩阵 \mathbf{C} 更加满足 RIP 条件, 也使得 \mathbf{Z} 的求解越来越精确, 从而最终保证信号得到高精度的重构.

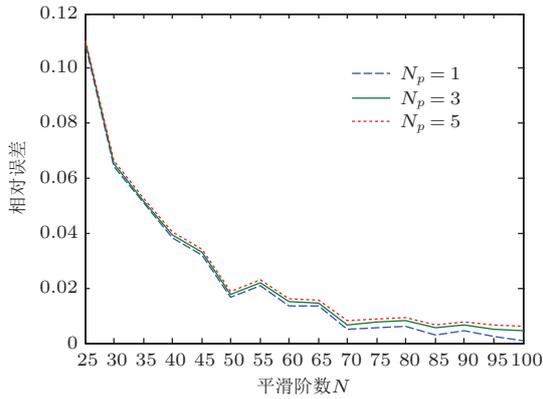


图6 (网刊彩色) 重构相对误差和平滑阶数 N 的关系

对本文中提出的系统的重构误差和文献 [11] 中的系统进行对比, 可以验证本文方法在提升了系统的可实现性之后仍然与文献 [11] 中方法具有相近的重构效果. 由于本文中的框架冗余度为 $\mu = 1/N$, 随 M 变化, 只能保证在实验中两种系统具有相同的输入信号、频带宽度和通道数. 这里仍然选择几种典型条件下的误差进行分析. 表 1 中为两种采样系统在相同输入信号、系统带宽和通道个数条件下的重构误差, Scheme I 和 Scheme II 分别表示本文中和文献 [11] 提出的采样系统. 由表 1 可知, 两种方法在相同的通道个数的条件下, 和 $\mu = 0.3$, $\mu = 0.5$ 两种冗余度时相比误差略微偏大, 和 $\mu = 0.75$ 时相比略微偏小, 重构效果基本一致, 证明了本文提出方法的有效性和可行性.

表 1 两种采样系统重构误差对比

	$M = 50$	$M = 75$	$M = 100$
Scheme I	0.0192	0.0108	0.0091
Scheme II($\mu = 0.3$)	0.0053	0.0053	0.0053
Scheme II($\mu = 0.5$)	0.0064	0.0064	0.0064
Scheme II($\mu = 0.75$)	0.0113	0.0113	0.0113

实验 2 在利用 SOMP 算法求解 Z 时将 C 中最优支撑集进行压缩, 研究其对重构误差的影响. 图 7 中横轴表示重构过程中实际选取的最优支撑集的元素个数, 纵轴表示相对误差. 离散点为实际采集和重构的误差值, 直线为对这些离散的值进行最小二乘拟合的趋势变化.

在图 7 中, SOMP 算法重构过程中的最优支撑集尺寸从 S 压缩到 $0.3S$, 随着最优支撑集尺寸的压缩, 重构误差呈上升趋势, 且在上升的过程中总体存在波动. 实验中在 $N = 50$, $N = 75$ 和 $N = 100$ 三种条件下对信号进行采集和重构, 当 N 增大时, 误差保持稳定的最优支撑集尺寸范围也增大. 整体

上, 误差随 N 增大而减小. 误差减小的原因一方面同实验 1, 另一方面是由于指数样条曲线在提高了平滑阶数 N 之后, 能量集中在较窄的支撑域内, Z 中存在的大量非零极小项可以忽略, 实际的稀疏度得到降低.

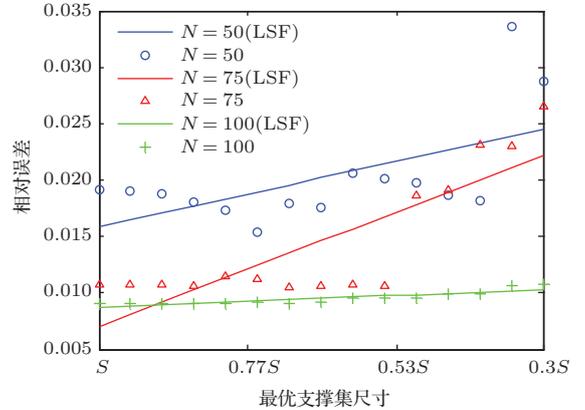


图 7 (网刊彩色) 重构误差和最优支撑集尺寸的关系

实验 3 本实验重点验证系统的鲁棒性. 在仿真过程中, 选取 $N_p = 3$. 信号采样时, 在每个通道加入信噪比 (SNR) 为 15 dB 的高斯白噪声. 系统的 Gabor 窗函数的平滑阶数 N 从 25 增加到 100, 步进值为 5. 重构信号的信噪比变化曲线如图 8 所示.

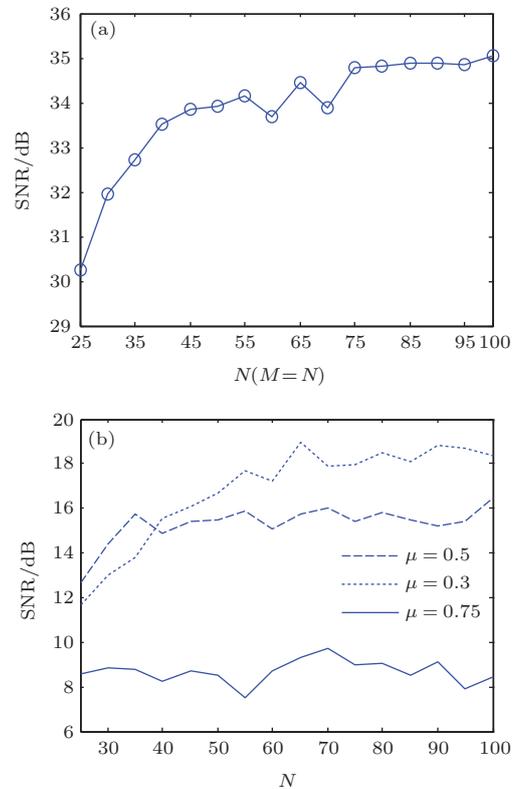


图 8 重构信噪比与窗函数平滑阶数的关系

Gabor 框架的冗余度 $\mu = 1/N$, 随窗函数平滑阶数增大而提高. 图 8(a) 的结果印证了图 5 描述的噪声变化趋势, 重构信号的信噪比随着冗余度的增加而增大. 同时, 信噪比大于 30 dB, 相比较引入系统通道中的信噪比 15 dB 的高斯噪声, 重构信号对于高斯噪声的具有很强的抑制作用. 本文在仿真中同样对文献 [11] 系统在 $\mu = 0.3$, $\mu = 0.5$ 和 $\mu = 0.75$ 时进行仿真, 如图 8(b) 所示. 图 8(a) 中, 通道数 $M = N$, 所以通过图 8(b) 还可以对比两种系统在采样通道数相同条件的下信噪比. 由图可知, 两种系统在采样通道数相同时, 本文提出的系统比文献 [11] 中的系统分别在 $\mu = 0.3$, $\mu = 0.5$ 和 $\mu = 0.75$ 三种冗余度条件下的信噪比高出 17 dB, 19 dB 和 26 dB 左右, 具有明显的抑制噪声的优势. 由此可以看出本文中系统在鲁棒性方面的优越性.

6 结 论

由于现有基于 Gabor 框架的窄脉冲信号欠 Nyquist 采样方法其窗函数序列构造复杂, 物理实现困难, 仅具有理论意义, 本文提出将指数再生窗引入 Gabor 框架并研究了信号重构方法. 首先设计了合适的指数样条函数, 确定了其各种参数设置, 从而完成对信号的加窗调制. 证明了高度冗余的窗函数通过加权叠加可以等效为一个简单的一阶巴特沃斯滤波器进行实现. 然后构建了 Gabor 系数矩阵求解所需要的测量矩阵, 并分析了其 RIP 特性. 研究了 Gabor 系数精确求解的约束条件, 分析了系统的鲁棒性. 最后, 仿真实验结果表明, 本文提出的系统可以精确重构窄脉冲信号, 并且与现有方法具有类似的重构误差. 在实际重构过程中 CS 重构算法所需的支撑集基本不影响信号的重构效果, 还能够大大降低重构运算量. 在采样过程中即使每个通道中都存在噪声或失配, 输出信号仍然具有更高的信噪比, 相比现有采样方法其鲁棒性大大提升. 本系统可应用于测试仪器、状态监测、雷达及通信领域等多种背景下的信号采样与重构.

参考文献

[1] Fang S, Wu W C, Ying K, Guo H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 048702 (in Chinese) [方晟, 吴文川, 应葵, 郭华 2013 物理学报 **62** 048702]

[2] Ning F L, He B J, Wei J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 174212 (in Chinese) [宁方立, 何碧静, 韦娟 2013 物理学报 **62** 174212]

[3] Zhang J C, Fu N, Qiao L Y, Peng X Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 030701 (in Chinese) [张京超, 付宁, 乔立岩, 彭喜元 2014 物理学报 **63** 030701]

[4] Omer Bar-Ilan, Eldar Y C 2014 *IEEE Trans. Signal Processing* **62** 1796

[5] Herman M A, Strohmer T 2009 *IEEE Trans. Signal Processing* **57** 2275

[6] Razzaque M A, Bleakley C, Dobson S 2013 *ACM Transactions on Sensor Networks* **10** 5

[7] Mishali M, Eldar Y C, Dounaevsky O 2011 *IET circuits, devices & systems* **5** 8

[8] Tropp J A, Laska J N, Duarte M F 2010 *IEEE Trans. Inf. Theory* **56** 520

[9] Michaeli T, Eldar Y C 2012 *Signal Processing, IEEE Transactions on.* **60** 1121

[10] Urigiien J A, Eldar Y C, Dragotti P L 2012 *Compressed Sensing: Theory and Applications* (Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press) p148

[11] Matusiak E 2012 *IEEE Transactions on Signal Processing* **60** 1134

[12] Kloos T, Stöckler J 2013 *Journal of Approximation Theory* **184** 209

[13] Jeffrey D B, Michael C, David H, Yirong J 2013 *IEEE Trans. Signal Processing* **62** 1694

[14] Xie Z P, Chen S C 2013 *Journal of Computer Research and Development* **49** 580 (in Chinese) [谢志鹏, 陈松灿 2013 计算机研究与发展 **49** 580]

[15] Feichtinger H G 1981 *Monatshefte für Mathematik* **92** 269

[16] Mishali M, Eldar Y C 2009 *Information Theory Workshop* 2009.IEEE

[17] Daubenchies I 1992 *Ten Lectures on Wavelets* (Society for Industrial and Applied Mathematics) p97

[18] Unser M, Blu T 2005 *IEEE Trans. Signal Processing* **53** 1425

[19] Qu C W, He Y, Liu W H, Li N 2009 *Frames Theory and Applications* (Beijing: National Defense Industry Press) p152 (in Chinese) [曲长文, 何友, 刘卫华, 李楠 2009 框架理论及应用 (北京: 国防工业出版社) 第 152 页]

[20] Tropp J A, Laska J N, Duarte M F, Romberg J K, Baraniuk R G 2010 *IEEE Trans Inf. Theory* **56** 520

[21] Xu Z Q 2012 *Scientia Sinica (Mathematica)* **42** 865 (in Chinese) [许志强中国科学: 数学 **42** 865]

[22] Haupt J, Nowak R 2010 *Proc. 44th Annual Conf. on Information Sciences and Systems Princeton, NJ, March 2010*

[23] Xu G W, Xu Z Q 2013 *arXiv:1301.0373*

[24] Rudelson M, Vershynin R 2008 *Communications on Pure and Applied Mathematics* **61** 1025

Sub-Nyquist sampling and reconstruction of short pulses based on Gabor frames with exponential reproducing windows*

Chen Peng¹⁾ Meng Chen¹⁾ Sun Lian-Feng^{2)†} Wang Cheng¹⁾ Yang Sen¹⁾

1) (*Department of Missile Engineering, Mechanical Engineering College, Shijiazhuang 050003, China*)

2) (*National Center for Nanoscience and Technology, Beijing 100190, China*)

(Received 19 September 2014; revised manuscript received 26 October 2014)

Abstract

Sampling and reconstruction of short pulses based on Gabor frames have been proved to be effective, which overcome the difficulties that finite rate of innovation (FRI) sampling is unable to reconstruct the pulse streams without the prior information of waveforms. However, the windows sequences of sampling scheme based on Gabor frames proposed at present show complicated structure and are hard to realize physically. The exponential reproducing windows are then introduced in this paper and the windows sequences can be simplified as a first-order analog Butterworth filter. At the same time, the compressed sensing (CS) measurement matrix is constructed for the recovery of Gabor coefficients. In order to satisfy the restricted isometry property (RIP) of the measurement matrices for perfect signal reconstruction, we select appropriate windows for support according to the energy accumulation property. A restricted condition is deduced for perfecting the signal reconstruction and the system robustness is analyzed. By numerical simulations the above analysis is verified. This novel scheme can be used to implement short pulses sampling and reconstruction in the field of instrumentation, condition monitoring, radar and the communication.

Keywords: Gabor frames, exponential reproducing windows, sub-Nyquist sampling, compressed sensing

PACS: 07.05.Hd, 07.05.Kf, 07.50.Qx, 84.40.Ua

DOI: 10.7498/aps.64.070701

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61372039).

† Corresponding author. E-mail: slf@nanoctr.cn