

时间非对称外力驱动分数阶布朗马达的定向输运

任芮彬 刘德浩 王传毅 罗懋康

Directed transport of fractional Brownian motor driven by a temporal asymmetry force

Ren Rui-Bin Liu De-Hao Wang Chuan-Yi Luo Mao-Kang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 64, 090505 (2015) DOI: 10.7498/aps.64.090505

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.090505>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2015/V64/I9>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非对称耦合粒子链在棘齿势中的确定性定向输运

Deterministic directional transport of asymmetrically coupled nonlinear oscillators in a ratchet potential

物理学报.2015, 64(7): 070501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070501>

乘性色噪声激励下三稳态 van der Pol-Duffing 振子随机 P-分岔

Stochastic P-bifurcations in tri-stable van der Pol-Duffing oscillator with multiplicative colored noise

物理学报.2015, 64(6): 060501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.060501>

群体迁移行为的理论与实证研究

Theoretical and empirical studies on group behaviors

物理学报.2015, 64(3): 030502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.030502>

双频驱动下分数阶过阻尼马达在空间对称势中的定向输运

Direct transport of fractional overdamped deterministic motors in spatial symmetric potentials driven by biharmonic forces

物理学报.2014, 63(23): 230503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.230503>

无标度立体 Koch 网络上随机游走的平均吸收时间

Exact solution for mean trapping time of random walk on a scale-free Koch network

物理学报.2012, 61(20): 200503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.200503>

## 时间非对称外力驱动分数阶布朗马达的定向输运\*

任芮彬 刘德浩 王传毅 罗懋康†

(四川大学数学学院, 成都 610064)

(2014年10月28日收到; 2014年12月9日收到修改稿)

本文研究了周期对称势中时间非对称外力驱动的布朗粒子输运现象, 建立了分数阶布朗马达输运模型. 其中外力是零均值的, 而分数阶阶数则刻画了客观环境的非均匀性程度. 通过将模型离散化进行数值模拟, 讨论了分数阶阶数、系统参量和外部参量与定向流之间的依赖关系. 研究表明, 即使没有倾斜势场的作用, 时间非对称外力也可以诱导系统产生定向输运; 输运速度随分数阶阶数的增大而单调递增; 当阶数固定时, 系统的输运速度会随着势垒高度、噪声强度非单调变化, 表现出广义随机共振现象. 分析指出, 分数阶郎之万方程所刻画的输运现象是在整数阶模型基础上的一个推广, 进而为输运现象提供了一个可能更为真实的模型.

**关键词:** 定向输运, 布朗马达, 分数阶郎之万方程, 广义随机共振

**PACS:** 05.60.Cd, 05.10.Gg, 45.10.Hj

**DOI:** 10.7498/aps.64.090505

## 1 引言

作为研究非线性系统分支之一的定向输运问题<sup>[1]</sup>近年来受到物理、生物等诸多领域的密切关注, 能够产生定向输运的系统在物理上称为棘齿系统<sup>[2,3]</sup>, 在生物上称为分子马达<sup>[4-6]</sup>特别地, 若系统定向输运是由随机涨落引起的, 我们称其为布朗马达<sup>[7-9]</sup>. 关于布朗马达的研究, 最早可追溯到热力学中有关第二类永动机(单源热机)问题的争论<sup>[10]</sup>, 近年来由于分子生物学、物理实验等许多方面定向输运研究的进展而成为新的热点. 这在Reimann的最新综述<sup>[1]</sup>中有较为详尽的介绍. 由于在实际系统中, 许多外来因素如负载力、涨落、外界扰动等都会使得系统出现更多复杂多样的动力学行为, 因此这类有外力驱动的定向输运现象逐渐受到学者们的重视, 并在多种系统中讨论<sup>[11-16]</sup>. 例如1996年Hu等<sup>[11]</sup>研究发现适当选择随机外力可加强周期势场中布朗粒子的扩散效率; 2000年, Mateos<sup>[14]</sup>讨论了混沌信号驱动下定向流的出现及定向流反转的情况; 2004年, Savel'ev等<sup>[16]</sup>将两

个简谐信号加以组合作用于系统时, 发现系统可以呈现出比通常许多复杂情形更为丰富的输运现象; 2010年Ai等<sup>[17]</sup>研究了外界驱动力频率对定向流的影响, 发现外力的频率对马达的运动方向有着重要影响. 2013年Li等<sup>[18]</sup>研究发现负载力不仅会减弱分子马达系统的输运能力还使肌球蛋白VI在接触位点的平均驻留时间呈指数增长.

与此同时, 近年来以分数阶微积分<sup>[19]</sup>为基础的分数阶动力学已逐步渗透到布朗马达的许多研究中. 经典的整数阶动力系统中一般采用整数阶数描述粒子的速度、加速度等物理过程, 这实际上对应的适用条件是油、水等纯黏性液体, 在生物学上又称为理想稀溶液假设<sup>[20]</sup>, 而在描述真实环境中大多数具有记忆特性的系统动力学行为时并不尽准确, 这里的记忆性<sup>[21]</sup>是指粒子当前的状态不仅与紧邻的上时刻有关, 还与前面一段时间的状态有关, 因此, 作为整数阶微积分的自然推广, 分数阶微积分因其天然的易于刻画耗散过程的长时间、长距离记忆效应被引入动力学模型的建立是合理的, 并且已有学者开始了这方面的尝试和探索相关讨论可参看文献<sup>[22, 23]</sup>.

\* 国家自然科学基金(批准号:11171238)和电子信息控制重点实验室项目(批准号:2013035)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: maokalu@scu.edu.cn

不过,目前还少有文献专门讨论外力作用下分数阶布朗马达系统的复杂输运现象. 此外,棘齿势<sup>[2]</sup>中的定向输运由于周期势本身已发生对称性破缺而产生,其机理一般较易理解. 然而对于对称的周期势系统,定向输运产生的可能性则是一个值得探讨的问题. 为此,在本文中我们选取时间平均为零且在两值之间变化的周期非对称力<sup>[24]</sup>作为外部驱动力,引入分数阶幂律核函数,将通常的阻尼速度建模为具有记忆效应的分数阶速度,考虑在对称周期势场下分数布朗马达的输运现象.

由于系统的位移和平均速度能较为直观地反应出输运过程的整体趋势,故本文将其作为考察对象,通过蒙特卡洛数值模拟<sup>[25]</sup>分析分数阶布朗马达在外力驱动下的定向输运现象,并分析分数阶阶数 $p$ 、外力非对称因子 $\delta$ 、噪声强度 $D$ 等系统参数对输运定向流的影响.

## 2 系统模型

### 2.1 分数阶过阻尼郎之万 (Langevin) 方程

经典的整数阶郎之万方程继承和发展了爱因斯坦关于布朗运动的理论研究,将大量的分子碰撞的事实简化成对系统的随机扰动力<sup>[25]</sup>,可表示如下:

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + F(x, t) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (1)$$

其中,  $m$  为粒子质量,  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  分别代表与时间有关的粒子的位移及与之对应的速度和加速度,  $m\ddot{x}$  表示惯性力,  $\gamma\dot{x}$  表示阻尼力;  $F(x, t)$  为确定性外力,通常包括粒子所受的势场力和外加驱动力;  $\xi(t)$  为零均值高斯白噪声,  $D$  为噪声强度.

在整数阶模型(1)中,阻尼系数 $\gamma$ 通常取为常数. 我们将模型(1)中阻尼项 $\gamma\dot{x}$ 换一种形式可等价记为:

$$\gamma\dot{x} = \gamma \int_0^t \delta(t - \tau)\dot{x}(\tau) d\tau.$$

这意味着布朗粒子所受阻尼力只与自身当前速度有关. 然而研究者们发现在非均匀介质中,特别是在诸如黏性介质、具有内部自由度的流体中,绝大多数的物理和生化反应过程皆表现出对历史状态的幂律记忆特性<sup>[21]</sup>,即距离当前时刻越近,记忆性越强,对系统的影响越大.

为此,有学者<sup>[23]</sup>引入如下具有幂率记忆特性的阻尼核函数模型:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\Gamma(1-p)} |t|^{-p}, \quad (0 < p < 1). \quad (2)$$

阻尼核函数的图像如图1所示,不难看出,随时间 $t$ 增大,  $\gamma(t)$ 按幂函数衰减,且 $p$ 越大,  $\gamma(t)$ 衰减的速度越快,即反应出对系统的记忆性越差,由此可知,该阻尼核函数能较好地刻画粒子在黏性介质中的阻尼力演化特性.

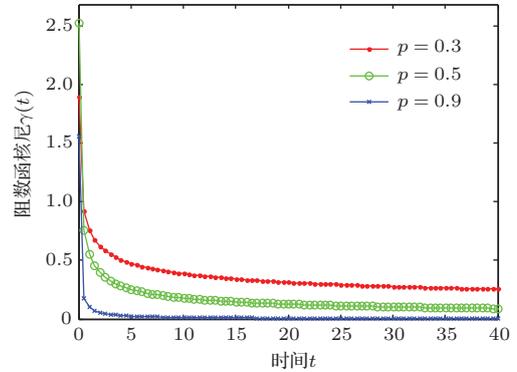


图1 (网刊彩色) 分数阶的阻尼核函数

Fig. 1. (color online) Fractional damped Kernel function.

此外,在分子尺度上标志惯性力与黏滞力比值的雷诺数(Regnold number)很小<sup>[23]</sup>,即惯性对马达的作用远小于阻尼作用,因而我们可以合理地对方程(1)中的惯性项忽略,即考虑如下具有幂律记忆性的过阻尼情形:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p}\dot{x}(\tau) d\tau \\ & = F(x, t) + \sqrt{2D}\xi(t). \end{aligned} \quad (3)$$

另一方面根据函数的分数阶Caputo型 $p$ 阶微分的定义<sup>[19]</sup>如下:

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^p x(t) & = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{-p}\dot{x}(\tau) d\tau, \\ & (0 < p < 1), \end{aligned}$$

因此(3)式可写作

$${}_0^C D_t^p x(t) = F(x, t) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (4)$$

(4)式形式上正好构成了一个分数阶Langevin方程,我们称其为分数阶布朗马达模型,该模型考虑了非均匀介质的幂率记忆特性. 特别地,当分数阶阶数 $p = 1$ 时,方程(4)退化为经典的Langevin方程<sup>[10]</sup>. 但值得注意的是,由于此模型已将阻尼核函数建模为幂律记忆核函数,根据涨落耗散定理,相应的内噪声也应该建模为幂律衰减噪声,但为便于符号上的统一,本文形式上仍采用 $\xi(t)$ 表示.

## 2.2 时间对称破缺外力作用下分数阶布朗马达的定向输运

产生定向输运需要空间上的定向外场(偏置或平均效果上非零的定向外力). 这方面的研究已经进行了很长时间并且相对成熟, 这里我们更感兴趣的是作用于系统上的外力总的效果为零(甚至没有外力)时产生定向输运的可能性. 为此, 本文选取如下  $F(t)$  [24](如图 2) 作为外部驱动力:

$$F(t) = \begin{cases} F_+, & t \in [nT_1, nT_1 + t_0), \\ -F_-, & t \in [nT_1 + t_0, (n+1)T_1), \\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $T_1$  为外力的周期,  $F_+$ ,  $F_-$  代表外力幅度, 取值为常数且满足:  $F_- = \frac{1-\delta}{1+\delta}F_+$ ,  $t_0 = \frac{1-\delta}{2}T_1$ ,  $\delta \in (0, 1)$  为度量  $F(t)$  非对称性的一个指标, 例如若我们固定  $F_+$  的取值, 则  $\delta$  越大(小于 1),  $F_-$  的值越小, 外力的正、负方向的幅度相差越大, 此时外力时间非对称性越强, 特别地,  $\delta = 0$  时  $F(t)$  退化为对称外力. 本文以下均统称  $\delta$  为非对称因子.

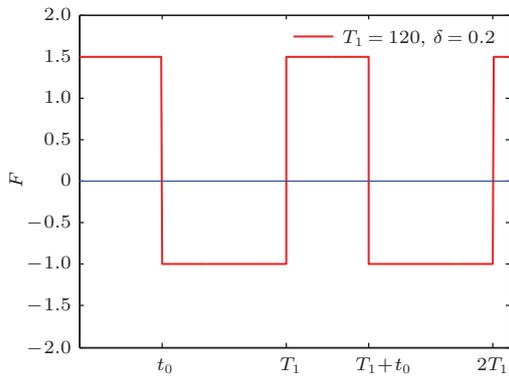


图 2 (网刊彩色) 外力  $F(t)$  的示意图

Fig. 2. (color online) Diagram of the external force  $F(t)$ .

由 (5) 式及图 2 容易得到,  $F(t)$  是周期的,

$$F(t + T_1) = F(t).$$

满足时间非对称性:

$$F(t) \neq F(-t), \quad F(t \pm T_1/2) \neq -F(t).$$

且一个周期内时间平均作用力为零, 即

$$\int_t^{t+T_1} F(t') dt' = 0.$$

我们称这样的力为时间非对称的确定性周期力.

对于典型的非平衡耗散系统, 作为内部条件的势函数的存在是不可或缺的, 这里在不影响问题本质的情况下, 我们选取余弦函数  $V(x) = d \sin(x)$  作为对称周期势场函数(如图 3), 其中  $d$  为势垒高度, 则势场函数的导数数值上即为粒子所受的势场力:

$$f(x) \triangleq -\frac{dV(x)}{dx} = -d \sin(x),$$

负号代表粒子运动方向.

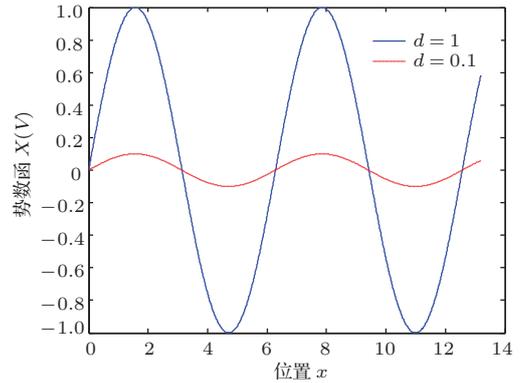


图 3 (网刊彩色) 不同势垒高度下对称周期势函数示意图

Fig. 3. (color online) Diagram of the symmetric and periodic potential function for different barrier height.

此时, 方程 (1) 中的系统所受外力  $F(x, t) = -d \sin(x) + F(t)$ , 即势场力与外部周期力之和. 于是, 我们得到在对称周期势场下, 周期性时间非对称外力驱动的分数量过阻尼布朗马达输运模型为

$${}^C_0 D_t^p x(t) = -d \sin x + F(t) + \sqrt{2D} \xi(t), \quad (6)$$

其中,

$$F(t) = \begin{cases} F_+, & t \in [nT_1 + t_0, (n+1)T_1, \\ -F_-, & t \in [nT_1, nT_1 + t_0), n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

## 3 数值模拟与分析

一般地, 模型 (6) 属于分数阶随机微分方程, 并且是非马尔科夫的, 因此要寻求其解析解, 或者将其转化为 Fokker-Plank 方程来求解都是非常困难的. 另一方面, 分数阶随机微分方程的数值模拟 [25] 已有效用于实际问题的解决, 故我们将模型转化为离散模型, 利用分数阶差分法 [19] 数值模拟模型 (4), 其数值计算公式如下:

$$x(t_j) = -\sum_{i=1}^{j-1} (-1)^i \binom{p}{i} x(t_{j-1}) + h^p \left[ -d \sin(x_{j-1}) + F(t_j) + \sqrt{2D} \xi(t_{j-1}) \right], \quad (7)$$

其中,  $h$  为采样步长,  $t_j = (j - 1)h, j = 1, 2, \dots$ ,  
 $n; \binom{p}{i} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-i+1)i!}, i = 1, 2, \dots, j-1.$

由于布朗马达本质上是将能量转化为机械能, 从而粒子表现为定向运动, 为了很好的研究外力作用下粒子的输运特性, 我们考虑系统的平均流, 主要方法有两种, 一种是长时平均, 一种是系综平均. 本文采用第二种方法, 其定义如下:

$$J = \left\langle \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \right\rangle,$$

这里,  $t_0, t$  分别代表输运过程的起止时间.  $\langle \cdot \rangle$  代表多次计算求平均值. 因为每次数值模拟输运行为总时长  $T$  有限, 当  $T$  取得足够大使得布朗马达达到稳定的输运状态时, 我们用

$$J \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x(T) - x(t_0)}{T - t_0}$$

来模拟平均流速. 其中,  $N$  为仿真次数,  $T$  为仿真总时间. 若无特别说明, 本文仿真中参数取值如下:  $N = 100, T = 700, d = 1.3, \delta = 1/2, F_+ = 1.5, T_1 = 120, D = 0.1.$  为方便计算, 所有物理量已作无量纲化处理.

我们感兴趣的是当系统参数适当匹配时出现宏观上可观测的非零定向流的可能性. 图 4(a) 显示了不同势垒高度下布朗马达的长时平均运动曲线, 可以发现周期的非对称驱动外力使得粒子始终处于非平衡状态, 在周期空间势场的协作与竞争下模型发生对称破缺, 从而使得布朗马达越过势垒, 形成宏观上可观测的稳定非零流. 特别地, 势垒高度  $d = 0$  时, 定向流  $J = 0$ , 即仅有时间非对称的外

力不足以引起模型定向流的出现; 当势垒高度较高即  $d \gg 1$  时, 布朗马达无法越过势垒而被钉扎, 此时系统定向流仍为零,  $J = 0$ ; 我们可以发现流和势垒高度并不满足单调关系, 例如, 当  $d$  取 0.9 和 1.3 时的定向流比  $d$  取 0.5 和 1.5 时大, 这暗示着两者之间具有复杂的关系. 图 4(b) 给出了模型定向流对势垒高度的依赖性, 这里外力非对称因子分别等于  $1/5, 1/2.$  当势垒太低时布朗马达双向跨越势垒, 而势垒过高时布朗马达几乎无法从任何方向越过势垒, 由于噪声的无偏性和外力的零均值性, 这两种情况下都无法产生稳定的定向流; 而对于适中的势垒高度, 势垒对马达的适当阻碍作用使得其较容易从非对称外力较强的方向越过势垒, 从而使得时间非对称外力两个方向上对布朗马达驱动的差异表现出来, 从而形成定向的粒子流.

既然本模型中时间非对称外力的影响不可忽视甚至起着决定性的作用, 接下来我们具体分析其对模型定向流的影响, 结果如图 5 所示, 这里分数阶数分别为 0.67, 0.88, 0.95, 势垒高度  $d = 1.0.$  易见在对称周期势场下, 当  $\delta = 0$ , 即外力时间对称时, 模型始终处于对称状态, 布朗马达受到实际有效力为零, 从而无法越过势垒产生定可观测的稳定非零流, 而当  $\delta \rightarrow 1$  时,  $t_0 \rightarrow 0$ , 这意味着正向的力虽然作用于系统, 但时间太短同样不能使得布朗马达越过势垒, 在无偏噪声的作用下模型的定向流将减弱; 除去上述两种极端情况, 我们发现系统正负两个方向其实都有定向流的产生, 但宏观上整体是单向的, 且与外力时间破缺的方向一致. 因此, 模型的定向流对外力非对称因子的依赖仍表现为单峰函数.

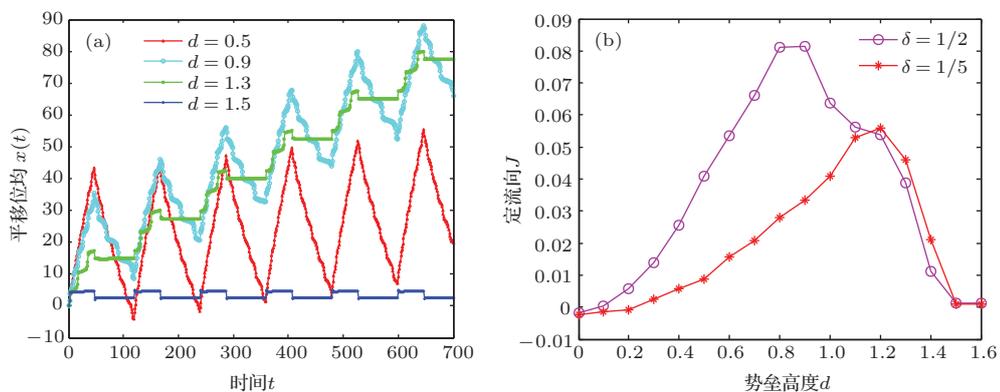


图 4 (网刊彩色) 系统定向输运与势垒高度的关系 (a) 不同势垒高度下  $d$  平均位移  $x(t)$  随时演化过程; (b) 不同非对称外力因子  $\delta$  下布朗马达定向流  $J$  与势垒高度  $d$  的关系

Fig. 4. (color online) The relationship between the systems' directed transport and the barrier height on (a) the time evolution curve of the mean displacement for different barrier height  $d$  and (b) the mean velocity  $J$  as a function of the barrier height  $d$  for different asymmetric factor  $\delta$  of the external force.

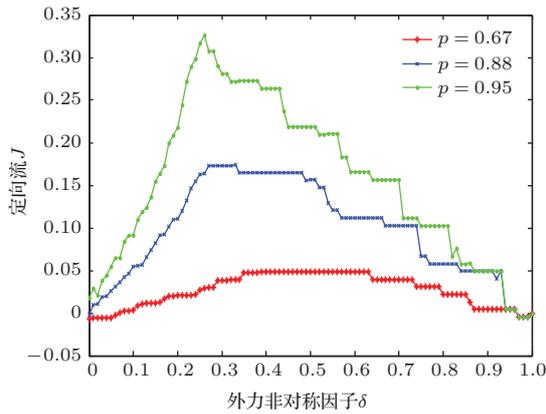


图5 (网刊彩色) 不同分数阶数下定向流与外力非对称因子的关系

Fig. 5. (color online) The mean velocity as a function of the asymmetric factor of the external force for different fractional orders.

图6显示了模型定向流对噪声强度  $D$  的依赖性, 此时, 分数阶数分别为 0.71, 0.88, 1,  $d = 1.5$ . 易见, 较小或较大的噪声强度都不利于粒子的定向运动, 这是因为在对称周期势下, 较小的噪声对布朗马达的驱动在两个方向上的差异难以使得马达从较弱的驱动的方向越过势垒产生非零流, 而较大的噪声使得粒子的运动更趋于无规律的扩散, 从而使得模型的定向流减弱; 而在适当的噪声强度调制下, 噪声对于模型定向流的出现起着积极的作用, 系统定向流反映了粒子所受势场力与时间对称破缺外力协同竞争的结果. 因此, 模型的定向流对噪声强度的依赖表现为单峰函数.

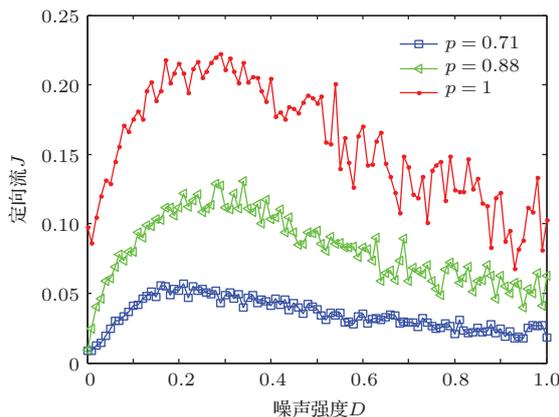


图6 (网刊彩色) 不同分数阶数下定向流与噪声强度的关系

Fig. 6. (color online) The mean velocity as a function of the noise intensity for different fractional orders.

最后我们考虑模型的定向流与分数阶数的关系, 这里的势垒高度分别为 0.5, 0.9, 1.25, 1.5, 结果如图(7)所示. 由图可知, 各势垒高度情形下, 定

向流  $J$  对分数阶数  $p$  的依赖性为单调函数, 这从数值模拟角度证实分数阶  $p$  可以很好地刻画非均匀介质的幂率记忆性, 即随着分数阶数的增大, 马达所处环境更接近理想的均匀介质, 系统记忆性减弱, 所受阻尼作用随之减小, 从而定向流随着分数阶数的增大而单调增大.

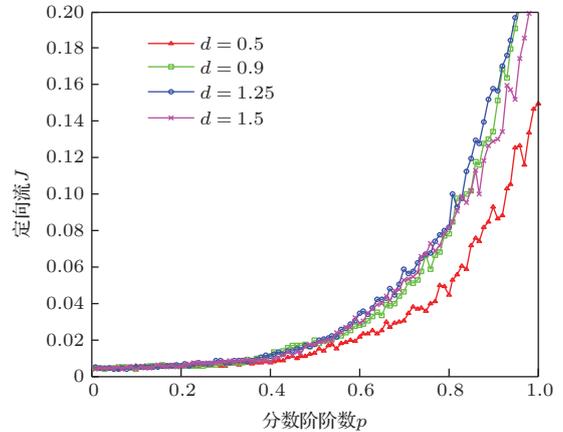


图7 (网刊彩色) 不同势垒高度下定向流与分数阶数的关系

Fig. 7. (color online) The mean velocity as a function of the fractional order for different barrier height.

数值模拟结果表明: 对称周期势下, 时间对称破缺的外力作用于过阻尼系统, 即使没有噪声, 模型在参数的适当匹配下仍能出现定向流; 其次, 除了分数阶数外, 其他参数对模型定向流的影响都表现为非单调关系, 即出现了广义随机共振现象; 最后, 即使在缺乏空间非对称、模型所受外力总效果为零的情形下, 模型仍然可以出现丰富多样的输运现象.

## 4 结 论

在本文中, 基于实际中的非均匀介质, 我们研究了处于其中的布朗粒子的定向输运行为, 建立了在空间周期对称势场与零均值时间非对称外力共同作用下的分数阶布朗马达输运模型. 理论分析结合数值模拟显示, 合适的噪声能加强定向流, 即出现了噪声整流现象. 模型的定向流对各参数的依赖性表明即使在空间对称周期势下, 非对称周期外力可以导致定向流的产生. 同时, 定向流对分数阶数的依赖表现为单调函数, 这表明当阶数越小, 对应模型的记忆性越强, 因而阻尼力更大而难以定向运动, 反之, 阶数越大, 越接近理想的均匀介质, 记忆性越弱, 阻尼越小从而定向运动越强. 这些结论

与实际的物理实验现象是相符的. 因此, 对称周期势下时间非对称外力作用的分数阶布朗马达模型丰富了布朗粒子输运行为, 同时为也为布朗粒子的输运又提供了一个可能的物理模型.

### 参考文献

- [1] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57
- [2] Charles R D, Werner H, Jason R 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 19
- [3] Astumian R, Bier M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1766
- [4] Magnasco M 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1477
- [5] Li F Z, Jiang L C 2010 *Chin. Phys. B* **19** 02503
- [6] Bouzat S 2014 *Phys. Rev. E* **89** 062707
- [7] Kula J, Czernik T, Luczka J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1377
- [8] Astumian R D 1997 *Science* **277** 917
- [9] Fendrik A J, Romanelli L 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041149
- [10] Zheng Z G 2004 *Spatiotemporal Dynamics and Collective Behaviors in Coupled Nonlinear Systems* (Beijing: Higher Education Press) pp279–286 (in Chinese) [郑志刚 2004 耦合非线性系统的时空动力学与合作行为 (北京: 高等教育出版社) 第 279—286 页]
- [11] Hu G, Daffertshofer A, Haken H 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 26
- [12] Vale R D 2003 *Cell* **112** 467
- [13] De Waele A, de Bruyn Ouboter R 1969 *Physica A* **41** 225
- [14] Mateos J L 2000 *Phys. Rev. Lett.* **20** 364
- [15] Xie T T, Zhang L, Wang F, Luo M K 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 230503 (in Chinese) [谢天婷, 张路, 王飞, 罗懋康 2014 物理学报 **63** 230503]
- [16] Savel'ev S, Marchesoni F, Hannggi P, Nori F 2004 *Euro. Phys. Lett.* **67** 179
- [17] Ai B Q, He Y F, Zhong W R 2011 *Phys. Rev. E* **83** 051106
- [18] Li C P, Han Y R, Zhan Y, Hu J J, Zhang L G, Qu J 2013 *Acta. Phys. Sin.* **62** 230051 (in Chinese) [李晨璞, 韩英荣, 展永, 胡金江, 张礼刚, 曲蛟 2013 物理学报 **62** 230051]
- [19] Podlubny I 1998 *Fractional Differential Equations* (San Diego: Academic Press) pp78–81
- [20] Ellis R J, Minton A P 2003 *Nature* **425** 27
- [21] Bhat D, Goalakrishnan M 2013 *Phys. Rev. E* **88** 042702
- [22] Yang J H, Liu X B 2011 *Phys. Scr.* **83** 065008
- [23] Bai W S M, Peng H, Tu Z, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210501 (in Chinese) [白文斯密, 彭浩, 屠浙, 马洪 2012 物理学报 **61** 210501]
- [24] Zheng Z G, Li X W 2001 *Commun. Theor. Phys.* **36** 151
- [25] Bao J D 2009 *Stochastic Simulation Method of Classic and Quantum Dissipative System* (Beijing: Science Press) p13 (in Chinese) [包景东 2009 经典和量子耗散系统的随机模拟方法 (北京: 科学出版社) 第 13 页]

# Directed transport of fractional Brownian motor driven by a temporal asymmetry force<sup>\*</sup>

Ren Rui-Bin Liu De-Hao Wang Chuan-Yi Luo Mao-Kang<sup>†</sup>

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China)

( Received 28 October 2014; revised manuscript received 9 December 2014 )

## Abstract

The directed transport of a Brownian particle in a spatially periodic symmetric field under a temporal asymmetric force is studied. Based on the Caputo's fractional derivatives theory, we establish a differential equation for an overdamped fractional Brownian motor as the system's mathematic model, where the external force is zero-mean and the fractional order is used to describe the inhomogeneity of the real environment. Using the fractional differential algorithm, we analyze the relationships between transport velocity and model parameters. It is worth mentioning that the impact of fractional order is discussed in detail. According to the research we find that a temporal asymmetric force can induce a net current without the application of a ratchet potential, even a noise. We also find that the velocity of the current increases monotonically with the increase in fractional order. Moreover with certain fractional orders, a generalized resonance phenomenon is revealed since the velocity of the current varies non-monotonically with the system parameters, such as the height of the potential barrier and the noise strength etc. Research shows that the fractional system is a generalization of the traditional dynamic systems, which could probably give a more reasonable explanation of the directed transport as a consequence.

**Keywords:** directed transport, Brownian motor, fractional Langevin equation, generalized stochastic resonance

**PACS:** 05.60.Cd, 05.10.Gg, 45.10.Hj

**DOI:** [10.7498/aps.64.090505](https://doi.org/10.7498/aps.64.090505)

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238), and the Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory Program (Grant No. 2013035).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [maokalu@scu.edu.cn](mailto:maokalu@scu.edu.cn)