

次 Bjerknes 力作用下气泡的体积振动和散射声场

马艳 林书玉 鲜晓军

Volume pulsation and scattering of bubbles under the second Bjerknes force

Ma Yan Lin Shu-Yu Xian Xiao-Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 014301 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.014301

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.014301>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I1>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

管间界面特性对周向超声导波传播特性的影响

[Influence of the interfacial properties on guided circumferential wave propagation in the circular tube structure](#)

物理学报.2015, 64(22): 224301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.224301>

声脉冲法空间电荷测量系统的研究

[Measurement of space charges in air based on sound pulse method](#)

物理学报.2015, 64(16): 164301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.164301>

一种含横向圆柱形空腔的声学覆盖层的去耦机理分析

[Analysis of decoupling mechanism of an acoustic coating layer with horizontal cylindrical cavities](#)

物理学报.2015, 64(15): 154301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154301>

局域共振型声学超材料机理探讨

[Mechanism for local resonant acoustic metamaterial](#)

物理学报.2015, 64(15): 154302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.154302>

研究激光激发的声表面波与材料近表面缺陷的振荡效应

[Research on the oscillation effect of near-surface metal defect based on laser-generated acoustic surface wave](#)

物理学报.2015, 64(13): 134302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.134302>

次 Bjerknes 力作用下气泡的体积振动和散射声场*

马艳¹⁾²⁾ 林书玉^{1)†} 鲜晓军¹⁾

1) (陕西师范大学, 陕西省超声学重点实验室, 西安 710062)

2) (宁夏师范学院物理与信息技术学院, 固原 756000)

(2015年7月1日收到; 2015年9月1日收到修改稿)

利用 Lagrange 方程得到了次 Bjerknes 力作用下气泡的体积振动方程, 并探讨了次 Bjerknes 力作用下不同参数对气泡体积振动振幅和振动初相位的影响, 研究了振动初相位差为 π 和 0 的气泡对在液体中形成的散射声场特征. 结果表明: 次 Bjerknes 作用下, 相邻气泡半径、气泡间距、多方指数均能影响气泡的体积振动振幅, 气泡对的均衡半径、气泡间距和驱动频率则对气泡振动初相位产生明显影响; 相距很近、相位相差为 π 的两个气泡的散射声压与气泡体积振动振幅、气泡间距、驱动频率和振动初相位有关, 随声场距离成反比减小, 与声场位置有关, 其平均散射声功率是单个孤立气泡的 $\frac{1}{6}(kd_{12})^2$; 半径相同、相距很近、相位相同的两个气泡的散射声压与气泡振动初相位、体积振动振幅、气泡间距、驱动频率有关, 随声场距离成反比减小, 其平均散射声功率是单个孤立气泡的 4 倍.

关键词: 次 Bjerknes 力, 体积振动振幅, 振动初相位, 散射

PACS: 43.20.+g, 43.35.+d, 47.55.dd

DOI: 10.7498/aps.65.014301

1 引言

液体中的气泡会对声波产生散射, 例如海洋中气泡云、超声造影剂等. Carstensen 和 Foldy^[1] 的实验表明: 含气泡液体比起不含气泡的液体具有更高的声阻尼特性, 正如那些广泛散布在液体中的气泡, 体积非常小以至于不可见, 也能拥有一个相当的声场效应; 当大量的小气泡出现时, 液体将接近于不透明的声场, 液体中的小杂质, 例如悬浮粒子, 与由气泡引起的衰减相比可以忽略不计. 因此, 在水下声场中, 气泡是一个相当重要的因素. 关于水中气泡对声波的耗散、散射, 已有许多学者进行了研究^[2-19]. Flynn^[9] 研究了热传导、声散射对气泡振动的影响; 钱祖文^[10] 研究了气泡群的多次散射问题; Ye^[15] 研究了造影气泡的散射和对声波的衰减, 他发现当频率高于共振频率时, 通过造影气泡的散射能够使液体高度各向异性; Kapodistrias 和 Dahl^[18] 用实验方法研究了中心频率为 120 kHz 的

5 个循环脉冲下未饱和水中溶解的单气泡对声场的散射, 实验结果和理论结果符合得较好; Church^[19] 利用等效媒质法研究了气泡参数变化对其散射特性的影响. 这些研究的前提条件是: 忽略气泡之间的相互作用, 认为气泡之间无相互作用力. 但是研究表明: 声波在含气泡液体的传播中, 必须考虑气泡间的相互作用力, 特别是液体中含气量较高时^[20-22]. 综上所述, 一定条件下气泡之间的相互作用力将对声场产生重要影响. 由于声场作用使得相邻气泡之间出现的相互作用力也称为次 Bjerknes 力, 是由于驱动声场作用于气泡引起气泡振动, 而使得相邻气泡之间产生的相互吸引或排斥^[21]. 次 Bjerknes 力的作用下, 会使液体中的气泡产生不同于孤立气泡的声学现象^[20-24]. 本文研究了次 Bjerknes 力作用下的气泡的体积振动, 讨论了次 Bjerknes 力对气泡体积振动振幅和振动相位的影响, 并研究了次 Bjerknes 力作用下两个气泡在液体中的散射声场、平均散射声功率, 并将结果

* 国家自然科学基金 (批准号: 11174192, 11374200, 11474192) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sylin@snnu.edu.cn

与单个气泡的散射声场做了比较. 结果表明, 次 Bjerknes 力能够对气泡的散射声场产生较大影响. 本文结果为液体中存在相互作用的气泡群的振动和对声场的散射提供了理论基础.

2 次 Bjerknes 力作用下气泡体积振动方程

1959 年, Devin^[2] 利用 Lagrange 方程推导了孤立气泡在绝热过程中的体积振动方程:

$$\rho/(4\pi R_0)\ddot{v} + b\dot{v} + \frac{\gamma P_0}{V_0}v = -P_A e^{j\omega t}, \quad (1)$$

式中, v 为气泡体积改变量; R_0 为气泡均衡半径; P_A 为驱动声场声压幅值; ρ 为液体密度; ω 为驱动声场的角频率; V_0 为气泡的初始体积; γ 为气泡内气体的等压热容量与等容热容量之比; b 为耗散系数,

$$b = \frac{\delta\sqrt{3\gamma\rho P_0}}{4\pi R_0^2}, \quad (2)$$

δ 为阻尼常数. (1) 式是很多单泡理论的基础公式, 很多声学工作者在 (1) 式的理论上开展了空化理论的研究, 得到了很多重要结论^[10,20]. 为了研究次 Bjerknes 力对气泡体积振动的影响, 考虑两个相距 d_{12} 的气泡 1, 2, 其均衡半径分别为 R_{10} 和 R_{20} , 由于每个气泡都可以看作一个振动系统, 如果体积改变量较小, 可以用一个二次线性微分方程来描述气泡系统的振动. 假设液体为不可压缩液体, 气泡的 Lagrange 方程可以表示为如下形式:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right) - \frac{\partial L}{\partial v} + b\dot{v} = -[P_A e^{j\omega(t-R_0/c)} + P_{\text{rad}}], \quad (3)$$

(3) 式中 L 为含气泡液体系统的拉格朗日函数, 定义为含气泡液体系统的势能减去系统的动能, P_{rad} 为相邻气泡振动所产生的声压, c 为液体中的声速, \dot{v} 代表 v 对时间做一阶微分. 由于气泡 i 做体积振动, 引起液体中任一距气泡 i 中心 r 处的液体质点的振动速率为^[22]

$$u_i = \frac{\dot{v}_i}{4\pi r^2}; \quad (4)$$

气泡 i 做体积振动在液体中产生的压强^[9] 为

$$P_{\text{rad}} = \frac{\rho}{4\pi r}\ddot{v}. \quad (5)$$

如果液体中只有两个气泡, 且不考虑液体的表面张力, 整个含气泡液体系统的势能等于压缩两个气泡

所做的功,

$$E_p = -\int_0^{v_1} (P_1 - P_0)dv_1 - \int_0^{v_2} (P_2 - P_0)dv_2, \quad (6)$$

式中, E_p 为系统的势能; v_1, v_2 分别为气泡 1, 2 的体积改变量; P_1, P_2 分别为气泡 1, 2 表面的瞬时压强^[2]. 如果考虑液体的表面张力, 沿用 Devin 的推导方法, 可得系统的势能为

$$E_p = \frac{nP_0}{2V_{10}}\left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_{10}} - \frac{2\sigma}{3nP_0 R_{10}}\right)v_1^2 + \frac{nP_0}{2V_{20}}\left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_{20}} - \frac{2\sigma}{3nP_0 R_{20}}\right)v_2^2. \quad (7)$$

当液体中只有两个气泡时, 液体中任一点 (图 1) 的振速可表示为

$$u = u_1 + u_2 = \frac{\dot{v}_1}{4\pi r_1^2} + \frac{\dot{v}_2}{4\pi r_2^2}. \quad (8)$$

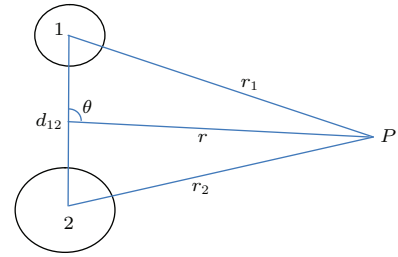


图 1 两个做体积振动的气泡在声场中的相对位置
Fig. 1. Relative positions of interacting bubbles.

系统的动能可表示为

$$E_k = \frac{1}{2}\rho \int u^2 4\pi r_i^2 dr_i. \quad (9)$$

将 (7), (9) 式分别代入 (3) 式并做相应的微分, 可分别得气泡 1, 2 的体积振动方程:

$$\left(\frac{\rho}{4\pi R_{10}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{10}}{R_{20}}\right)\ddot{v}_1 + b\dot{v}_1 + \frac{nP_0}{V_{10}}\left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_{10}} - \frac{2\sigma}{3nP_0 R_{10}}\right)v_1 = -P_A e^{j\omega(t-R_{10}/c)} - \frac{\rho}{4\pi d_{12}}\ddot{v}_2, \quad (10)$$

$$\left(\frac{\rho}{4\pi R_{20}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{20}}{R_{10}}\right)\ddot{v}_2 + b\dot{v}_2 + \frac{nP_0}{V_{20}}\left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_{20}} - \frac{2\sigma}{3nP_0 R_{20}}\right)v_2 = -P_A e^{j\omega(t-R_{20}/c)} - \frac{\rho}{4\pi d_{12}}\ddot{v}_1. \quad (11)$$

与无相互作用的单泡体积方程 (1) 相比, 有相互作用的单泡方程多出一个修正项, 对于气泡 1 来说, 修正项为 $\frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{20}}{R_{10}}$, 也就是说次 Bjerknes 力的作用体现在这个修正因子上. 当两个气泡之间距离过大时, 次 Bjerknes 力可忽略不计, (10), (11) 式

便恢复到 Devin 的单泡体积振动方程(1). 微分方程(10)和(11)的解为

$$v_1 = \frac{P'_{A1}}{\sqrt{\omega^2 b^2 + \left(\frac{\rho}{4\pi R_{10}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{20}}{R_{10}}\right)^2 (\omega_{10}^2 - \omega^2)^2}} \times e^{j[\omega(t-R_{10}/c) - \varphi_1]}, \quad (12)$$

$$v_2 = \frac{P'_{A2}}{\sqrt{\omega^2 b^2 + \left(\frac{\rho}{4\pi R_{20}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{10}}{R_{20}}\right)^2 (\omega_{20}^2 - \omega^2)^2}} \times e^{j[\omega(t-R_{20}/c) - \varphi_2]}, \quad (13)$$

式中, φ_1 和 φ_2 为气泡 1, 2 的振动初相位; P'_{A1} 和 P'_{A2} 分别为气泡 1, 2 的合成声压振幅; ω_{10} 和 ω_{20} 分别为气泡 1, 2 的共振圆频率. 令 v'_1, v'_2 为气泡 1, 2 的体积振动振幅, 可得

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{P'_{A1}}{\sqrt{\omega^2 b^2 + \left(\frac{\rho}{4\pi R_{10}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{20}}{R_{10}}\right)^2 (\omega_{10}^2 - \omega^2)^2}}, \\ \text{tg } \varphi_1 &= \frac{\omega b}{\left(\frac{\rho}{4\pi R_{10}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{20}}{R_{10}}\right) (\omega_{10}^2 - \omega^2)}, \\ v'_2 &= \frac{P'_{A2}}{\sqrt{\omega^2 b^2 + \left(\frac{\rho}{4\pi R_{20}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{10}}{R_{20}}\right)^2 (\omega_{20}^2 - \omega^2)^2}}, \\ \text{tg } \varphi_2 &= \frac{\omega b}{\left(\frac{\rho}{4\pi R_{20}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{10}}{R_{20}}\right) (\omega_{20}^2 - \omega^2)}, \\ \omega_{10}^2 &= \frac{nP_0}{V_{10}} \left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_{10}} - \frac{2\sigma}{3nP_0 R_{10}}\right) \frac{\rho}{4\pi R_{10}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{20}}{R_{10}}, \\ \omega_{20}^2 &= \frac{nP_0}{V_{20}} \left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_{20}} - \frac{2\sigma}{3nP_0 R_{20}}\right) \frac{\rho}{4\pi R_{20}} + \frac{\rho}{8\pi d_{12}} \frac{R_{10}}{R_{20}}. \end{aligned} \quad (14)$$

3 次 Bjerknes 力对气泡体积振动的影响

3.1 次 Bjerknes 力对气泡体积振动振幅的影响

为了研究声场下次 Bjerknes 力对大气泡的体积振动的影响, 对(12)式进行数值模拟. 模拟条件为: 气泡 1 的均衡半径 $R_{10} = 50 \mu\text{m}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\delta = 0.1$, $\sigma = 0.0725 \text{ N/m}$, $n = 1.33$, $P_0 = 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$, 驱动声场压强振幅 $P_A = 1.5 \times 10^5 \text{ Pa}$ (图 2—图 11 的模拟条件均采

用以上参数). 从图 2 和图 3 可以看出, 在气泡 1 均衡半径一定的情况下, 两个气泡之间的距离、气泡 2 的均衡半径的变化均能引起气泡 1 体积振动振幅的改变, 原因是上述两者的改变能够引起次 Bjerknes 力的改变, 而次 Bjerknes 力的改变会引起气泡体积的改变. 在上述模拟条件下, 气泡间距越小, 气泡 2 半径越大, 气泡 1 体积振动振幅越大.

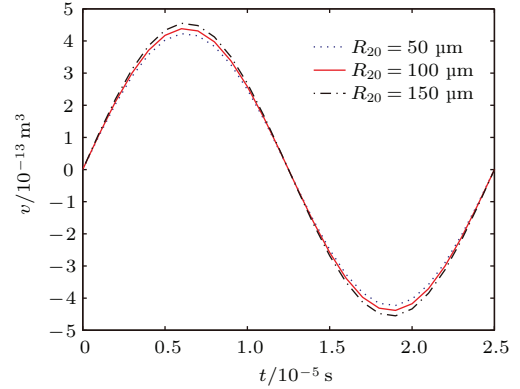


图 2 (网刊彩色) 气泡 1 体积改变量和 R_{20} 的关系
Fig. 2. (color online) Relationship between volume change of bubble 1 and R_{20} .

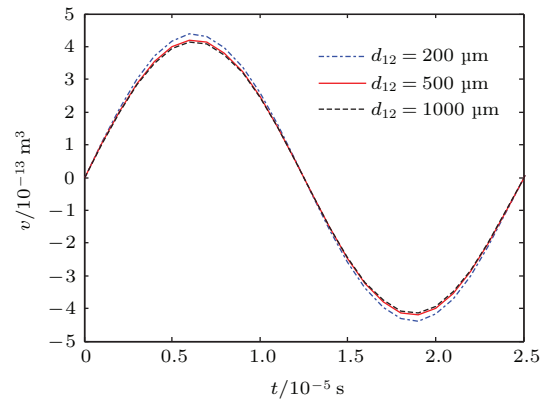


图 3 (网刊彩色) 气泡 1 体积改变量和 d_{12} 的关系
Fig. 3. (color online) Relationship between volume change of bubble 1 and d_{12} .

图 4 是 $R_{10} = 50 \mu\text{m}$, $R_{20} = 100 \mu\text{m}$, $d_{12} = 200 \mu\text{m}$ 条件下, 不同 n 值对气泡 1 体积改变量的影响. n 值不同, 代表不同的热力学过程. 从图 4 可以看出, 不同的热力学过程对气泡体积改变量会产生较大影响, $n = 1$ 代表等温过程, $n = 1.4$ 代表绝热过程, $n = 1.8$ 代表既非等温又非绝热的一般过程. 在不同的热力学过程中, 能量转换是不一样的, 所以不同的热力学过程使得最终气泡体积振动的振幅存在较大差异.

图 5 是 $R_{10} = 50 \mu\text{m}$, $R_{20} = 100 \mu\text{m}$, $d_{12} = 200 \mu\text{m}$ 条件下, 气泡 1 的体积改变量随驱动频率的

变化关系. 可以看出, 不同的驱动频率会影响单个气泡振动的体积振动振幅, 驱动频率越大, 同样条件下气泡间的次Bjerknes力就越大, 相应的气泡1的体积振动振幅越大.

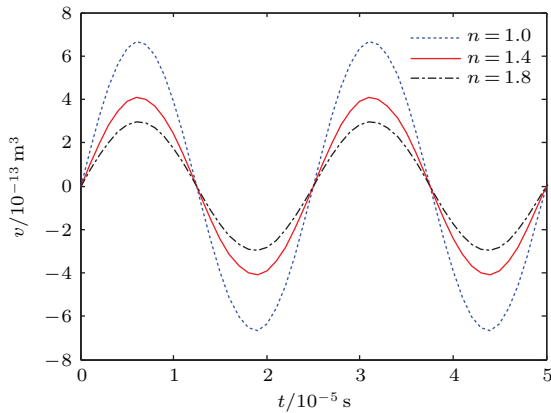


图4 (网刊彩色) 气泡1体积改变量和n的关系
Fig. 4. (color online) Relationship between volume change of bubble 1 and n.

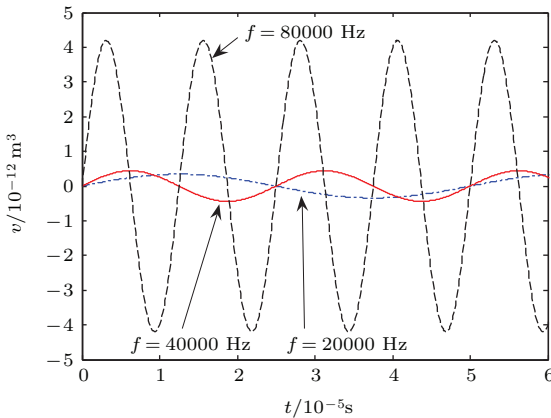


图5 (网刊彩色) 气泡1体积改变量和驱动频率的关系
Fig. 5. (color online) Relationship between volume change of bubble 1 and frequency.

3.2 次Bjerknes力对气泡振动初相位的影响

次Bjerknes力对气泡振动的影响很大一部分体现在对气泡振动初相位的影响上, 对于无相互作用的孤立气泡而言, 当驱动频率一定时, 其振动初相位为常数, 对于存在相互作用力的气泡而言, 气泡的振动初相位会随着气泡间距、相邻气泡的均衡半径而发生变化. 图6是 $R_{10} = 100 \mu\text{m}$, $f = 40 \text{ kHz}$ 的条件下, 气泡1的初相位 φ_1 随气泡间距和气泡2的均衡半径的变化. 可以看出, 在气泡2均衡半径一定的情况下, 气泡1的初相位随着气泡间距逐渐减小. 这是因为气泡间距越大, 气泡间的

相互作用力越小, 气泡的振动初相位越接近于孤立气泡的振动初相位. 当两个气泡间距一定时, 气泡2半径越大, 气泡1的振动初相位越大. 相邻气泡的均衡半径越大, 其作为次级辐射声源对气泡1影响越大, 使得气泡1的共振频率减小, 从而使得气泡1的振动初相位增加. 同样, 气泡的振动初相位也会随声场驱动频率而发生改变, 当驱动频率等于气泡共振频率时, 振动初相位发生突变. 从图7的模拟结果中可以看到, 气泡之间的次Bjerknes力会使得气泡的共振频率减小, 这也与文献[10, 24]的结论一致.

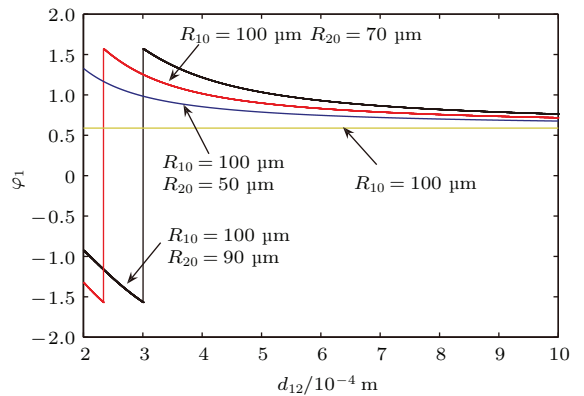


图6 (网刊彩色) 气泡1振动初相位 φ_1 和 d_{12} 的关系
Fig. 6. (color online) Relationship between pulsation initial phase φ_1 of bubble 1 and d_{12} .

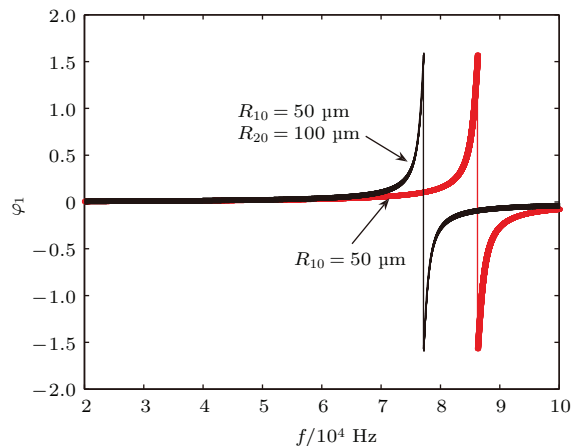


图7 (网刊彩色) 气泡1振动初相位 φ_1 和驱动频率的关系
Fig. 7. (color online) Relationship between pulsation initial phase φ_1 of bubble 1 and frequency.

4 次Bjerknes力下两个气泡的散射声场

气泡之间的相互作用会影响单个气泡的振动状态和散射声场, 多个气泡散射声场的计算是非常

复杂的,它取决于各个气泡的振动状态、均衡半径、振动初相位和气泡之间的距离等因素.为了计算简单,只计算两个气泡振动相位差为 π 和0这两种情况.

4.1 振动相位相差 π 的气泡对的散射声场

两个气泡均衡半径分别为 R_{10} 和 R_{20} ,振动相位差为 π ,假设气泡1的振动初相位为 φ_1 ,则气泡2的相位为 $\varphi_1-\pi$,如果两个气泡相距很近且 R_{10} 和 R_{20} 相差不大,那么对于远场 P 点(图1)而言,其散射声压为

$$P_y = \frac{\rho}{4\pi r_1} \ddot{v}_1 + \frac{\rho}{4\pi r_2} \ddot{v}_2 \approx \frac{j\rho v_1' \omega^3 d_{12} e^{j[\omega(t-\frac{r}{c})-\varphi_1]}}{4\pi r c} \cos\theta, \quad (15)$$

(15)式中 θ 角和 r 如图1所示.从(15)式可以看出,相位相差 π 的两个气泡的散射声压随距离成反比减小,而且散射声场与 θ 角有关,会随着 θ 角的不同出现散射声压极大值和极小值.为了计算两个相位差为 π 的气泡的散射声能量,先计算它们的声强.两个气泡的散射声强为

$$I_y = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}(P)\text{Re}(u), \quad (16)$$

(16)式中的 Re 表示取实部, u 为液体中质点的振速,可由(4),(5)和(15)式联立解得

$$u_y = -\frac{v_1' \omega^3 d_{12} \cos\theta}{4\pi r c^2} \left(1 + \frac{c}{jr\omega}\right) e^{j[\omega(t-\frac{r}{c})-\varphi_1]}. \quad (17)$$

将(15)和(17)式代入(16)式,可得两个相距 d_{12} 、相位差为 π 的气泡做体积振动时,其散射声强为

$$I_y = \frac{\rho v_1'^2 \omega^6 d_{12}^2}{32\pi^2 r^2 c^3} \cos(2\varphi_1) \cos^2\theta, \quad (18)$$

散射声功率为

$$\overline{w}_{sy} = \iint I_y dS = \frac{\rho v_1'^2 \omega^6 d_{12}^2}{24\pi c^3} \cos(2\varphi_1). \quad (19)$$

4.2 均衡半径相同、振动初相位相同的气泡对的散射声场

如果两个气泡均衡半径相同、振动初相位相同为 φ_1 ,对于远场 P 点的声压为

$$P = \frac{\rho}{4\pi r_1} \ddot{v}_1 + \frac{\rho}{4\pi r_2} \ddot{v}_2 = -\frac{\rho v_1' \omega^2 e^{j[\omega(t-\frac{r}{c})-\varphi_1]}}{2\pi r} \cos\left(\frac{\omega d_{12}}{2c} \cos\theta\right). \quad (20)$$

在这种情况下,远场声压的表达式比较复杂,只能分情况讨论.如果两个气泡之间距离非常小,使得 $\frac{\omega d_{12}}{2c} \ll 1$,则(20)式可化简为

$$P = -\frac{\rho v_1' \omega^2}{2\pi r} e^{j[\omega(t-\frac{r}{c})-\varphi_1]}. \quad (21)$$

从(21)式可以看出,对于半径相同、同相位振动、相距很近的两个小气泡的散射声场而言,声压只与距离声场的位置成反比,在这种条件下,两个气泡之间的次Bjerknes力为吸引力,使得两个小气泡在振动过程中同步振动,产生的散射声压无干扰,声压振幅加倍.

将(21)式联立(4),(5)式,可求得液体中任一点的振速为

$$u = -\frac{v_1' \omega^2}{2\pi r c} \left(1 + \frac{c}{jr\omega}\right) e^{j[\omega(t-\frac{r}{c})-\varphi_1]}. \quad (22)$$

两个半径相同、振动相位相同、相距很近的小气泡做体积振动的散射声功率为

$$\overline{w}_{st} = \iint I dS = \frac{\rho v_1'^2 \omega^4}{2\pi c} \cos(2\varphi_1). \quad (23)$$

4.3 次Bjerknes力对气泡散射声场的影响

为了研究次Bjerknes力对气泡散射、散射能量的影响,可以将气泡对的散射声场与孤立气泡做一对比.假设一个半径为 R_{10} (与气泡对半径相同)、振动初相位为 φ_0 的孤立气泡在圆频率为 ω 的声场中做体积振动,所产生的压强为

$$P = -\frac{\rho v_1' \omega^2}{4\pi r} e^{j[\omega(t-\frac{r}{c})-\varphi_0]}. \quad (24)$$

(24)式中 φ_0 是均衡半径为 R_{10} 的孤立气泡振动时的初相位角,其表达式如下:

$$\varphi_0 = \arctg\left(\frac{\omega b}{\frac{nP_0}{V_{10}} \left(1 + \frac{2\sigma}{P_0 R_{10}} - \frac{2\sigma}{3nP_0 R_{10}}\right) - \omega^2 \frac{\rho}{4\pi R_{10}}}\right). \quad (25)$$

半径相近、振动相位相差 π 、相距很近的气泡对在相同的驱动频率、相同的位置上产生的压强与孤立气泡产生的压强之比为

$$\frac{P_y}{P} = -\frac{j\omega d_{12}}{c} e^{j(\varphi_0-\varphi_1)} \cos\theta. \quad (26)$$

半径为 R_{10} 、振动相位相同、相距很近的气泡对在相同的驱动频率、相同的位置上产生的压强与孤立气泡产生的压强之比为

$$\frac{P_t}{P} = 2 e^{j(\varphi_0-\varphi_1)}. \quad (27)$$

图8是半径相近、振动相位差为 π 的气泡对在声场中 $\theta = 0$, r 位置处的 P_y/P 随小距离气泡间距($200 \mu\text{m} \leq d_{12} \leq 1000 \mu\text{m}$)的变化. 可以看出, 两个振动相位相差为 π 的气泡在声场中振动, 气泡振动状态相反, 一个压缩, 一个扩张, 气泡之间的作用力为排斥力, 所形成的正压相区和负压相区相互抵消, 散射声压与单个孤立气泡相比, 几乎为零, 如图8中黑色曲线所示, 驱动频率为40 kHz的声场中, 气泡的共振尺寸为 $100 \mu\text{m}$. 因此, 半径分别为 $90 \mu\text{m}$, $80 \mu\text{m}$ 的一对气泡, 其散射声压是单个孤立气泡的 $1/100$ 左右. 从图8中红色曲线可以看出, 当气泡对的半径分别为 $100 \mu\text{m}$, $90 \mu\text{m}$ 时, 其散射声压是单个孤立气泡的 $1/25$ 左右, 并且在气泡间距为 $333.8 \mu\text{m}$ 处出现正负声压的突变. 这说明次Bjerknes力是排斥力, 会抑制气泡对声场的散射, 抑制程度与气泡对的半径、驱动声场的频率和气泡间距有关. 在随气泡间距的变化中, 当气泡对的共振频率大于(小于)驱动频率时, $P_y/P \approx 0$; 当气泡对在某个气泡间距下的共振频率等于驱动频率时, 则在气泡对发生共振时, 次Bjerknes力发生突变, 使得散射声压出现正负声压的突变.

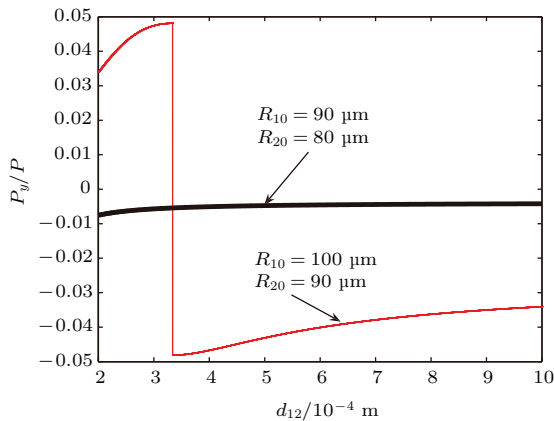


图8 (网刊彩色) P_y/P 与 d_{12} 的关系

Fig. 8. (color online) The curves of P_y/P and d_{12} .

图9给出的是频率与 P_y/P 的关系, 模拟条件为 $d_{12} = 500 \mu\text{m}$. 从图9可以看出, 半径相近、振动相位为 π 的气泡对的散射声压随驱动频率的变化分为三个区域. 以 $R_{10} = 100 \mu\text{m}$ 的一对气泡为例, 气泡1在 $d_{12} = 500 \mu\text{m}$ 处的共振频率为 $f_d = 40.890 \text{ kHz}$, 而同样半径的孤立气泡的共振频率为 $f_s = 42.891 \text{ kHz}$. 所以, 当驱动频率远小于气泡对的共振频率($20 \text{ kHz} < f < 40.89 \text{ kHz}$)时, $P_y/P < 0$ 且趋于0; 当驱动频率位于气泡对共振频率与孤立气泡共振频率之间($40.89 \text{ kHz} < f <$

42.891 kHz)时, $P_y/P > 0$; 当驱动频率大于孤立气泡共振频率($f > 42.891 \text{ kHz}$)时, $P_y/P < 0$.

综合图8和图9可以得出以下结论: 半径相同、振动相位相差为 π 的气泡对, 其在液体中某点的散射声压与孤立气泡在该点的散射声压截然不同, 气泡之间的相互作用力能够明显影响气泡对的散射声压, 影响因素取决于气泡对的半径、气泡间距和驱动频率. 若驱动频率 $f > f_d > f_s$ 或 $f < f_d < f_s$ 时, $P_y/P \approx 0$, 当 $f_d > f > f_s$ 时, $P_y/P > 0$; 驱动频率等于共振频率时, 则为正、负声压的突变点, P_y/P 的绝对值取决于气泡对的均衡半径. 其原因为: 当驱动声压接近气泡对和孤立气泡的共振频率时, 会引起气泡的共振, 引起次Bjerknes力的突变, 使得气泡的振动相位差从 π 变为 $-\pi$, 从而使得散射声压从负值迅速转变为正值.

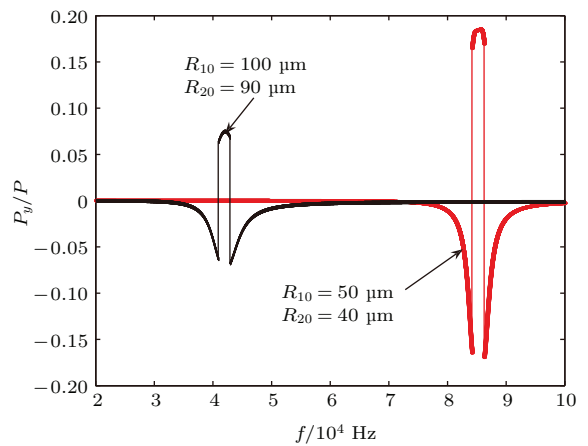


图9 (网刊彩色) P_y/P 与驱动频率的关系

Fig. 9. (color online) The curves of P_y/P and frequency.

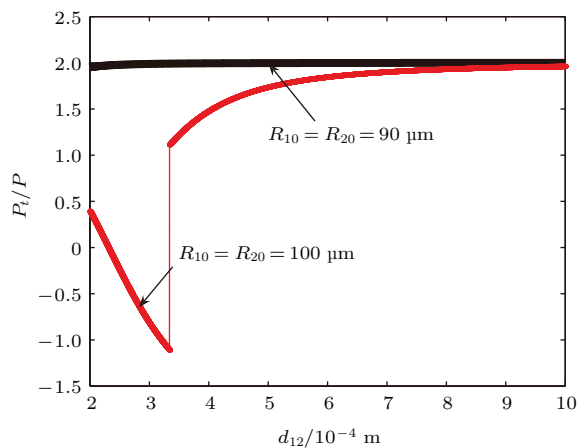


图10 (网刊彩色) P_t/P 与 d_{12} 的关系

Fig. 10. (color online) The curves of P_t/P and d_{12} .

图10和图11分别是半径相同、振动相位相同的气泡对在声场中 $\theta = 0$, r 位置处的散射声压与

同样条件下的孤立气泡在声场中散射声压的比值 P_t/P 随气泡间距、驱动频率的变化, 图中模拟参数同上. 通过数据分析可以看出, 均衡半径相同、振动相位相同、相距很近的气泡对在声场中振动时, 气泡之间的次 Bjerknes 力始终为吸引力, 使得散射声压与孤立气泡相比, $P_t/P \approx 2$, 这说明气泡之间的吸引力能够明显改变气泡对的散射声压, 影响因素仍然取决于气泡对的半径、气泡间距和驱动频率. 驱动频率 $f > f_d > f_s$ 或 $f < f_d < f_s$ 时, $P_t/P \approx 2$; 当驱动频率 $f_d > f > f_s$ 时, $P_t/P < 0$; 当 $f_d = f$ 时, 次 Bjerknes 的突变使得两个气泡的振动初相位从 φ_1 变为 $-\varphi_1$, 两个气泡的振动状态从收缩迅速变为扩张, 从而使得散射声压从正值迅速转变为负值.

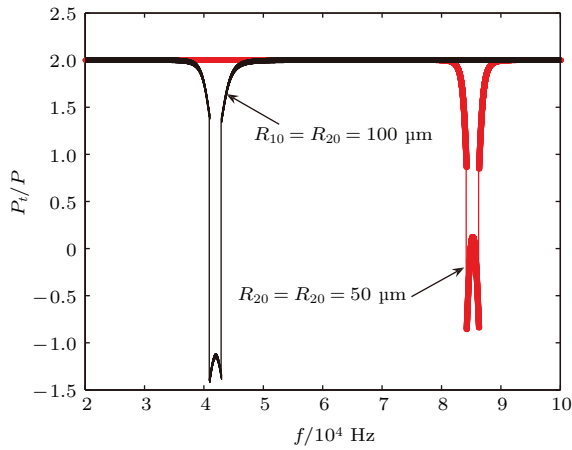


图 11 (网刊彩色) P_t/P 与驱动频率的关系

Fig. 11. (color online) The curves of P_t/P and frequency.

半径为 R_{10} 的孤立气泡引起液体中任一点的振速为

$$u_1 = -\frac{v'_1 \omega^2}{4\pi r c} \left(1 + \frac{c}{j r \omega}\right) e^{j[w(t-\frac{r}{c})-\varphi_0]}. \quad (28)$$

散射功率按照上面的方法计算得

$$\overline{w_{sd}} = \iint I dS = \frac{\rho v'^2_1 \omega^4}{8\pi c} \cos(2\varphi_0). \quad (29)$$

在一定的驱动频率下, 考虑次 Bjerknes 力后, 两个气泡的散射功率(一组相位相差为 π , 另一组相位相同)与相同半径的孤立气泡的散射功率的比值计算如下:

$$\frac{\overline{w_{sy}}}{\overline{w_{sd}}} \approx \frac{\omega^2 d_{12}^2}{6c^2} = \frac{1}{6} (kd_{12})^2, \quad (30)$$

$$\frac{\overline{w_{st}}}{\overline{w_{sd}}} \approx 4. \quad (31)$$

(30) 式中, k 为声波波数. 从 (30) 式可以看出, 当两个气泡之间相位相差为 π 时, 两个气泡振动状态

正好相反, 一个在扩张, 一个在压缩, 两个气泡之间的次 Bjerknes 力为排斥力, 在这种情况下, 两个气泡的散射功率比起单个孤立气泡来说明显减小 ($kd_{12} < 1$); 从 (31) 式可以看出, 当两个气泡之间振动相位相同时, 两个气泡之间振动同步, 振动状态相同, 两个气泡之间的次 Bjerknes 力为吸引力, 在这种情况下, 两个气泡的散射功率比单个孤立气泡来说增加了 4 倍.

5 结 论

含气泡液体中, 空化的发生大多是以多个气泡和气泡云的形式出现, 因此, 气泡之间的相互作用使得泡群中气泡的动力学特征和气泡的散射声场明显不同于孤立气泡. 本文通过 Lagrange 方程, 得到了气泡在次 Bjerknes 作用力下的体积振动方程的普遍表达式, 通过数值模拟发现气泡之间的次 Bjerknes 力对气泡体积振动振幅和初相位均有影响. 次 Bjerknes 力作用下, 不同的热力学过程、相邻气泡均衡半径、气泡间距、驱动频率的改变都会引起气泡体积振动振幅和初相位的改变.

次 Bjerknes 力对气泡的散射声场产生较大影响, 相距很近、振动相位差为 π 的两个气泡在液体中的散射声压与气泡间距、振动初相位、驱动频率有关, 随声场距离成反比减小, 并具有指向性. 某一点的散射声压与孤立气泡的散射声压相比, 若气泡对的共振频率大于(小于)驱动频率, 则 $P_y/P \approx 0$; 若气泡对的共振频率等于驱动频率, 则在气泡对共振时, 次 Bjerknes 从排斥力转变为吸引力, 使得气泡对的相位差从 π 变为 $-\pi$, 散射声场出现正、负声压的突变.

均衡半径相同、振动相位相同、相距很近的两个气泡, 其散射声压与气泡间距、振动相位有关, 随声场距离成反比减小; 若气泡对的共振频率大于(小于)驱动频率, 则 $P_t/P \approx 2$; 若气泡对的共振频率等于驱动频率, 则在气泡对共振时, 每个气泡的初相位从 φ_1 变为 $-\varphi_1$, 使散射声压出现突变.

次 Bjerknes 力对气泡的散射声功率产生较大影响, 若气泡对的均衡半径相近, 气泡间距很小, 振动相位差为 π , 其平均散射声功率是单个孤立气泡的平均散射声功率的 $\frac{1}{6} (kd_{12})^2$; 若气泡对的均衡半径相同, 气泡间距很小, 振动相位相同, 其平均散射声功率是单个孤立气泡的平均散射声功率的 4 倍.

通过上面的讨论可以看出, 当两个气泡之间相距较近时, 必须考虑两个气泡之间的次 Bjerknes

力, 它会对气泡的振动和声波的传播产生很大影响, 在含有大量气泡的液体中, 我们也可以考虑控制气泡的均衡半径、气泡间距、驱动频率等因素来改变液体中气泡对声波的散射.

感谢王成会副教授的讨论.

参考文献

- [1] Carstensen E L, Foldy L L 1947 *J. Acoust. Soc. Am.* **19** 481
- [2] Devin C J R 1959 *J. Acoust. Soc. Am.* **31** 1654
- [3] Himmelblau D M 1964 *Chem. Rev.* **64** 527
- [4] Kapodistrias G, Dahl P H 2001 *J. Acoust. Soc. Am.* **110** 1271
- [5] Kohanvosky A A 2004 *Am. J. Phys.* **72** 258
- [6] Cai L W 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **115** 986
- [7] Kapodistrias G, Dahl P H 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 3006
- [8] Farmer D M, Deane G B 2001 *IEEE J. Oceanic Eng.* **26** 113
- [9] Flynn H G 1975 *J. Acoust. Soc. Am.* **57** 1379
- [10] Qian Z W 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 442 (in Chinese) [钱祖文 1981 物理学报 **30** 442]
- [11] Wang Y, Lin S Y 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 034301 (in Chinese) [王勇, 林书玉 2014 物理学报 **63** 034301]
- [12] Wang C H, Cheng J C 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 134301 (in Chinese) [王成会, 程建春 2014 物理学报 **63** 134301]
- [13] Wu J, Fan T B 2014 *Chin. Phys. B* **23** 104302
- [14] Wang L, Tu J 2014 *Chin. Phys. B* **23** 124302
- [15] Ye Z 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 2011
- [16] Sadighi-Bonabi R, Rezaee N, Ebrahimi H, Mirheydari M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 016316
- [17] Gaunaud G C, Huang H S 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **107** 95
- [18] Kapodistrias G, Dahl P H 2012 *J. Acoust. Soc. Am.* **131** 4243
- [19] Church C C 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **97** 1510
- [20] Zabolotskaya E A 1984 *Sov. Phys. Acoust* **30** 365
- [21] Ida M, Naoe T, Futakawa M 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046309
- [22] Yuan L, Katz J 2013 *Phys. Fluids* **25** 073301
- [23] Alibakhshi M A 2011 *J. Acoust. Soc. Am.* **130** 3321
- [24] Mettin R, Akhatov I, Parlitz U, Oho C D 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2924

Volume pulsation and scattering of bubbles under the second Bjerknes force*

Ma Yan¹⁾²⁾ Lin Shu-Yu^{1)†} Xian Xiao-Jun¹⁾

1) (Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

2) (School of Physics and Information Technology, Ningxia Normal University, Guyuan 756000, China)

(Received 1 July 2015; revised manuscript received 1 September 2015)

Abstract

The interaction of bubbles must be taken into consideration in the investigation of sound wave in the liquid containing gas bubbles, particularly in the case where the gas content is high. The force between two air bubbles due to the secondary sound fields radiated by the bubbles is called the secondary Bjerknes force, which makes the dynamics and scattering of bubbles different from a single bubble's. In order to investigate the influence of secondary Bjerknes force on bubbles' pulsation and scattering, we obtain the universal expression of bubbles' pulsation under the secondary Bjerknes force by Lagrange's equation. The influences on volume amplitude and initial phase of different parameter under the second Bjerknes force are discussed, and the scattering of bubbles with phase differences of π and 0 is studied. The results show that the radius of neighbouring bubble, distance between two bubbles, polytropic coefficient and the phase can change the volume amplitude of pulsation under the secondary Bjerknes force. The mean radius of bubbles, distance and the frequency of sound have a significant effect on initial phase; the scattering of two bubbles of small distance and phase difference of π is directional and decreases with distance r , which is related to the volume amplitude, initial phase and distance between two bubbles. The mean scattering power of bubble pairs of phase difference π is $\frac{1}{6}(kd_{12})^2$ of single bubble's. The scattering of two bubbles with small distance and same phase also decreases with the distance r and relates to the volume amplitude, initial phase and distance between two bubbles. The mean scattering power of bubble pairs of same phase is 4 times as bigger as the mean scattering power of single bubble. It is expected that the mean radiuses, driving frequency and distance between bubbles can be used to change the scattering of bubbles.

Keywords: the secondary Bjerknes force, volume amplitude, pulsation phase, scattering

PACS: 43.20.+g, 43.35.+d, 47.55.dd

DOI: [10.7498/aps.65.014301](https://doi.org/10.7498/aps.65.014301)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11174192, 11374200, 11474192).

† Corresponding author. E-mail: sylin@snnu.edu.cn