

变换热学: 热超构材料及其应用

沈翔瀛 黄吉平

Transformation thermotics: thermal metamaterials and their applications

Shen Xiang-Ying Huang Ji-Ping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 178103 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.178103

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.178103>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I17>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于电阻型频率选择表面的宽带雷达超材料吸波体设计

[Design and fabrication of broadband radar metamaterial absorber based on the resistor FSS](#)

物理学报.2015, 64(21): 218102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.218102>

基于开口椭圆环的高效超宽带极化旋转超表面

[High-efficiency ultra-wideband polarization conversion metasurfaces based on split elliptical ring resonators](#)

物理学报.2015, 64(17): 178101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.178101>

基于编码超表面的太赫兹宽频段雷达散射截面缩减的研究

[A coding metasurfaces used for wideband radar cross section reduction in terahertz frequencies](#)

物理学报.2015, 64(15): 158101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.158101>

基于超材料的偏振不敏感太赫兹宽带吸波体设计

[Design of a polarization-insensitive and broadband terahertz absorber using metamaterials](#)

物理学报.2014, 63(17): 178103 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.178103>

基于科赫分形的新型超材料双频吸收器

[Study on a novel dual-band metamaterial absorber by using fractal Koch curves](#)

物理学报.2014, 63(11): 118102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.118102>

专题: 软物质研究进展

变换热学: 热超构材料及其应用*

沈翔瀛 黄吉平†

(复旦大学物理系, 应用表面物理国家重点实验室, 上海 200433)

(2016年5月26日收到; 2016年7月4日收到修改稿)

热输运是自然界中最普遍的现象之一, 如何高效操控热流在工业等领域有着巨大的应用价值. 尽管主导热传导过程的扩散方程与波动方程迥异, 但是, 自2008年和2012年起, 已有研究人员成功地将变换理论推广到宏观热传导领域. 自此之后, 多种具有特异性质的新型热材料在变换热学的理论框架下被设计出来, 并同时获得实验验证. 本文介绍该领域的研究进展, 并同时介绍在热超构材料实验中软物质材料所起的关键作用.

关键词: 变换热学, 热超构材料, 软物质材料**PACS:** 81.05.Xj, 74.25.fc, 44.90.+c**DOI:** 10.7498/aps.65.178103

1 引言

热能是世界上最普遍的能量形式之一, 也是最常被忽视的能量. 由于大多数能量形式耗散后得到热能, 因此它也常被看作是一种废能并且难以利用. 然而随着人类科技和工业文明的日益发展, 非可再生资源以惊人的速度即将被消耗殆尽, 人类已经面临资源枯竭的窘境. 因此如何高效地利用之前所认为的废能——热能, 成为科学研究的一个重要目标和课题. 超构材料 (metamaterial)^[1] 通过将自然材料排布出一定的结构从而实现奇特的非自然的材料功能, 可能成为解决一些传统传热问题的关键方法.

热传递有三种方式: 热传导、热对流和热辐射. 本文主要讨论热传导. 由于热传导是一个扩散过程, 这就导致热能往往很难被收集和利用. 这种性质也大大限制了热电材料和太阳能电池的效率. 另一方面, 如何让热能更快速地转移走而不是积累并造成对工业器件的损坏, 如芯片的过热冷却方法等, 也是一个具有重大意义的研究方向. 那么, 能否随心所欲地操控热流也就变得非常的迫切和重要. 正如同光超构材料可以控制光的传播, 在本文

中我们将展示通过变换热学方法来设计不同的热超构材料, 以便用于控制热流. 变换热学的基础是坐标变换. 文中将会详细地给出利用不同的变换设计各类不同功能的热超构材料: 热隐身衣 (可以引导热流绕过被隐身的物体); 热聚集器 (可以将热流聚集在某一特定区域中); 热旋转器 (可以将热流旋转一个特定的角度); 热透镜 (可以将热流汇聚到较小的区域里). 这些特异材料的实验手段和方法也将在文中给出.

作为常识, 不同的材料具有不同的热性质已被大众广泛接受. 热导率低材料被应用于保温, 实现冬暖夏凉的目的. 然而这些使用数千年的传统材料在面对日益增长的对热流控制的渴求时显得力不从心. 在芯片冷却中我们需要热能够快速耗散, 在太阳能电池和热电材料中我们又希望热能快速聚集来提高能量转换的效率. 因此需要寻找超越传统材料的新型材料来满足人们对热流控制的要求, 这就使得超构材料应运而生. 这种材料由基础的普通自然材料通过一系列特殊的方式组合而成, 它们可以实现自然材料所不具有的特殊性质, 而这种性质的本质来源于材料的特殊结构而非其本身的物理性质. 当然, 由于热传递的复杂性和扩散性

* 国家自然科学基金 (批准号: 11222544) 和上海市科学技术委员会 (批准号: 16ZR1445100) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jphuang@fudan.edu.cn

(例如热传导), 使得材料的制备变得比较困难.

幸运的是, 在2006年, Pendry课题组^[2]和Leonhardt课题组^[3]分别设计出了光学隐身衣. 一个物体之所以可见, 在于光线到达物体后发生的散射可以被生物的视觉系统感知. 这种隐身衣可以扭曲接近被隐身物体的光线, 让它们绕行从而产生一种物体并不存在的幻像. 这样一个划时代的设计很快引起了学界的重视和兴趣. 隐身衣的设计暗示了一种全新的超构材料^[4-8]设计理念. 本质上, 该理论的核心被归纳为变换光学. 麦克斯韦方程组的高度对称性保证了光的波动方程在坐标变换下保持形式的不变性^[9-15]. 这一性质是后续一系列变换理论的基础. 因其方程的不变性, 我们可以通过设计各向异性的材料来引导光的传播. 变换光学被迅速地推广到了其他波动方程主导的物理学领域如: 微波^[16]、声波^[17-25]、地震波^[26-28]、水的表面波^[29]、甚至物质波^[30-33]. 很明显, 这种推广是相对容易的, 因为它们都满足波动方程. 数学上讲, 波动方程属于双曲型微分方程, 而扩散方程是抛物型微分方程. 这种天然的区别就导致变换理论在相关领域的推广存在困难性.

2008年, 基于前人的工作, 文献^[34-37]建立了稳态的变换热学理论并在理论上第一次提出了热隐身衣. 2012年, Guenneau等^[38]建立了非稳态的热变换理论, 使得该领域受到科学界广泛的关注并被一些公众媒体如BBC报道. 在此基础上, 大量新型热超构材料被提出^[35-47]. 本文将介绍这8年来变换热学的蓬勃发展, 其中包括大量的理论设计和实验验证. 在热超构材料实验中, 软物质材料被广泛地应用. 它们可以作为填充物调节材料的热导率, 减少接触热阻; 也可以作为保护膜防止金属样品的氧化; 以及对抗热对流耗散. 更重要的是, 软物质覆盖的金属样品能够被红外热成像仪拍摄成像, 进而通过实验观测来验证理论设计的合理性. 一些最新的进展^[48-53]为古老的热输运注入了新的血液和活力.

2 变换热学及热超构材料

2.1 变换热学理论

热传递具有三种形式: 对流、传导和辐射. 其中辐射是微波, 天然符合变换光学理论的要求, 而对流方程比较复杂, 在固体材料中起到的作用也相

对较弱. 因此变换热学理论仅考虑热传导过程. 出于一般性考虑, 根据傅里叶定律, 一个在各向异性介质中的热传导方程具有如下的形式

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \cdot \nabla T), \quad (1)$$

式中, ρ 是材料的质量密度, c 是比热, T 是温度, t 是时间, 而 κ 是材料的热导率. 在一个 n 维曲线系统里有协变基 g_1, g_2, \dots, g_n , 那么方程(1)可以写成如下的分量形式:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \partial_i \kappa^{ij} \partial_j T + \Gamma_{ik}^i \kappa^{kj} \partial_j T, \quad (2)$$

式中 Γ_{ik}^i 是克里斯托弗记号, 它被定义为对应于 x^i 的 g_k 微分的第 i 个逆变量分量; κ^{ij} 是给定坐标系下热导率张量中的第 ij 个逆变量分量. 此处我们使用爱因斯坦求和方法消去了符号 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$.

在引入度规张量 G (G 的分量被定义为 $g_{ij} = g_i \cdot g_j$) 后方程(2)可以被继续简化, 克里斯托弗记号可以表示为

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{il} \partial_k g_{il} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \sqrt{g}, \quad (3)$$

这里, g 是矩阵 $[g_{ij}]$ 的行列式. 据此我们可以得到方程(1)的更简化版的分量形式:

$$\sqrt{g} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \partial_i \sqrt{g} \kappa^{ij} \partial_j T. \quad (4)$$

对于各向同性的热导率, 有

$$\kappa^{ij} = \kappa g^{ij}, \quad (5)$$

此处 g^{ij} 是矩阵 $[g^{ij}] = [g^i \cdot g^j] = [g_{ij}]^{-1}$ 的第 ij 个分量. 那么(4)式可写作:

$$\sqrt{g} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \partial_i \sqrt{g} \kappa g^{ij} \partial_j T. \quad (6)$$

另一方面, 在一个笛卡尔坐标系描述的空间中, 我们可以直接写出方程(1)的分量式:

$$\tilde{\rho} \tilde{c} \frac{\partial T}{\partial t} = \partial_i \tilde{\kappa}^{ij} \partial_j T. \quad (7)$$

上述方程与(1)式相比其形式是相同的. 这证明热传导方程可以在坐标变换下实现方程形式的不变. 对比方程(6)和(7), 可以得到我们需要的热导率张量的矩阵形式:

$$[\tilde{\kappa}^{ij}] = \sqrt{g} \kappa g^{ij}. \quad (8)$$

这里需要注意, 为了能够得到相同的方程形式来满足变换理论的条件, 质量密度和比热的乘积 $\tilde{\rho} \tilde{c}$ 需要满足关系

$$\tilde{\rho} \tilde{c} = \sqrt{g} \rho c. \quad (9)$$

由于逆变基 $[g^1, g^2]$ 在笛卡尔坐标系下的矩阵形式就是曲线系统中的雅可比矩阵 \mathbf{J} , 那么度规张量 \mathbf{G} 的矩阵形式就是: $[g^{ij}] = \mathbf{J}\mathbf{J}^T$ 和 $[g_{ij}] = \mathbf{J}^{-T}\mathbf{J}^{-1}$, 注意此处 \mathbf{J}^T 代表雅可比矩阵的转置. 那么行列式可以写为: $g = \det(\mathbf{J}^{-T}\mathbf{J}^{-1}) = \det^2(\mathbf{J}^{-1}) = \det^{-2}(\mathbf{J})$. 综上, 在坐标变换下, 热传导方程若想保持其方程的形式不变, 热导率需要变换为

$$[\tilde{\kappa}^{ij}] = \frac{\mathbf{J}\kappa\mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})}. \quad (10)$$

由以上讨论可知, 即使是抛物型偏微分方程热传导或扩散方程在坐标变换下仍可保持形式不变, 这是变换热学最重要的前提. 值得注意的是变换改变了热导率张量. 这种改变在数学上的体现在雅可比矩阵 \mathbf{J} 的引入, 而 \mathbf{J} 恰恰是刻画坐标变换的数学工具. 这个理论允许人们通过调节非匀质的各向异性热导率来设计出具有特异热性质的热超构材料.

下面我们给出基于变换热学来设计热超构材料的方法论. 整个过程大致可以分为三步. 首先, 根据不同的需要, 设计出一个适合的坐标变换. 以二维极坐标为例, 一个坐标变换可以表示为

$$\begin{cases} r' = f(r, \theta), \\ \theta' = g(r, \theta). \end{cases} \quad (11)$$

第二步, 根据 (10) 式计算出新的热导率张量. 最后, 通过模拟或者实验的方法来验证具有新热导率的热超构材料是否能够按照预期来实现设计好的功能. 这三个步骤可以指导人们利用变换理论设计形形色色的新材料, 包括隐身衣、聚集器、反转器、旋转器和热透镜.

2.2 热超构材料

利用梯度材料实现电磁波隐身衣的方法在学界受到了广泛关注 [54]. 一些研究其散射截面 [55] 及其二维情况甚至推广到其他物理场如电导领域的工作随之产生 [56-58]. 尽管不同于波动方程, 在 2008 年, Fan 等 [34] 和 Guenneau 等 [38] 依然成功地将 Pendry 的电磁波隐身衣和变换理论推广到了热学领域.

热传导是介质内无宏观运动时的传热现象, 其在固体、液体和气体中均可发生, 但严格而言, 只有

在固体中才是纯粹的热传导. 当存在热梯度时, 热能会自发地从高温端流向低温端. 为了设计的简单起见, 由于自然状态中静态的热场分布往往比较重要, 我们在设计热超构材料时经常会考虑静态无热源的传导过程. 在此框架下, 方程 (1) 可以简化为拉普拉斯方程的形式:

$$0 = \nabla \cdot (\kappa \cdot \nabla T). \quad (12)$$

在隐身衣的影响下, 大多数的热超构材料是在二维极坐标下设计完成的. 这主要有两点原因: 一方面二维系统无论在理论计算和模拟或实验验证上都比较简单易行; 另一方面二维极坐标扩展到三维柱坐标或球坐标系统非常容易. 因此, 在后面讨论几种主要超构材料的过程中, 只讨论静态热传导的二维极坐标的情况, 三维情况和非稳态只需做简单的延伸即可得到.

光学隐身衣其实在具体操作上存在很大的问题. 基于波动方程的变换理论在实现上需要考虑频率. 目前实验中制造出来的超构材料往往对应于某个单一或狭窄的频段. 因此, 光学隐身仍然任重而道远. 相反, 基于热传导方程的热超构材料不存在频率的问题. 这种特殊性使得基于变换热学理论设计出来的材料有更强的适用性, 在足够宽泛的边界条件中, 热超构材料都可以表现良好. 这就使得上述材料在生产生活中可以更快地得到应用, 并具有更广阔的适应范围和价值.

2.2.1 热隐身衣

热隐身衣是光学隐身衣在热力学上的一个推广. Fan 和 Guenneau 两个课题组分别建立了稳态和非稳态的变换热学理论, 而此理论的一个直接应用就是设计并制造热隐身衣. 相较于传统隐身装置, 热隐身衣有两个特点. 第一, 在其隐身区域 ($r < R_1$) 区域温度梯度为 0; 第二, 无论隐身区域中放置一个怎样的物体, 它都不会对外场的温度分布产生丝毫的影响. 换言之, 一个观测者是无法通过隐身衣外的温度分布来探知隐身衣内的物体为何物. 参照光学隐身衣的变换, 我们也可以依其写出变换式:

$$\begin{cases} r' = R_1 + r(R_2 - R_1)/R_2, \\ \theta' = \theta. \end{cases} \quad (13)$$

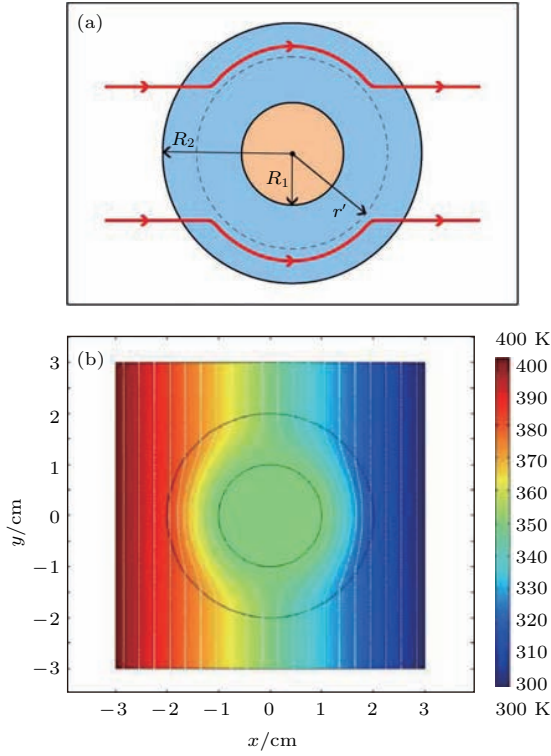


图1 (a) 热隐身衣的示意图 参数取值: $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 2$ cm; (b) 在高温 400 K、低温 300 K、上下边界为热绝缘时隐身衣在热场中的温度分布

Fig. 1. (a) A schematic diagram of thermal cloak, where the parameters, $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 2$ cm; (b) the temperature profile of the thermal cloak when the heat diffuses from a temperature of 400 K to 300 K.

(13) 式将一个圆形区域 ($r < R_2$) 压缩为一个环形区域 ($R_1 < r < R_2$). 根据上面的讨论, 我们可以计算出复合坐标变换 $(x, y) \rightarrow (r, \theta) \rightarrow (r', \theta') \rightarrow (x', y')$ 的雅可比矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{xx'} &= \mathbf{J}_{xr} \mathbf{J}_{r\theta} \mathbf{J}_{\theta'} \mathbf{J}'_{\theta'} \\ &= \mathbf{R}(\theta) \text{diag}(1, r) \text{diag}(f'^{-1}, 1) \text{diag}(1, 1/r') \mathbf{R}(\theta') \\ &= \mathbf{R}(\theta) \text{diag}(f'^{-1}, r/r') \mathbf{R}(\theta'), \end{aligned} \quad (14)$$

以上就是我们建造热隐身衣防护热流所需要的参数. 如图 1 所示, 据此设计出的热隐身衣可以被模拟验证 (模拟使用了商业多物理场耦合有限元分析软件 COMSOL). 很明显, 热隐身衣的存在不会改变外场的温度分布. 由于各向异性在内径附近角坐标方向的无限高热导率和径向方向零热导率成功地使热流避开了被保护的物体, 让隐身区域内部的

其中 $\mathbf{R}(\theta)$ 和 $\mathbf{R}(\theta')$ 是旋转矩阵,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{xr} &= \partial(r, \theta) / \partial(x, y), \\ \mathbf{J}_{r\theta} &= \partial(r', \theta') / \partial(r, \theta), \\ \mathbf{J}'_{\theta'} &= \partial(x', y') / \partial(r', \theta'). \end{aligned}$$

鉴于我们选用的是圆形的模型,

$$f' = (R_2(\theta) - R_1(\theta)) / R_2(\theta),$$

切旋转矩阵 $\mathbf{R}(\theta)$ 和 $\mathbf{R}(\theta')$ 是单位模量, 记 $\det(\mathbf{J}_{xx'}) = f'^{-1} r / r'$.

那么, 考虑到 $\mathbf{R}(\theta)^{-1} = \mathbf{R}(\theta)^T$, 以及 $\theta = \theta'$, 可以通过把这些因素代入方程 (10) 计算出变换矩阵 \mathbf{T} 来给出我们需要的材料参数:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1} &= \frac{\mathbf{J} \kappa \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})} = \mathbf{J}_{xx}^{-T} \mathbf{J}_{xx}^{-1} \det(\mathbf{J}_{xx'}) \\ &= \mathbf{R}(\theta')^{-T} \text{diag}(f', r'/r) \\ &\quad \times \mathbf{R}(\theta')^{-1} \text{diag}(f', r'/r) \mathbf{R}(\theta')^{-1} f'^{-1} r / r' \\ &= \mathbf{R}(\theta') \text{diag}(f' r / r', f'^{-1} r' / r) \mathbf{R}(\theta')^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 变换后的环状隐身衣里的热导率就可以表示为

$$\kappa' = \kappa \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{R}(\theta') \text{diag}(\kappa'_{r'}, \kappa'_{\theta'}) \mathbf{R}(\theta')^T. \quad (16)$$

出于简化的目的, 假设背景的热导率为 1 W/mK, 我们最终可以得到矩阵的特征值:

$$\begin{aligned} \kappa'_{r'} &= \frac{r' - R_1}{r'}, \\ \kappa'_{\theta'} &= \frac{r'}{r' - R_1}. \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式是极坐标下的热导率, 对于笛卡尔坐标系统, 我们还需要让 (17) 式乘以旋转矩阵 $\mathbf{R}(\theta)$ 和 $\mathbf{R}(\theta')$, 最终可得热导率张量:

$$\begin{pmatrix} \kappa'_{r'} \cos^2 \theta + \kappa'_{\theta'} \sin^2 \theta & \kappa'_{r'} \sin \theta \cos \theta - \kappa'_{\theta'} \sin \theta \cos \theta \\ \kappa'_{r'} \sin \theta \cos \theta - \kappa'_{\theta'} \sin \theta \cos \theta & \kappa'_{r'} \sin^2 \theta + \kappa'_{\theta'} \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

温度梯度为零.

2.2.2 热聚集器

热隐身衣的特殊性质和变换理论激发了对于其他拥有特殊性质的热超构材料的研究. 下面我们将介绍基于变换热学理论衍生出来的一系列热超构材料. 比如子热聚集器: 此类材料可以在不影响外场温度分布的情况下, 使得某一区域的热梯度急

剧提高;而热旋转器可以根据要求将热流扭转某一特定角度.所有这些有趣的性质都来源于理论提供的设计非线性非匀质材料的极大自由度.所有的方法论也是从热隐身衣的成功中总结出来的.

回顾一下热隐身衣,它可以让热流扭曲避开中间区域从而保证了隐身衣内部没有温度梯度.如果我们想要通过类似的结构让中间区域的温度梯度不降反生,是否就是一个热聚集装置了呢?受此影响,在2012年法国人Guenneau首次提出了热聚集器的概念^[38].这种装置可以作为一种非侵入式的热器件服务于热电效应,从而提高能量的转化效率.

如图2所示,考虑一个有三个环 $R_1 < R_2 < R_3$ 的圆状模型,存在如下的坐标变换(我们仅仅列出径向的变换因为 $\theta' = \theta$):

$$\begin{cases} r' = \frac{R_1}{R_2}r & (0 \leq r \leq R_2), \\ r' = \frac{R_3 - R_1}{R_3 - R_2}r + \frac{R_1 - R_2}{R_3 - R_2}R_3 & (R_2 \leq r \leq R_3). \end{cases} \quad (19)$$

上面的变换将 $r < R_2$ 的区域压缩到 $r < R_1$ 的区域,然后将 $R_2 < r < R_3$ 的区域拉伸到 $R_1 < r < R_3$.在整个变换空间中,拉伸和压缩互相抵偿,从而导致原空间和变换空间的一致.因此,热聚集器由两部分组成.可以通过使用上一小节的方法来计算变换矩阵 \mathbf{T} , $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}_{xx'}^{-1} \mathbf{J}_{xx'}^{-T} \det(\mathbf{J}_{xx'}) = R(\theta') \mathbf{J}_{\theta\theta'}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\theta'}^{-T} R(-\theta')$.然后就可以计算出热聚集器的参数:

$$\begin{aligned} \kappa'_{r'} &= 1, \quad \kappa'_{\theta'} = 1 \quad (0 \leq r' \leq R_2), \\ \kappa'_{r'} &= \frac{r' + R_3 \frac{R_2 - R_1}{R_3 - R_2}}{r'}, \\ \kappa'_{\theta'} &= \frac{r'}{r' + R_3 \frac{R_2 - R_1}{R_3 - R_2}} \end{aligned} \quad (R_2 \leq r' \leq R_3). \quad (20)$$

上面给出的热导率不会被消去或出现无穷大的奇点.类似与热隐身衣中的处理,我们利用有限元模拟来给出聚集器在热场中的表现.在图2中,可以看到,中间区域的温度梯度被提高了,这是因为中间区域的空间受到了挤压.梯度提高的程度由几何参数即三个同心圆的半径决定.此外,由于压缩和拉伸抵消,热导率矩阵的行列式与背景一样,

因此该超构材料和热隐身衣一样对外场温度分布不会造成影响.因此热聚集器看起来也是隐形的.

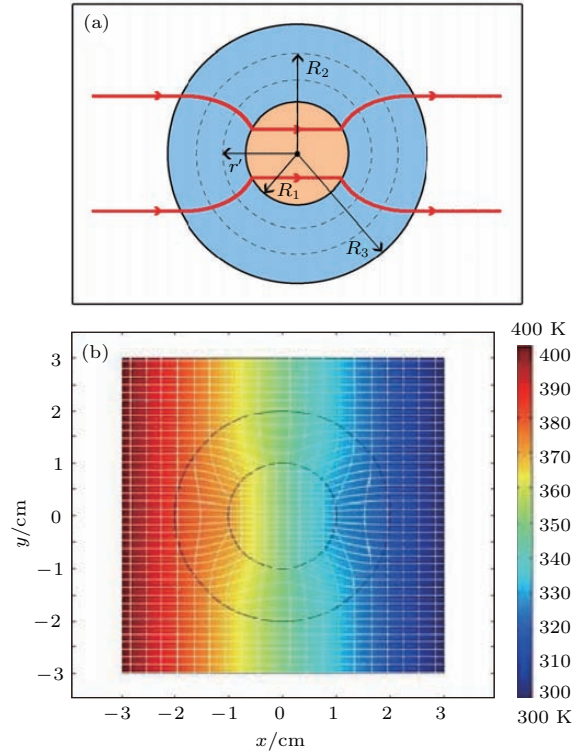


图2 (a) 热聚集器的示意图,此处参数取值 $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 1.5$ cm, $R_3 = 2$ cm; (b) 在高温400 K、低温300 K,上下边界为热绝缘时聚集器在热场中的温度分布
Fig. 2. (a) A schematic diagram of thermal concentrator, where the parameters: $R_1 = 1$ cm, $R_2 = 1.5$ cm, $R_3 = 2$ cm; (b) the temperature profile of the thermal concentrator when the heat diffuses from a temperature of 400 K to 300 K.

2.2.3 热旋转器

在2013年, Guenneau课题组^[41]通过有限元方法分析柱体扩散问题时提出了另一种具有特异功能的新型热超构材料,它可以让热流旋转一个特定的角度,因此被称为热旋转器.实现方法仍然是由几何变换开始,然后得到热导率张量.在热旋转器的一系列模拟中,存在表观的负热导率现象.换言之,热可能从低温端流向高温端.假如在材料的中心区域放置一个物体,那么在外面的观测者看来,整个内部空间就像旋转了一个特定角度,从而导致了一类海市蜃楼般的现象(关于热幻像将在后面的章节中给予更详细的讨论).根据设计热隐身衣和聚集器的经验,想要让变换区域保守就必须要求 $\det(\mathbf{J}) = 1$ (此时质量密度和比热的乘积不变).这将极大地简化瞬时状态下系统对热流的控制,并且如热隐身衣和热聚集器一样不会对外场产生影

响. 该器件与前面两个超构材料一样是一个环状结构.

现在来看看热旋转的变换:

对于 $r < R_1$ 的环内区域

$$\begin{cases} r' = r, \\ \theta' = \theta + \theta_0; \end{cases} \quad (21)$$

对于 $r > R_2$ 的环外区域不发生坐标变换.

对于 $R_1 < r < R_2$ 的环区域

$$\begin{cases} r' = r, \\ \theta' = \theta + \theta_0 \frac{f(R_2) - f(r)}{f(R_2) - f(R_1)}. \end{cases} \quad (22)$$

这一系列变换是让热流从外部进入环状区域 ($R_1 < r < R_2$) 后在其中慢慢地转向, 最终扩散到内环时旋转一个角度 θ_0 .

有了坐标变换式, 下一步就是着手计算变换矩阵, 并求出热超构材料的热导率张量. 由于制作的需要, 我们最好将其在笛卡尔坐标系中的张量也写

出来. 最后, 基于材料参数, 通过实验手段和模拟我们就可以创造出这种热旋转装置. 通过之前的经验式可得变换矩阵 $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}_{xx'}^{-1} \mathbf{J}_{xx'}^T \det(\mathbf{J}_{xx'}) = \mathbf{R}(\theta') \mathbf{J}_{\theta\theta'}^{-1} \mathbf{J}_{\theta\theta'}^T \mathbf{R}(-\theta')$. 其精确解如下:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}^{-1})_{11} & (\mathbf{T}^{-1})_{12} \\ (\mathbf{T}^{-1})_{21} & (\mathbf{T}^{-1})_{22} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^{-1})_{11} &= 1 - 2t \cos(\theta') \sin(\theta') + t^2 \cos^2(\theta'), \\ (\mathbf{T}^{-1})_{22} &= 1 + 2t \cos(\theta') \sin(\theta') + t^2 \sin^2(\theta'), \\ (\mathbf{T}^{-1})_{12} &= (\mathbf{T}^{-1})_{21} \\ &= t^2 \cos(\theta') - t(\cos^2(\theta') - \sin^2(\theta')), \end{aligned} \quad (24)$$

此处 $t = \theta_0 r / (R_2 - R_1)$.

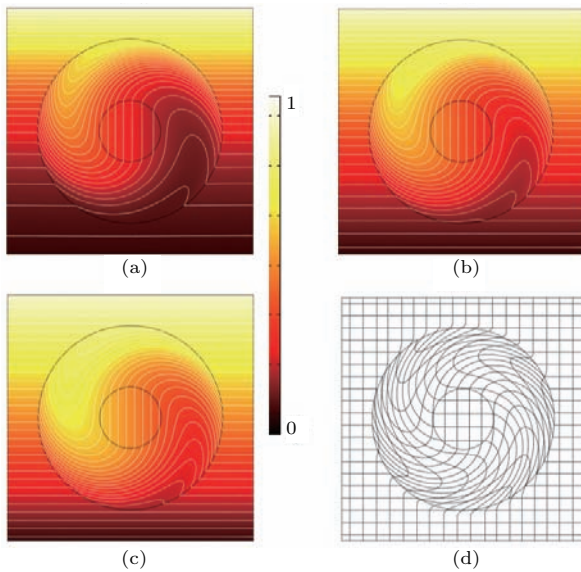


图3 热聚集器在热场中的温度分布 图中热源放在模拟图中的上方, 热流随着时间流逝不断向下方的冷端扩散; 图中温度被归一化为0—1; (a) $t = 0.005$ s时的温度分布; (b) $t = 0.01$ s; (c) $t = 0.1$ s; 图中的旋转角度为 $\theta_0 = \pi/2$; (d) 在 $t > 0.1$ s 的稳态后, 由等温线和热流线围成的网格, 这个网格形象地刻画出了空间的扭曲情况; 在模拟中使用的参数为: $R_1 = 1 \times 10^{-4}$ m 和 $R_2 = 3 \times 10^{-4}$ m [41]

Fig. 3. Temperature distribution for a heat source located on the top, which diffuses heat in a medium containing a rotator for different time: (a) $t = 0.05$ s; (b) $t = 0.01$ s; (c) $t = 0.1$ s. The rotation angle is $\theta_0 = \pi/2$; (d) the mesh formed by heat flux streamlines and isothermal lines in the long time regime, $t \geq 0.1$ s, illustrates the deformation of the transformed thermal space. Parameters: $R_1 = 1 \times 10^{-4}$ m and $R_2 = 3 \times 10^{-4}$ m [41].

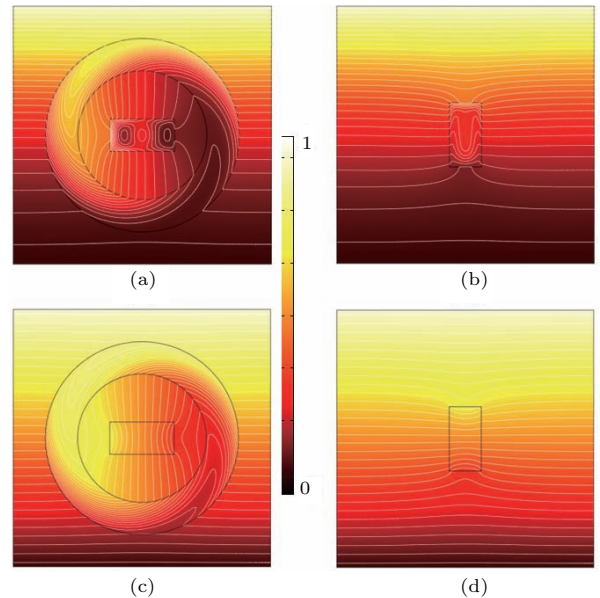


图4 一个物体被放入了热旋转器的中心部分, 热源仍然在模拟模型的上方, 此图展示了不同时间的温度场分布 (a), (b) $t = 0.005$ s; (c), (d) $t = 0.1$ s. 旋转角度为 $\theta_0 = \pi/2$, 中间矩形物体的热导率是背景的1%, 在 (b) 和 (d) 中它被旋转了 $\pi/2$. 通过比较 (a), (c) 与 (b), (d), 可以发现旋转器外的温度分布几乎一模一样; 参数选取: $R_1 = 2 \times 10^{-4}$ m; $R_2 = 3 \times 10^{-4}$ m [41]

Fig. 4. Temperature distribution for a heat source located on the top, which diffuses heat in a medium containing a rotator for different time: (a), (b) $t = 0.005$ s; (c), (d) $t = 0.1$ s. The rotation angle is $\theta_0 = \pi/2$. The rectangular object has a diffusivity one hundred times smaller than that of the surrounding medium, and it is rotated by an angle of $\pi/2$ in (b) and (d) when compared to (a) and (c). The temperature distribution outside the rotator is the same in both (a) and (b), or in both (c) and (d). Parameters: $R_1 = 1 \times 10^{-4}$ m and $R_2 = 3 \times 10^{-4}$ m [41].

将上面的各向异性热导率输入COMSOL的模型程序经过有限元模拟得出热旋转器在热场中的表现. 图3展示了旋转角度为 $\pi/2$ 的情况, 图中温度范围被归一化为0—1. 通过观察白色的等温线可以明显地发现在器件内部相比于外部, 热流的方向被旋转了正好 $\pi/2$. 这一现象同时也造成了表观的负热导率, 因为热流明显从较低的温度端流向了较高的温度. 这种表观负热导率在旋转过程中被明显地增强: 热交换在非稳态过程中被加强了. 更为重要的是热流在环状区域内被非常平滑地旋转了, 同时由于对外场没有影响, 热旋转器相对于外界的观察来说也是隐形的. 当一个物体被放置于环内区域时且 $\theta_0 = \pi/2$, 图4展示出对于外界观测者热流的表现如同物体本身被旋转了 $\pi/2$. 这种现象实际上是一种类热幻像, 一个本来水平放置的物体表现出来的温度分布如同被旋转了一个角度. 通过几何变换和材料特性间的等价关系, 我们可以计算出热旋转器对热场的相应. Guenneau等据此还进一步改进了旋转器, 使其在于热源很近时也能工作, 并且在短时间内大大加强了表观负热导率效应. 可见热旋转器具有改变热流方向的能力.

3 热超构材料的理论设计和实验制备

很显然, 仅在理论上设计这些超构材料是不够的, 因为对于材料科学, 应用始终是最重要的环节. 由于我们在第2节中提到的材料参数均是非匀质且各向异性, 这在自然界中是不可能找到的. 因此必须要通过其他手段来实现这些需要的材料性质. 幸运的是, 有效媒质理论为我们实现基于变换热学理论的超构材料提供了一个强有力的工具. 此理论方法可以通过使用多种匀质的且各向同性的材料排列成一些特定的几何结构来拟合出原本各向异性的复杂热导率.

从我们之前的讨论可以看出, 热隐身衣的参数在实验中非常难以实现. 幸运的是, 在软物质材料研究中, 通过各种材料属性的近似手段, 已经发展出了一套行之有效且非常利于操作的有效媒质近似理论. 这种理论其实根植于材料属性的近似思想, 比如一组电路中多个电阻串联时它的电导率可以看作是一个电阻的阻值等效出来的结果. 那么, 同样在实现一些自然界不存在的材料性质时, 可以用相同的手段, 也就是把一个整体材料的性质分布

(如热隐身衣)看作是多多个次结构组分等效出来的性质. 这样得到的材料就可以具有各向异性的分布, 这一分布与结构、材料的几何形状、多种材料不同的物理性质、不同材料的组分等等因素有关.

3.1 有效媒质近似理论: 两种介质混合

3.1.1 对称微结构

现在来考虑有两种介质混合的材料. 首先假设一个混合物中包含两种纳米大小或微米大小的颗粒1和2, 且两种颗粒均为随机掺杂见图5. 两种颗粒1和2的热导率分别为 κ_1 和 κ_2 . 那么这种由两种组分的混合物的等效热导率为 κ_ϵ , 可以表示为

$$P_1 \frac{\kappa_1 - \kappa_\epsilon}{\kappa_1 + 2\kappa_\epsilon} + P_2 \frac{\kappa_2 - \kappa_\epsilon}{\kappa_2 + 2\kappa_\epsilon} = 0, \quad (25)$$

这里 P_1 和 P_2 表示颗粒1和2的体积分数, 且 $P_1 + P_2 = 1$. 对方程(25), 假如将1和2的指标互换, 方程依然成立. 因此该方程是微观对称的, 实际上也是介电质系统里的布拉格曼有效媒质近似理论在热学中的副本^[59]. 把 $\kappa_2 = 0$ 代入方程可以得到

$$\kappa_\epsilon = \begin{cases} \frac{3}{2}\kappa_1(P - P_c), & P_1 > P_c, \\ 0, & P_1 < P_c, \end{cases} \quad (26)$$

这里 $P_c = 1/3$ 正是逾渗阈值.

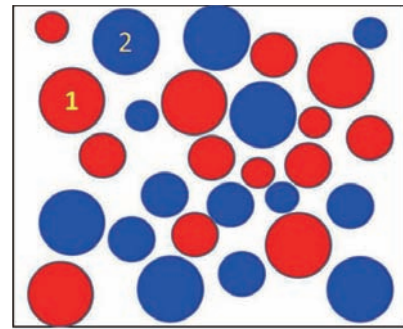


图5 微观对称结构的模型图: 一种混合物由颗粒1(红色)和颗粒2(蓝色)随机掺杂组成, 颗粒的大小并不相同

Fig. 5. Schematic graph showing a model symmetrical microstructure: a two component composite where particles 1 (in red) and 2 (in blue) are randomly distributed in the whole system. The size of particles are different, so that they could fill in the whole composite.

将双组分混合物推广到多组分是非常容易的. 假设每一个组分都有一个对应的热导率 κ_i , 那么拥有 N 种颗粒组分的混合物其等效热导率 κ_ϵ 满足如下关系:

$$\sum_{i=1}^N P_i \frac{\kappa_i - \kappa_\epsilon}{\kappa_i + 2\kappa_\epsilon} = 0, \quad (27)$$

这里 P_i 是第 i 个组分的体积分, 且 $\sum_i^N P_i = 1$.

3.1.2 非对称微结构

我们继续考虑一类由两种组分组成的混合物如图 6 所示. 这种混合物由纳米尺度或微米尺度球形颗粒 1 随机分布在基底中组成. 颗粒 1 和基底的热导率分别为 κ_1 和 κ_0 . 两种组分的混合物具有等效热导率 κ_ε , 且满足关系:

$$\frac{\kappa_\varepsilon - \kappa_0}{\kappa_\varepsilon + 2\kappa_0} = P_1 \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{\kappa_1 + 2\kappa_0}, \quad (28)$$

此处 P_1 表示颗粒 1 的体积分. 在方程 (28) 中, 假如我们将 1 和 2 颠倒, 方程会发生改变. 因此这个方程也被称为非对称的微观有效媒质方程. 如图 6 所示, (28) 式实际上就是将电学里的麦克斯韦-加内

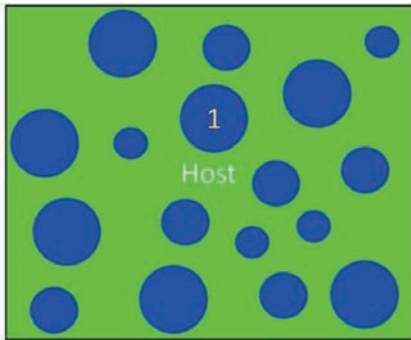


图 6 微观非对称结构的模型图: 一种混合物由颗粒 1 (蓝色) 和基底 (绿色) 随机掺杂组成, 颗粒的大小并不相同

Fig. 6. Schematic graph showing a model non-symmetrical microstructure: a two component composite where particles 1 (in blue) are randomly distributed in a host (in green). The size of particles 1 may also be different.

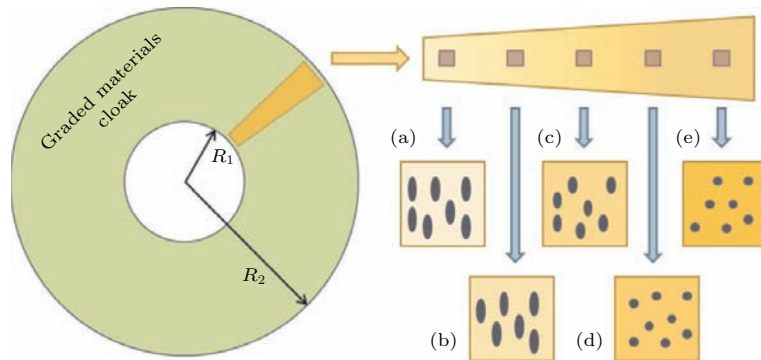


图 7 双场隐身衣的结构设计图 此种隐身衣在热场和直流电场中均能发挥隐身作用, 非球形的纳米颗粒被沿径向镶嵌在各向同性的匀质基底上, 且颗粒具有不同的形状和体积分 [36]

Fig. 7. Schematic diagram of a designed bi-functional cloak with both thermal cloaking and electrical cloaking. The nonspherical nanoparticles are decorated along the radius of the cloak with various shape aspects and volume fractions [36].

特有效媒质近似理论借鉴到了热学领域. 此近似方程不能用来预测结构的逾渗阈值.

同样地, (28) 式可以非常容易地从两种组分推广到 $N + 1$ 种组分的混合物. 其中包含 N 种填充颗粒和一个基底. 每一种颗粒的热导率为 κ_i , 基底仍为 κ_0 . 那么 $N + 1$ 成分的混合物其等效热导率符合如下关系:

$$\frac{\kappa_\varepsilon - \kappa_0}{\kappa_\varepsilon + 2\kappa_0} = \sum_{i=1}^N \left(P_i \frac{\kappa_i - \kappa_0}{\kappa_i + 2\kappa_0} \right), \quad (29)$$

这里的 P_i 是第 i 种颗粒的体积分.

3.2 基于有效媒质理论的双场隐身衣

根据前面提到的 Li 等 [36] 的工作, 他们提出了使用纳米材料基于有效媒质理论来设计隐身衣, 希望通过使用两种材料的混合来完美地拟合出由坐标变换产生的各向异性参数. 在这个设计里, 热导率 κ_m 的非球形纳米颗粒被散布在热导率为 κ_i 的均匀介质上, 如图 7 所示. 混合物的等效热导率由上节介绍的布拉格曼形状相关的有效媒质近似理论得出 [60-62].

考虑到纳米颗粒在混合物交界面上的热阻抗, 一个外面有一层厚度为 δ , 热导率为 κ_s 镀层的纳米颗粒, 其热导率可以写为

$$\kappa'_m = \frac{\kappa_m}{1 + \frac{R_{Bd}}{r_a} \kappa_m}, \quad (30)$$

且

$$R_{Bd} = \lim_{\delta \rightarrow 0, \kappa_s \rightarrow 0} (\delta / \kappa_s). \quad (31)$$

上面方程里 κ_m 是原来那个纳米颗粒的热导率, r_a 是颗粒的平均半径. R_{Bd} 的值依赖于我们选取何种材料^[63,64]. 交界面上的热阻由微观颗粒的纵横比决定. 当然, 如果纵横比够大, 方程(30)会发生剧烈的变化, 这一点也可以被近似理论计算阐明.

由于纳米颗粒的表面热阻, 整个混合体系的等效热导率可以由理论给出:

$$P \frac{\kappa'_m - \kappa_{r,t}}{\kappa_{r,t} + \Gamma_{r,t}(\kappa'_m - \kappa_{r,t})} + (1 - P) \frac{\kappa'_i - \kappa_{r,t}}{\kappa_{r,t} + \Gamma_{r,t}(\kappa'_i - \kappa_{r,t})} = 0, \quad (32)$$

(32) 式中, P 是非球状纳米颗粒的体积分数. Γ_r 和 Γ_t 分别是沿着径向和切向的颗粒几何形状因子.

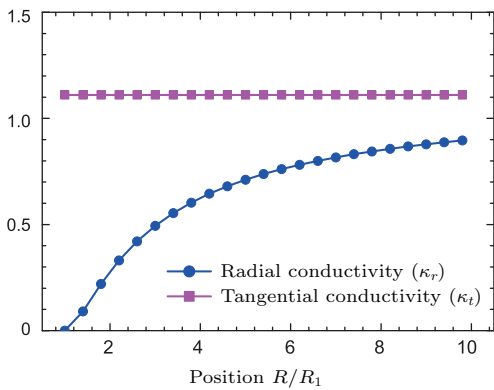


图8 在隐身隐身衣壳层中的等效电导率和热导率的值, 参数为 $R_1 : R_2 = 1 : 10$ ^[36]
Fig. 8. The normalized values of the effective electrical and thermal conductivities at different positions in the cloaking shell. Parameters: $R_1 : R_2 = 1 : 10$ ^[36].

为了能够在解方程(32)时得到 $\Gamma_{r,t}$ 和 P 的相同结果, 他们选择参数 $\kappa'_m = n_1 \kappa_0 \kappa'_i = n_2 \kappa_0$, 这里 n_1 和 n_2 是比例因子. 这意味着纳米颗粒等效热导率 κ'_m 和表面热阻必须和原始未变换空间中的比值一样. 根据方程(30), 可以将形状因子计算出来. 在这个工作里, 径向的形状因子一直比1/3要大, 这代表混合物中的纳米颗粒是一个扁椭球, 且它的三个主轴满足关系 $c < b = a$. 另一方面, 形状因子 Γ_r 和 Γ_t 都是纵横比 γ 的方程, 且 $\gamma = a/c$ ^[65].

$$\Gamma_r(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{\gamma \sec^{-1} \sqrt{\gamma}}{(\gamma - 1)^{3/2}}, \quad (33)$$

$$\Gamma_t(\gamma) = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma \sec^{-1} \sqrt{\gamma}}{(\gamma - 1)^{3/2}} - \frac{1}{\gamma - 1} \right], \quad (34)$$

这里几何形状因子还满足关系 $\Gamma_r + 2\Gamma_t = 1$ ^[65]. 对于奇点, 当 $\gamma = 1$ 时表示的是球的情况, 那么, 用来制作隐身衣壳层的、在混合物中掺杂的纳米颗粒形

状就可以确定下来了. 接下来通过调整由形状因子决定的纳米颗粒的形状和体积分数, 就可以把它们嵌入到基底中从而实现各向异性非均匀的材料性质. 在图8中展示了在隐身衣参数 $R_1 : R_2 = 1 : 10$ 时, 理论计算的等效电、热导率和位置的关系.

为了能满足理论要求的热导率, 选取了 $R_1 : R_2 = 1 : 3$ 的情况. 利用不同形状和体积分数的非球纳米颗粒, 可以尽可能接近地拟合出任意给定的各向异性热导率(见图9).

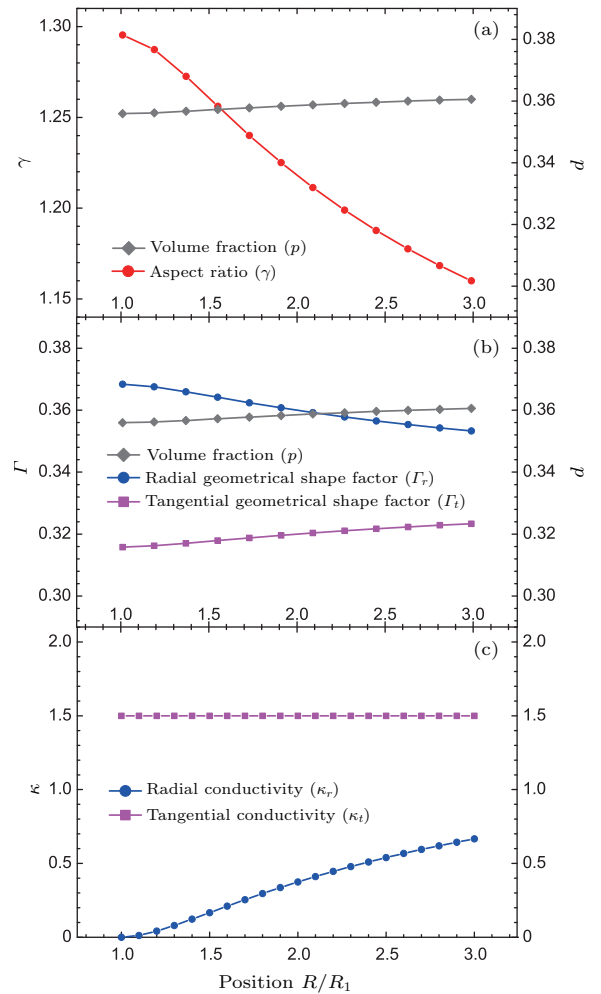


图9 当参数取 $R_1 : R_2 = 1 : 3$ 时, 计算出来的结果是一个 R/R_1 的函数 (a) 非球形纳米颗粒形状纵横比和体积分数的关系; (b) 纳米颗粒径向和切向的几何形状因子及体积分数的关系; (c) 等效的电导率和热导率的值^[36]
Fig. 9. The calculated results of parameters for a cloak with $R_1 : R_2 = 1 : 3$ as functions of R/R_1 . (a) The shape aspect ratio and volume fraction of the nonspherical nanoparticles; (b) the radial and tangential part of geometrical shape factors, and the volume fraction of the nonspherical nanoparticles; (c) the normalized values of the effective electrical and thermal conductivities^[36].

3.3 稳态热超构材料的实验实现

自从基于变换理论的热超构材料提出后,它极端各向异性的热导率一直都给实验的实现带来了巨大的挑战.在本小节里,我们继续探讨稳态热传导下的各种超构材料如何实现.

受到上述这些简化方法的影响, Han 等^[42]发展出了基于稳态变换热学理论的热隐身衣的实现方法.这种方法只采用了均匀的、无奇点的自然界中广泛存在的传导材料.由这种材料制成的热隐身衣也具有上述性质而且是各向异性的,且可以是任意的几何尺寸,这与以往报道的热隐身衣原理均不相同.

该设计与热传导方程在坐标变换下的形式不变性.一个完美的热隐身衣参数可见方程(17).很明显,热导率是一个与空间参量有关的变量,并且在 r 等于内径时存在奇点,这一切都使得在工程上制造这样的热器件非常困难.因此,人们是否能够使用有限的热导率为常数的材料近似地组成一个接近热隐身衣表现的热材料呢?答案是肯定的.我们发现在完美的热导率张量里提及的径向和切向

两部分存在一个非常有趣的关系,由此可以发展出一套实现热隐身衣的方法.根据(17)式可以发现 $\kappa'_{r,r}\kappa'_{\theta,\theta} = 1$,且 $0 \leq \kappa'_{r,r} = 1/\kappa'_{\theta,\theta} \leq (b-a)/a$,此处 b 和 a 分别是热隐身衣的外径和内径.我们记为: $\kappa'_{r,r} = 1/\kappa'_{\theta,\theta} = C$,此处 C 是一个常数,且满足关系 $0 \leq C \leq (b-a)/a$,根据这几点就能够用均匀材料制造出没有奇点的热隐身衣.图10展示了四种热隐身衣的温度分布.其中图10(a)展示了一个完美的热隐身衣.而图10(b)—(d)则展示了 C 取0.1, 0.2和0.3时的匀质热隐身衣.如图所示,即使是匀质的热隐身衣也能将热流偏转,使其绕开被保护区域并防止热流进入内圈.很明显,这种设计极大地简化了参数,而且也可以和完美热隐身衣一样起到热隐身效果.

在图10中我们可以看出,当 C 很小时,热流被限制在热隐身衣内部一个很狭窄的区间内.当然,在 C 很大的情况下,热流可能会进入到隐身区域内部.因此参数 C 决不能超过某一个特定的值.根据上述讨论设计均匀化的热隐身衣最首要的问题是找到 C 的阈值.下面将给出一个严谨的理论分析来找出这个值.首先在柱坐标系里热传导方程

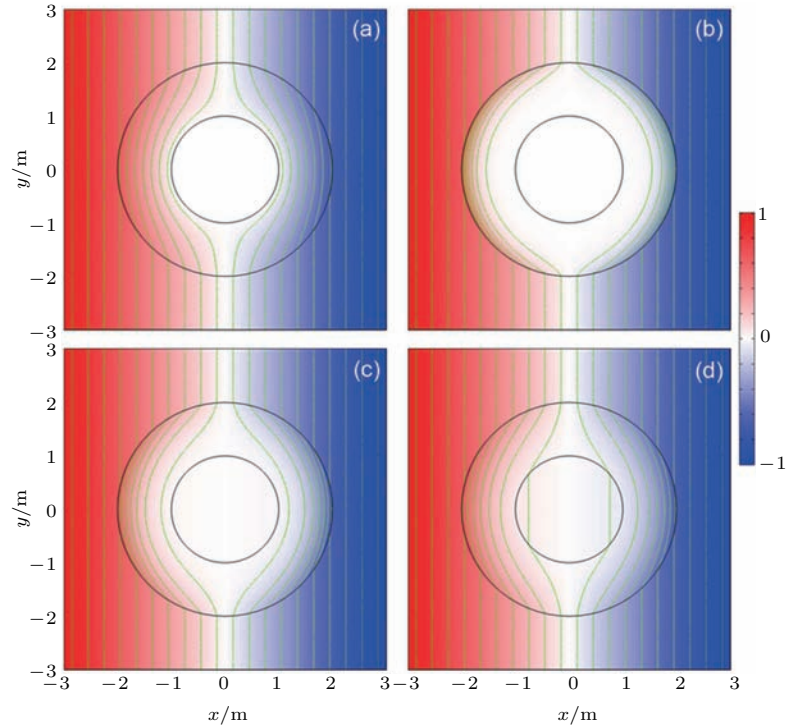


图10 热隐身衣在热场中的温度分布 (a) 理想的隐身衣参数; (b) $\kappa'_{r,r} = 0.1, \kappa'_{\theta,\theta} = 10$; (c) $\kappa'_{r,r} = 0.2, \kappa'_{\theta,\theta} = 5$; (d) $\kappa'_{r,r} = 0.3, \kappa'_{\theta,\theta} = 3.3$; 绿线代表等温线; 参数为 $R_1 = 1 \text{ m}, R_2 = 2 \text{ m}$ ^[42]

Fig. 10. Temperature profile for a thermal cloak: (a) Ideal conductivity; (b) $\kappa'_{r,r} = 0.1$ and $\kappa'_{\theta,\theta} = 10$; (c) $\kappa'_{r,r} = 0.2$ and $\kappa'_{\theta,\theta} = 5$; (d) $\kappa'_{r,r} = 0.3$ and $\kappa'_{\theta,\theta} = 3.3$. Isothermal lines are represented in green. Parameters: $R_1 = 1 \text{ m}$ and $R_2 = 2 \text{ m}$ ^[42].

写作:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{l^2}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0. \quad (35)$$

在方程(35)中隐形区域内和背景中 $l = 1$, 在隐身衣区域 $l = \sqrt{\kappa'_\theta / \kappa'_r}$. 考虑到对称性可以得到关系 $T(x, y) \rightarrow T(x, -y)$, 那么温度在三个区域中的分布可以分别写成下式:

$$\begin{aligned} T_i &= \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n-1} r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta, \\ &\text{(invisible region),} \\ T_c &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_{2n-1} r^{(2n-1)l} + 2C_{2n-1} r^{-(2n-1)l} \right] \\ &\times \cos(2n-1)\theta \quad \text{(cloak region),} \\ T_b &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_{2n-1} r^{2n-1} + E_{2n-1} r^{-2n+1} \right] \\ &\times \cos(2n-1)\theta \quad \text{(background region).} \end{aligned} \quad (36)$$

由于温度分布和热通量分量在交界面上是连续的, 故可以得到

$$\begin{cases} T_i|_{r=a} = T_c|_{r=a}, \\ T_c|_{r=b} = T_b|_{r=b}, \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \nabla T_i|_{r=a} = \kappa'_r \nabla T_c|_{r=a}, \\ \nabla T_b|_{r=b} = \kappa'_r \nabla T_c|_{r=b}. \end{cases} \quad (38)$$

将边界条件考虑进去, $T(x = \pm x_0) = \mp T_0$, 其中 T_0 是一个常数, 最终可得

$$\begin{aligned} T_i &= -\frac{T_0}{x_0} \left(\frac{a}{b}\right)^{l-1} r \cos \theta, \\ T_c &= -\frac{T_0}{x_0} \left(\frac{r}{b}\right)^{l-1} r \cos \theta, \\ T_b &= -\frac{T_0}{x_0} r \cos \theta. \end{aligned} \quad (39)$$

如此, 三个不同区域内的温度分布就全部如上式般被呈现出来. 很明显, 当 $l = 1$ 时, 会导致 $T_i = T_c = T_b$, 就如同普通的空间一样. 如要设计均匀化的热隐身衣, 参数如下: $l = \sqrt{\kappa'_\theta / \kappa'_r} = 1/C$ 和 $T_i/T_b = (a/b)^{l-1}$ 及 $T_c/T_b = (r/b)^{l-1}$. 当 l 足够大, 会使得 $T_i/T_b \rightarrow 0$, 造成几乎没有热流流入内圈的情况, 所以要让参数 C 使参数 l 足够大, 这样就能实验制造热隐身衣了. 相应的模拟结果展示在图 11 中, 可以看出按照这种参数设计出来的热隐身衣表现良好.

我们还需要更多的稳态热隐身衣的实现建议和实验验证, 热隐身衣是否能够实现隐身功能也亟

需制造出一个真正的热器件来检验. 为此, 在 2012 年, Narayana 和 Sato^[39] 利用两种不同热导率的材料创造出了真正意义上的第一个热隐身衣实物.

正如之前所指出的, 多层同心圆般交替放置的层状结构可以用来实现压缩变换. 设想一种混合物是由两种交替的层状材料 A 和 B 组成. 在其垂直方向, 两种交替热导率会产生压缩效果, 而在切向方向则是拉伸. 因此, 尽管我们用的一直是各向同性的均匀材料, 整个混合物的等效热导率却变得各向异性, 而热流也会如期望般绕开被隐形物体. 当此效果被实现后, 它可以启发人们有目的地设计一些特殊的热流扩散路径. 如图 12 所示, Narayana 和 Sato^[39] 设计了一种同心层状的结构. 两种热导率分别为 κ_A 和 κ_B 的普通材料 A 和 B 组合产生了各向异性的热隐身衣.

对于背景材料而言, 他们使用了 5% 的琼脂水合物, 其热导率 $\kappa_h \sim 0.56$ W/mK. 由于需要保证器件不对外场分布产生影响^[66], 基底材料的热阻抗需要和两种材料通过有效媒质理论计算出来的热阻值匹配.

如图 12 所示, 他们设计的柱状超构材料由 40 层 0.36 mm 厚的热导率为 $\kappa_A = 0.13$ W/mK 的天然橡胶膜和 0.38 mm 厚的热导率为 $\kappa_B = 2.6$ W/mK 的含镍硅脂膜交替排列而成. 柱体内径 a 为 0.8 cm, 外径 b 为 2.7 cm. 整个热隐身衣材料长度为 5 cm, 被放置在一个琼脂板上. 他们也使用了两种其他材料作为对照组. 第一种对比材料是一个空心铜柱. 另一个种是聚亚安酯. 这两种材料一种是热导材料, 另一种是绝热材料. 这两种材料也和样品一起被放置在琼脂板上. 在实验中两侧的温度控制在 41 °C 和 0 °C. 根据尺寸, 相当于外界提供了一个温度差 ($\nabla T = 5.1$ K/cm). 实验结果测到的实际温度分布如图 13 所示.

很明显, 热隐身衣还是不会扭曲外场的温度分布, 而铜板和聚亚安酯的存在就能扭曲外场的温度分布. 铜环的高热导率可以成功地让热流绕过中心区域, 根据测量, 在 $r < a$ 区域, 温度梯度仅为 0.25 K/cm (是外加梯度的 5%). 作为对比的另一个材料聚亚安酯中心的热梯度约为 3.5 K/cm (是外加梯度的 70%). 模拟显示, 热隐身衣内部不会有温度梯度. 根据实验结果测量, 内部的温度梯度约等于 0.38 K/cm (外加梯度的 7%). 可见热隐身衣对热流的屏蔽效果堪比铜环.

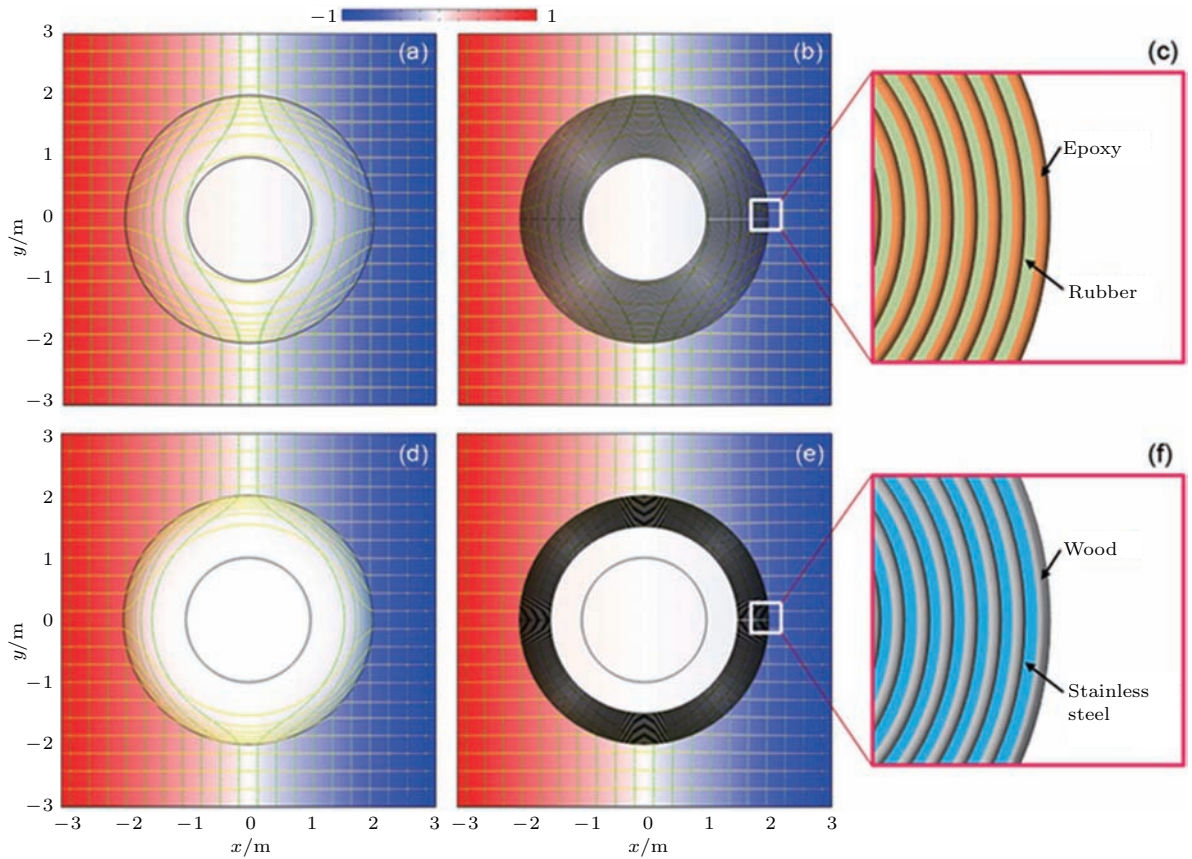


图 11 热隐身衣的温度分布 (a) $C = 0.25$; (b) 多层材料组合来实现 (a) 中的热隐身衣; (c) 多层结构的放大图; (d) $C = 0.1$; (e) 组合实现 (d) 图中的热隐身衣; (f) 用来展示 (e) 图中的多层隐身衣的; 热流线和等温线由黄色和绿色的线分别表示; 参数为 $R_1 = 1\text{ m}$, $R_2 = 2\text{ m}$ [42]

Fig. 11. Temperature profile for a thermal cloak: (a) $C = 0.25$; (b) the multilayered composition realization for the cloak in (a); (c) a close-up view of the multilayered cloak in (b), showing the constitutive materials available in nature; (d) $C = 0.1$; (e) the multilayered composition realization for the cloak in (d); (f) a close-up view of the multilayered cloak in (e) showing the constitutive materials. Thermal flux and isothermal lines are represented in yellow and green, respectively. Parameters: $R_1 = 1\text{ m}$ and $R_2 = 2\text{ m}$ [42].

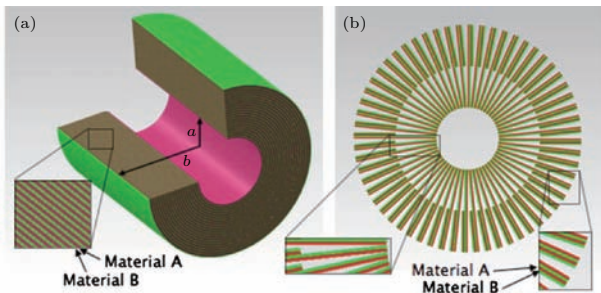


图 12 (a) 各向异性的热隐身衣的如何通过两种材料交替同心排列构成; (b) 一张多层热聚集器的剖面图 [39]

Fig. 12. (a) A sketch to show how to fabricate an anisotropic thermal cloak; (b) cross-sectional schematic graph of a multilayered thermal concentrator [39].

此外, 该课题组还利用相同的两种材料通过一种特殊的排布 (见图 12 (b)) 制造了一个热聚集器. 在设计中, 不同于压缩变换的径向堆叠, 拉伸变换是通过在切向上交替排列堆叠 4 层和 2 层的 A, B

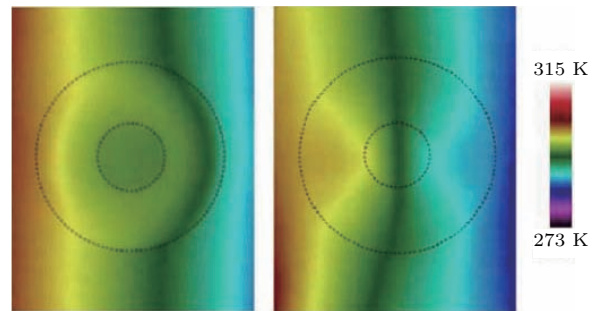


图 13 在实验实地测量中得到的热隐身衣和热聚集器温度分布结果图 [39]

Fig. 13. Experimentally measured temperature map for the reported thermal cloak and concentrator [39].

材料来实现. 他们提供了外加温度梯度, 并测量了热聚集器的温度分布. 在图 13 中热聚集器将整个环中的热流压缩到了一个很小的区域, 当内部的能量密度被极大提高的同时, 外场仍然能够保持均

匀. 可以非常清楚地发现, 与热隐身衣情况截然相反, 外圈的热流线向内弯折. 这可以提高内部的温度梯度, 同时不会对外面造成影响. 最后实验结果显示, 热聚集器的存在可以将 $r < a$ 区域内的热梯度提高 44%.

3.4 非稳态热隐身衣的实验表现

Guenneau 等 [38] 尝试给出一种行之有效的方法来制造非稳态的热隐身衣. 他们的设计和文献 [39] 静态热隐身衣类似, 但是在细节上更为复杂一些. 他们想通过使用大量均匀的热扩散系数为常数的层状材料来组合出一个广域的隐身衣. 为了达到这个目的, 整个设计被分成两步: 第一步, 标准化和同质化热导率, 并且得到各向异性但均匀的热扩散系数 $K_{\text{hom}} = \kappa_{\text{hom}}/\rho c$, 这一方法减化了数值计算, 当用多层隐身衣去近似得到理想隐身衣时, 将用到 M 层匀质同心环; 第二步, 利用上面的方法, 需用匀质化的 N 层, 其具有更细的各向同性的薄层去近似每一层 $i, i = 1, 2, \dots, M$. 这意味着将有总数为 NM 之多的各向同性的薄层. 当然这个数字可能会很大, 使用的参数为 $N = 2$ 和 $M = 10$. 一个相应的数学论证可以在薛定谔和声波方程中找到 [31], 他们详细地描述了匀质化的过程和方法. 首先, 这样一个设计需要用到材料的扩散系数.

当然, 在整个同质化过程中一个径向变化或与 r 相关的行列式是一个主要问题. 于是, 可利用数学技巧推导出一个各向异性热导率的变体 κ'' :

$$\begin{aligned} \kappa_r'' &= \left(\frac{R_2}{R_2 - R_1} \right) \left(\frac{r' - R_1}{r'} \right)^2, \\ \kappa_\theta'' &= \frac{R_2}{R_2 - R_1}. \end{aligned} \quad (40)$$

这个近似是通过让 κ_r' 和 κ_θ' 乘上径向变化的行列式得到的. 这样, 就可以只用方程 (40) 作为热隐身衣的参数, 从而成功地将质量和热容项的行列式去除掉. 当然, 这样的一步简化得到的参数是基于以下近似:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\kappa'' \nabla T) &= \det(\mathbf{J}) \nabla \cdot (\kappa' \nabla T) \\ &+ \kappa' \nabla \cdot (\det(\mathbf{J}) \nabla T). \end{aligned} \quad (41)$$

这个近似只有在扰动 $\kappa' \nabla \cdot (\det(\mathbf{J}) \nabla T)$ 足够小的时候才成立. 这个条件在热隐身衣的外部边界是不具备的, 这就造成了热隐身衣和背景之间因材料扩散系数不同而产生的界面热阻. 当然, 我们将在后

面看到尽管如此, 隐身衣内部的热保护作用仍然有效.

下一个需要面对和解决的问题就是热隐身衣内部存在的各向异性热导率. 如果热隐身衣由两种各向同性且均匀的厚度分别为 d_A 和 d_B , 热导率为 κ_A 和 κ_B , 密度为 ρ_A 和 ρ_B , 密度为 c_A 和 c_B 的薄层交替排列组成的话, 这种混合物的等效材料参数即为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_r} &= \frac{1}{1 + \eta} \left(\frac{1}{\kappa_A} + \frac{1}{\kappa_B} \right), \quad \kappa_\theta = \frac{\kappa_A + \kappa_B}{1 + \eta}, \\ \langle \rho c \rangle &= \frac{\rho_A c_A + \eta \rho_B c_B}{1 + \eta}. \end{aligned} \quad (42)$$

它们分别被描述为一个调和函数和两个几何平均, 此处 $\eta = d_B/d_A$ 是 A 薄层和 B 薄层的厚度之比, 且 $d_A + d_B = 1$. 可以用商业模拟软件 COMSOL 通过有限元模拟来检测这一近似设计得到的热隐身效果, 见图 14. 根据模拟结果, 我们可以看出利用两种不同种类各向同性均匀的同心圆排布的薄层材料, 可以比较好地得到各向异性非均匀的隐身衣效果.

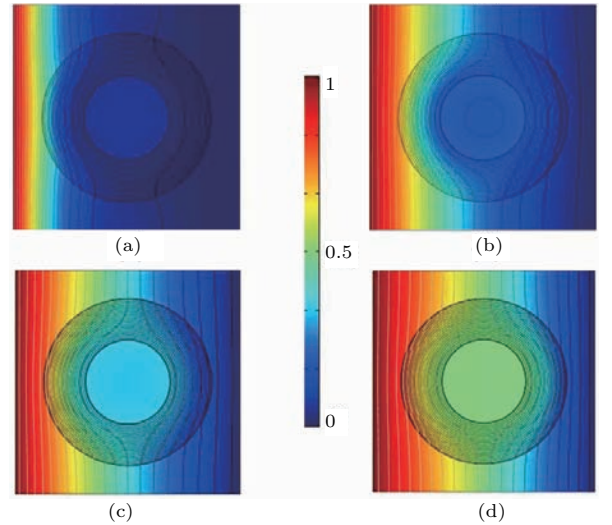


图 14 热流在上从多层结构隐身衣的左侧流向右侧, 该结构由 20 层各向同性且同一厚度的薄层组成. 在 (a) $t = 0.001$ s, (b) $t = 0.005$ s, (c) $t = 0.02$ s, 以及 (d) $t = 0.05$ s 时的分布如图所示, 图中的灰色线代表等温线, 且温度被归一化; 模拟参数为 $R_1 = 1.5 \times 10^{-4}$ m, $R_2 = 3 \times 10^{-4}$ m [38].

Fig. 14. Diffusion of heat from the left toward a multilayered cloak, which consists of 20 homogeneous layers of equal thickness, at time (a) $t = 0.001$ s, (b) $t = 0.005$ s, (c) $t = 0.02$ s, and (d) $t = 0.05$ s. The mesh is formed by heat flux streamlines and isothermal lines. Parameters: $R_1 = 1.5 \times 10^{-4}$ m and $R_2 = 3 \times 10^{-4}$ m [38].

为了能够验证上述理论, Schittney 等^[40]在 2013 年发布了他们的非稳态热传导隐身衣实验结果. 受到之前理论工作以及一些相应的实验方法的启发, 他们选择 10 个等厚度的环, 通过交替不同热导率薄层的排布来近似出从 R_2 到 R_1 逐渐降低的径向材料参数. 每一环的热导率 κ_i ($i = 1-10$ 是从热隐身衣内部到外部排列) 由方程 (41) 定义, 据此可以很好地去拟合方程 (39) 给出的材料参数. 在 $R_1 < r < R_2$ 范围内, 单位为 W/mK, 每一层的

热导率分别为: $\kappa_1 = 0.15, \kappa_2 = 394.0, \kappa_3 = 2.91, \kappa_4 = 390.0, \kappa_5 = 11.26, \kappa_6 = 382.7, \kappa_7 = 19.02, \kappa_8 = 375.0, \kappa_9 = 26.38, \kappa_{10} = 367.6$. 根据方程 (39) 和 (41) ρc 不再乘以 \det , 因此不具有径向分布, 也就是说可以被视为常数. 为了能够尽可能贴近以上的参数, 要求背景热导率为 $\kappa_0 = 85 \text{ W}/(\text{Km})$. 他们通过一对环来拟合贴近各向异性的材料参数, 为了能够使得近似足够精确, 环与环之间的距离需要相比于温度梯度亦即热扩散尺度而言足够小.

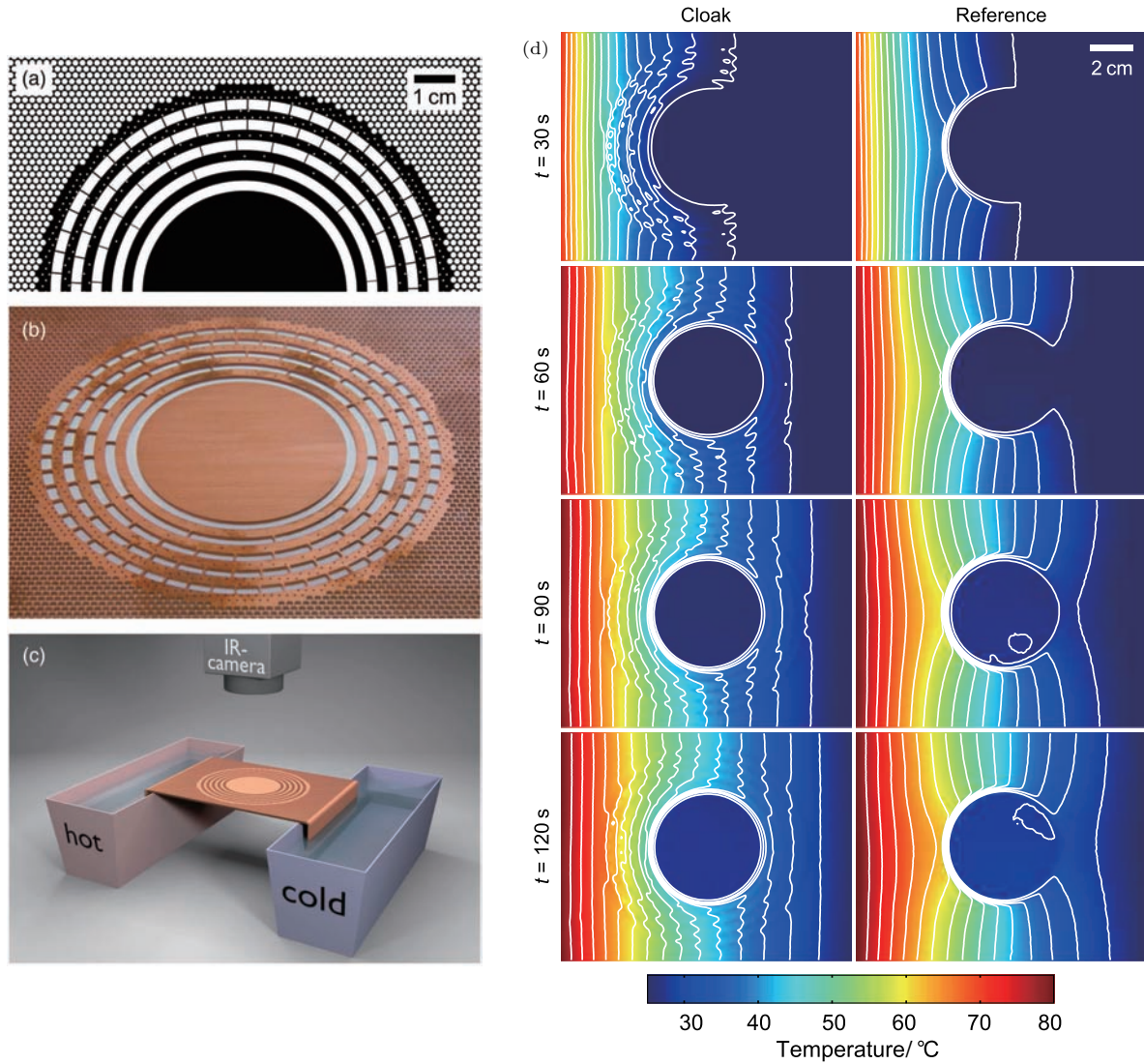


图 15 非稳态热隐身衣的实验装置和实验结果图 实验样品是由一整块铜板在上面打好洞然后在洞里填充 PDMS 制成的; (c) 实验的设计样品被弯成一个 U 形放入冷热水槽热浴, 然后温度分布由上方的红外热成像仪拍摄; (d) 非稳态热传导在热浴后各个时刻的温度分布, 左侧为热隐身衣结构, 右侧是一块铜板作为对照组; 通过实验结果可见热隐身衣可以有效地使隐身区域与外界热传导隔绝, 形成一个无热梯度且比外界温度低许多的热隐身区域, 而且不会对外场产生影响; 理论与实验结果符合得相当好^[40].

Fig. 15. (a)–(c) The experiment installation of Schittney’s group. They fill PDMS into the hole drilled in a copper plate and a infrared camera is used to measure the heat distribution of the device; (d) the experiment results of unsteady state heat flow cloak and a copper case as reference are presented^[40].

为了利用两种材料得到上述不同的热导率, 他们设计了几种混合结构: 通过在铜板上钻洞并且向洞中注入软物质聚二甲基硅氧烷 (PDMS), 利用两种材料所占的体积分数来调和出符合要求的热导率. 铜板的热导率为 $\kappa_{Cu} = 394 \text{ W}/(\text{Km})$, 填充物 PDMS 的热导率为 $\kappa_{PDMS} = 0.15 \text{ W}/(\text{Km})$, 前者比后者大了将近三个数量级. 另一个重要参数即质量密度和比热容的乘积, 铜板和 PDMS 的值分别为: $\rho c = 3.4 \text{ MJ}/\text{Km}^3$ 和 $\rho c = 1.4 \text{ MJ}/\text{Km}^3$.

根据之前的介绍, 尺度对热超构材料没有影响. 考虑到这一点, 图 15 (a)—(c) 给出了在室温环境下的非稳态热传导隐身衣的实验装置图. 在实验中, 整个装置的尺度被限定为 $R_1 = 2.5 \text{ cm}$, $R_2 = 5 \text{ cm}$, 每一个环的厚度为 2.5 mm . 为了测量非稳态的温度数据, 他们采用了传统的热红外摄像机 (FLIR A320). 依照基尔霍夫定律, 能够得到近似 100% 吸收等同于辐射的效应至关重要. PDMS 的存在可以有效地消除铜板表面的反射现象, 从而利于摄像机成像. 此外一层 $100 \mu\text{m}$ 厚的 PDMS 薄膜也可以对抗热耗散效果. 在热传导过程中, 由于外界空气的存在, 不可避免地会有热对流和辐射效应出现, 这就让传热在实际上比理论复杂. 为了克服这些问题实验中装置的厚度被定为 2 mm , 这极大地提高了整个体系的热容, 从而极大地减少了对流和辐射耗散对实验结果的影响. 图 15 (d) 给出了完整非稳态热隐身衣的实验结果和作为对照组的铜板在不同时间节点上的结果. 实验中 $t = 0$ 是装置刚开始进行热浴的时刻.

通过观察实验结果, 很明显可以看出热隐身衣的中间区域在整个实验过程中都比外面的环境温度要低. 热隐身衣的存在可以保护中间的隐身区域免于被外界热流影响. 一个无温度梯度的区域可以通过这种混合结构生成. 总而言之, 实验结果和理论计算符合得相当好. Sato 和 Schittny 等的工作, 给予变换热学理论以实验上的支持.

3.5 双层热隐身衣

双层结构的热隐身衣如图 16 所示. 这种热隐身衣仅有两层各向同性的材料组成, 这无疑是简化到极致的热隐身衣设计 [67]. 双层热隐身衣由一个内层 ($a < r < b$) 和外层 ($b < r < c$) 组成, 两层的热导率分别设为 κ_2 和 κ_3 , 背景的热导率为 κ_0 . 这

种设计仅仅用到了自然界中最基本的材料, 通过简单的排布就能实现我们渴望已久的热隐身效果. 这无疑是一个非常巨大的进步.

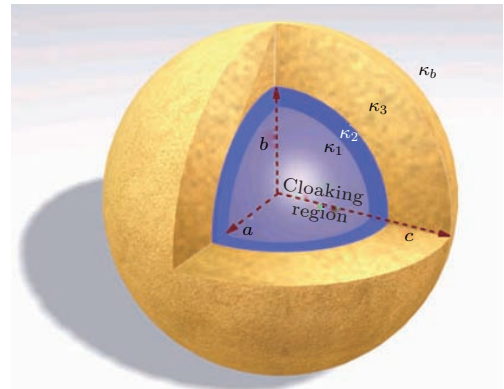


图 16 双层结构热隐身衣的 3D 展示图, 整个样品完全由自然材料组成 [67]

Fig. 16. Schematic illustration of the 3D bilayer thermal cloak with naturally available materials [67].

双层热隐身衣从第一性原理出发, 通过直接解稳态热传导方程得到令外场不扭曲、内部无梯度的解. 这种方法的得到的热隐身衣鲁棒性极强, 同时大大减少了实验设计的难度. 之后许多实验均是基于双层热隐身衣设计的, 而且这种从第一性原理出发的方法打开了变换热学的思路, 也促进了更多简化热超构材料的设计, 并且为实现特殊功能操控热流增加了自由度. 对于稳态的无热源的热扩散情况, 如前面提及的主方程满足拉普拉斯方程的形式. 通过解这个方程, 我们可以给出在空间各处的温度分布, 这一分布可以表达为

$$T_i = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^i r^m + B_m^i r^{-m-1}] P_m(\cos \theta), \quad (43)$$

此处 A_m^i 和 B_m^i ($i = 1, 2, 3, 4$) 均为常数, 且可以由边界条件惟一确定; $P_m(\cos \theta)$ 为勒让德函数, 且 m 为解得阶数, T_i 代表了不同区域里的温度分布: $i = 1$, 是隐身区域 ($r < a$), $i = 2$ 代表了内层热隐身衣; $i = 3$, 是外层热隐身衣; 而 $i = 4$ 是背景环境 ($r > c$).

假设一个温度分布具有沿着 z 方向的均匀的温度梯度 t_0 . 在远场 $r \rightarrow \infty$, T_4 将趋向于 $-t_0 r \cos \theta$, 因此我们只考虑 $m = 1$ 的情况. 又因为在中心位置 $r \rightarrow 0$, T_1 应该是收敛而非发散的, 可以得到 $B_1^1 = 0$. 考虑到温度场和热流分量在边界上是连续的, 可以得到边界条件如下:

$$\begin{cases} T_i|_{r=a,b,c} = T_{i+1}|_{r=a,b,c}, \\ \kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{r=a,b,c} = \kappa_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial r} \Big|_{r=a,b,c}, \end{cases} \quad (44)$$

$$\kappa_3 = \frac{2c^3 + b^3}{2(c^3 - b^3)} \kappa_0. \quad (45)$$

式中, $\kappa_4 = \kappa_0$ 且 κ_1 是内部物体的热导率. 假设内层是一个非常完美的绝热材料, 即 $\kappa_2 = 0$, 这使得外场无法穿透这一绝热层达到隐形区域. 那么对于热隐身衣来说, 内部隐形区隔热内部无梯度的第一个特性就算达到了, 剩下还有一个任务就是需消除外场的扭曲. 把方程 (44) 代入方程 (43) 由于 B_1^4 设为 0, 可以得到

很明显, 只要方程 (45) 一旦成立, 那么双层热隐身衣就能根据这个参数被制造出来. 上面的方程表明, 只要知道了三个参数中 $\kappa_3, \kappa_0, c/b$ 的两个, 第三个就能够被唯一确定下来. 如果 κ_3 和 κ_0 给定, c 与 b 的比例就可以得到, 这说明人们可以通过直接调节双层结构的几何尺度来实现热隐身效果而非改变采用的材料.

与此类似, 我们还可以推导出二维情况下的双层结构热隐身衣的参数, 其表达式为 $\kappa_3 = \kappa_0(c^2 + b^2)/(c^2 - b^2)$.

二维双层热隐身衣可以由有限元模拟和实验来验证其在热场中的表现. 如图 17 所示, 我们可以发现如同传统隐身衣一样, 被遮蔽的区域不存在温度梯度, 同时外场也不会被隐身区域内部的物体影响而产生扭曲. 实际制作出来的样品表现也非常好, 这种结构在实现热传导隐身功能上具有重大的意义: 它从第一性原理而非变换热学角度出发以非常简单的两种自然材料实现了热隐身衣.

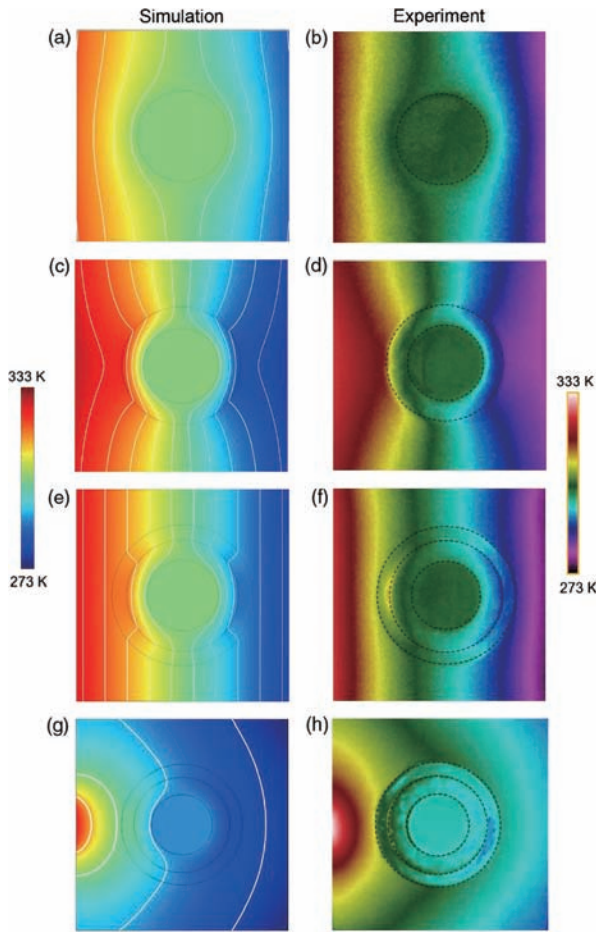


图 17 模拟得到的稳态温度分布和实验得到的测量结果图 (a), (b) 被隐形物体直接放在热场中的分布; (c), (d) 在物体外只放上内层; (e), (f) 双层热隐身衣的效果参数 $a = 6, b = 9.5$, 以及 $c = 12$ mm; (g), (h) 双层热隐身衣在点热源中的表现 [67]

Fig. 17. Simulated and measured temperature distributions for the steady state. (a), (b) The reference structure of the object inside; (c), (d) the reference structure of inner layer; (e), (f) the proposed bilayer cloak with $a = 6, b = 9.5$, and $c = 12$ mm; (g), (h) the proposed bilayer thermal cloak in the presence of a point heat source, emitting cylindrical heat fronts. Isothermal lines are also represented with white color in the panel [67].

3.6 热超构材料实验中的软物质材料

通过理论部分的介绍, 可以知道在变换空间中热导率的值取决于雅可比矩阵 J , 亦即热导率可以写成个一个各向异性的二阶张量. 但在自然界中存在的几乎所有材料, 其热导率多均匀且各向同性的. 因此实验中, 依据有效媒质理论, 人们会用两种或多种各向同性的不同材料通过一定的结构来构建出等效各向异性的热导率材料. 在实验中, 广泛的使用 PDMS 这种软物质材料作为实验中的基本素材来制备实验装置, 主要由于以下几点原因.

1) 对于两种不同的固体材料, 即使表面再光滑, 在接触时也会产生接触热阻, 如图 18 所示, 在固体和固体接触的界面会存在很多空隙, 空隙中存在着空气. 众所周知, 空气是热的不良导体, 热导率几乎接近于零, 这样一来, 会造成两个固体接触界面的温度不连续, 从而造成能量的大量损失, 给实验带来不必要的误差和困难. 然而, 若用软物质材料就可以很好地解决这个问题, 如图 18 (b) 所示, 由于软物质材料和固体界面能够充分接触, 也就不存在空气产生热阻的问题, 温度在不同的界面之间是连续的. 也正因此, 人们会选择软物质材料来制备实验样品.

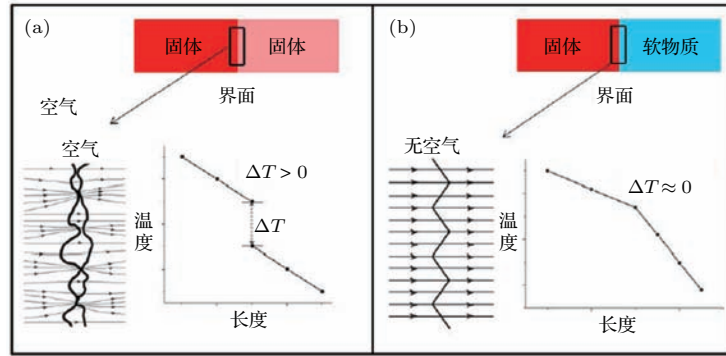


图 18 接触热阻示意图 (a) 固固界面间存在接触热阻, 这使得界面间温度不连续; (b) 固体与软物质界面接触后, 界面间的接触热阻可以忽略, 保证了界面间温度的连续

Fig. 18. A sketch showing the thermal contact resistance: (a) There exist thermal contact resistances between the solid-solid interfaces, where the temperature distribution is not continuous; (b) the interfaces are filled with soft matters, and the temperature distribution there holds continuity.

2) 软物质材料通常有比较低的热导率, 依据有效媒质近似理论, 实验中往往通过在高热导率材料上填充低热导率材料来调配出实验需要的参数. 基于第一点讨论, 由于软物质材料一方面可以降低接触热阻, 另一方面作为天然的热绝缘材料可以作为填充材料来降低整个系统的热导率, 从而得到预期的试验参数.

3) 软物质材料可以作为一层保护膜覆盖整个样品, 一方面可以保护金属样品表面免于被空气氧化, 保证了实验参数不会因为金属氧化而发生改变; 另一方面这层软物质保护膜可以有效地对抗实验中由空气对流带来的热耗散, 有助于提高实验测量的精度, 帮助控制实验变量.

4) 由于热超构材料的观测和实验验证往往需要红外热成像仪进行拍摄, 如果样品使用金属, 金属表面会产生反射, 导致热摄像机无法拍摄出样品表面的热分布图. 当软物质材料覆盖样品后, 会杜绝反射的发生, 从而使得实验测量变得可行. 在实验中, 为了保证能够拍摄到温度分布结果, 所有样品表面都需要使用软物质材料进行包膜处理.

4 非线性变换热学

最近, Li 等 [68,69] 考虑了更为普适的热传导过程, 即热导率会随着温度发生变化. 从而, 发展出了一套非常有趣的新型变换热学理论——温度相关的非线性变换热学. 利用这一新的理论工具, 人们可以设计出原有变换热学无法实现的新型热超构材料. 这一过程丰富了热超构材料的设计, 且这

种自耦合的新型变换方法还可以被推广到其他领域, 诸如声学、电磁学和光学等. 下面我们将详细介绍非线性变换热学的细节.

4.1 非线性变换热学理论

首先考虑稳态无热源热传导中的广义傅里叶定律:

$$\nabla \cdot [\kappa(T) \cdot \nabla T] = 0. \quad (46)$$

此方程中最值得注意的一点是张量 $\kappa(T)$, 它是温度 T 的函数. 我们需要知道方程 (46) 是否在坐标变换下仍然具有方程形式的不变形. 只有如此, 才能够继续得到新的变换空间中的热导率张量 $\tilde{\kappa}(T)$.

在一个 n 维曲线坐标空间中具有协变基 (g_1, g_2, \dots, g_n) , 那么方程 (46) 的分量形式可以写为

$$\partial_i \kappa^{ij}(T) \partial_j T + \Gamma_{ik}^i \kappa^{kj}(T) \partial_j T = 0, \quad (47)$$

上式中 Γ_{ik}^i 是克里斯托弗符号, 被定义为坐标 x^i 的微分 g_k 中第 i 个逆变分量; κ^{ij} 是给定空间热导率张量中的第 ij 个逆变分量. 此处采用了爱因斯坦求和约定, 使得累加符号 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$ 被约去.

方程 (47) 在引入度规张量 \mathbf{G} 后可以被进一步简化. \mathbf{G} 的分量被定义为 $g_{ij} = g_i \cdot g_j$. 克里斯托弗符号可以表示为

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} g^{il} \partial_k g_{il} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_k \sqrt{g}, \quad (48)$$

此处 g 是矩阵 g_{ij} 的行列式. 现在得到了方程 (46) 的分量形式:

$$\partial_i \sqrt{g} \kappa^{ij}(T) \partial_j T = 0. \quad (49)$$

在曲线坐标系中, 逆变基 (g^1, g^2, \dots, g^n) 的矩阵形式就是从物理空间变换到曲线空间的雅可比矩阵 \mathbf{J} . 于是可以得到

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \sqrt{\det(\mathbf{J}^{-T} \mathbf{J}^{-1})} \\ &= \det(\mathbf{J}^{-1}) = \det(\mathbf{J})^{-1}, \end{aligned} \quad (50)$$

式中上标 T 代表矩阵的转置. 当变量从曲线坐标系笛卡尔坐标系 x^i 变化到笛卡尔坐标空间 x'^i 后, 方程 (49) 会变成

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x'^i} \frac{\kappa^{ij}(T)}{\det(\mathbf{J})} \frac{\partial T}{\partial x^j} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^k} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\kappa^{ij}(T)}{\det(\mathbf{J})} \frac{\partial x^l}{\partial x^j} \frac{\partial T}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^k} \frac{\mathbf{J}_i^k \kappa^{ij}(T) \mathbf{J}_j^l}{\det(\mathbf{J})} \frac{\partial T}{\partial x^l} = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

可以从上面的式子看出两点: 第一, 在坐标变换下, 方程形式仍然保持不变; 第二, 就是我们想要得到的物理空间中的热导率张量 $\tilde{\kappa}(T)$ 和温度不相关的经典变换热学得到的新坐标空间中的热导率张量具有相同的形式:

$$\tilde{\kappa}(T) = \frac{\mathbf{J} \boldsymbol{\kappa}(T) \mathbf{J}^t}{\det(\mathbf{J})}, \quad (52)$$

其中 $\tilde{\kappa}(T)$ 和 $\boldsymbol{\kappa}(T)$ 就是热导率的矩阵形式.

现在温度相关变换热学的有效变换理论已经被证明, 我们可以寻求利用这种温度相关性来为设计新材料服务. 然而, 该变换本身可以如我们预期那样改变热传导过程吗? 因此下一步需要考虑是否可以得到一个等价于如方程 (52) 所描述的温度相关的热导率那样的温度相关的变换. 如此我们就可以将方程 (52) 改写为

$$\tilde{\kappa}(T) = \frac{\tilde{\mathbf{J}}(T) \boldsymbol{\kappa}_0 \tilde{\mathbf{J}}^t(T)}{\det[\tilde{\mathbf{J}}(T)]}, \quad (53)$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}_0$ 是与温度无关的背景热导率. 详细证明请参阅文献 [68] 的补充材料.

综上, 到这一步为止, 我们基本完成了非线性温度相关的变换热学理论铺垫. 最为重要的结论就是方程 (52), 这方程表明热导率和温度的相关性可以通过温度相关的变换引入. 这个推论将直接导致下一节介绍的开关热隐身衣和宏观热二极管.

4.2 开关热隐身衣及宏观热二极管

传统的热隐身衣可以保护中间区域免受外部的热流热通量影响, 且可以保证该区域稳定在一个恒定的温度值, 同时内部物体的存在也不会对外部的温度分布产生扰动, 如图 19 所示. 为了实现隐身效果, 考虑到极坐标, 我们需要在径向进行一个简单的压缩变换. 鉴于热隐身衣在前文已经讨论过多次, 在此直接给出热隐身衣的变换公式:

$$r' = r \frac{R_2 - R_1}{R_2} + R_1. \quad (54)$$

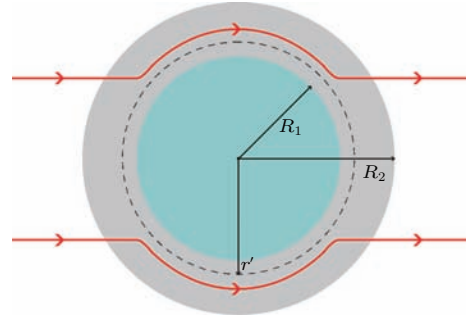


图 19 热隐身衣示意图, 其参数为 R_1 和 R_2 , 红色的箭头代表热流及其传递方向, 热隐身衣的存在不会影响 R_2 之外的空间, 热流也无法进入 R_1 以内的区域 [68]

Fig. 19. Schematic graph depicting a thermal cloak between radius R_1 and R_2 . The red lines with arrows denote the flow of heat: the cloak does not disturb the heat flow at a region with a radius larger than R_2 ; the heat flux cannot enter a central region with a radius smaller than R_1 [68].

为了能够实现对不同方向流过热流的不同响应, 从而制造宏观热二极管, 我们需要两种不同的热隐身衣: 一种在高温下可以展现隐身功能 (A 型隐身衣), 在低温下变为普通的背景材料; 第二种是在低温下出现隐身功能 (B 型隐身衣), 在高温下成为普通背景材料. 这两种具有开关功能的热隐身衣所具有的开关功能需要由外场温度的变化而被自动激活. 为了能够达到此目的, 一个办法是根据上面提到的内容对方程 (54) 进行改变:

$$r' = r \frac{R_2 - \tilde{R}_1(T)}{R_2} + \tilde{R}_1(T). \quad (55)$$

可见上式和方程 (54) 具有相同的形式, 区别在于 R_1 被替换为了 $\tilde{R}_1(T)$. 这里 A 型开关热隐身衣有 $\tilde{R}_1(T) = R_1 \left[1 - (1 + e^{\beta(T-T_C)})^{-1} \right]$, 而对于 B 型 $\tilde{R}_1(T) = R_1 / (1 + e^{\beta(T-T_C)})$. 此处 T_C 是开关隐身衣的相变点, 在其附近决定了热隐身衣的开和关;

β 是一个缩放因子, 用来调节相变的趋近速度, 在文中被设为 $2.5K^{-1}$.

迄今, 为了在隐身装置中实现开关功能, 我们需要得到热导率的张量. 在极坐标系中, 开关热隐身衣的张量写作 $\text{diag}[\tilde{\kappa}_r(T), \tilde{\kappa}_\theta(T)]$, 其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_r(T) &= \kappa_0 \frac{r' - \tilde{R}_1(T)}{r'}, \\ \tilde{\kappa}_\theta(T) &= \kappa_0 \frac{r'}{r' - \tilde{R}_1(T)}, \end{aligned} \quad (56)$$

κ_0 表示温度无关的背景材料的热导率.

接下来, 我们用 COMSOL 进行有限元模拟. 一个内径为 1 cm, 外径为 2 cm 的热隐身衣被放在一个 $8 \times 7 \text{ cm}^2$ 的模拟环境中, 如图 20 所示. 热流从左边界的高温区 T_H 流向右侧的低温区域, 其温度被设定为 T_L . 同时, 模拟环境的上下边界条件为热绝缘.

A 型热隐身衣的结果如图 20 (a) 和图 20 (b) 所示. 在图中, 处于高温环境下 ($T = 340\text{--}360 \text{ K}$), 我们可以观察到热隐身衣可以把内径内的物体隐藏起来并实现隐身功能. 然而, 在环境温度下降到足够低以后 ($T = 300\text{--}320 \text{ K}$), 此时隐身功能被关闭, 这意味着热隐身衣外部的温度场将会因为内部物体的存在而被扭曲, 就如同热隐身衣根本不存在一样. 由于 A, B 两型热隐身衣中存在反对称性质, 可以看出 B 型开关热隐身衣在低温环境下产生隐身衣作用, 在高温下等同于背景材料.

像方程 (56) 那样的热导率既不均匀又非常的各向异性, 而且还是温度相关的, 这使得实验实现非常困难. 实际上, 为了造出这样的材料, 我们可以通过简单地重复交替排布两种各向同性均匀、但必须温度相关的材料薄层来实现. 两种薄层的厚度分别为 d_1 和 d_2 , 热导率为 κ_a 和 κ_b . 为了简化计算,

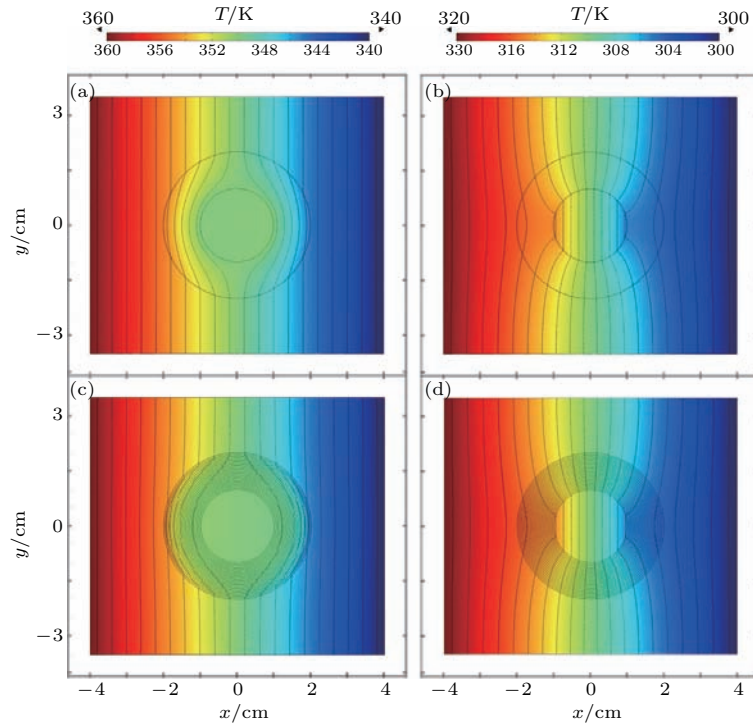


图 20 二维有限元模拟得到的开关热隐身衣 (a), (c) 当温度大于 340 K 时开启热隐身功能; (b), (d) 温度低于 320 K; 不同的颜色代表了温度分布, 黑色的线条代表等温线; 热流仍然从左向右传播, 上下边界为热绝缘; (a) 和 (b) 展示了热导率为方程 (56), (c) 和 (d) 展示了通过两个薄层交替 10 次得到的结果; 薄层的热导率 $\kappa_1(T)$ 和 $\kappa_2(T)$ 由有效媒质理论得到; 在 (a)—(d) 中, 一个热导率为 0.01 W/mK 的物体放在热隐身衣内部; 参数如下: $\kappa_0 = 1 \text{ W/mK}$, $\kappa_a = 0.1 \text{ W/mK}$, $\kappa_b = 10 \text{ W/mK}$; $R_1 = 1 \text{ cm}$, $R_2 = 2 \text{ cm}$; $T_c = 330 \text{ K}$ [68]

Fig. 20. Switchable thermal cloaks obtained by two-dimensional finite-element simulations: (a), (c) Switch on for the temperature above 340 K and (b), (d) switch off for the temperature below 320 K. The color surface denotes the distribution of temperature, where isothermal lines are indicated; heat diffuses from left to right; the upper and lower boundaries are the thermal insulation; (a) and (b) show the results of thermal conductivities calculated according to Eq. (56); (c) and (d) show the results of ten alternating layers of two sublayers, with $\kappa_1(T)$ and $\kappa_2(T)$ given by Eq. (57) (EMT). In (a)–(d), an object with thermal conductivity 0.01 W/mK is set in the central region with radius R_1 . Parameters: $\kappa_a = 0.1 \text{ W/mK}$, $\kappa_b = 10 \text{ W/mK}$, $R_1 = 1 \text{ cm}$ and $R_2 = 2 \text{ cm}$, and $T_c = 330 \text{ K}$ [68].

在本文中取 $d_1 = d_2$. 根据之前提到的有效媒质理论, 对于传统热隐身衣两种交替薄层的热导率和背景材料需要满足关系 $\kappa_a \kappa_b \approx \kappa_0^2$. 为了能够赋予传统隐身衣以随温度的开关功能, 一些相应的类似于之前我们对 $\tilde{R}_1(T)$ 进行的数学操作必须施加在 κ_a 和 κ_b 上. 因此我们可以得到温度相关的薄层热导率 $\kappa_1(T)$ 和 $\kappa_2(T)$:

$$\begin{aligned} \kappa_1(T) &= \kappa_a + \frac{\kappa_0 - \kappa_a}{1 + e^{\beta(T-T_C)}}, \\ \kappa_2(T) &= \kappa_b + \frac{\kappa_b - \kappa_0}{1 + e^{\beta(T-T_C)}}. \end{aligned} \quad (57)$$

(57) 式当 T 远大于 T_C 时, $\kappa_1(T) \rightarrow \kappa_a$, $\kappa_2(T) \rightarrow \kappa_b$; 当温度 T 远小于 T_C 时, $\kappa_1(T) \rightarrow \kappa_0$, $\kappa_2(T) \rightarrow \kappa_0$. 也就是说: 在高温情况下热隐身效果被激活, 在低温情况下隐身衣变成了和背景相同的材料. 方程 (57) 为我们实验上实现 (56) 的理论预测提供了非常方便且实际的指导. 接下来, 我们将多层交替结构实现 A 型开关热隐身衣的模拟结果展示在图 20 (c) 和图 20 (d) 中. 可见有效媒质理论和理论预测结果非常接近, 证明此方法的可行性. 通过同样的方法, 也可以实现 B 型隐身衣.

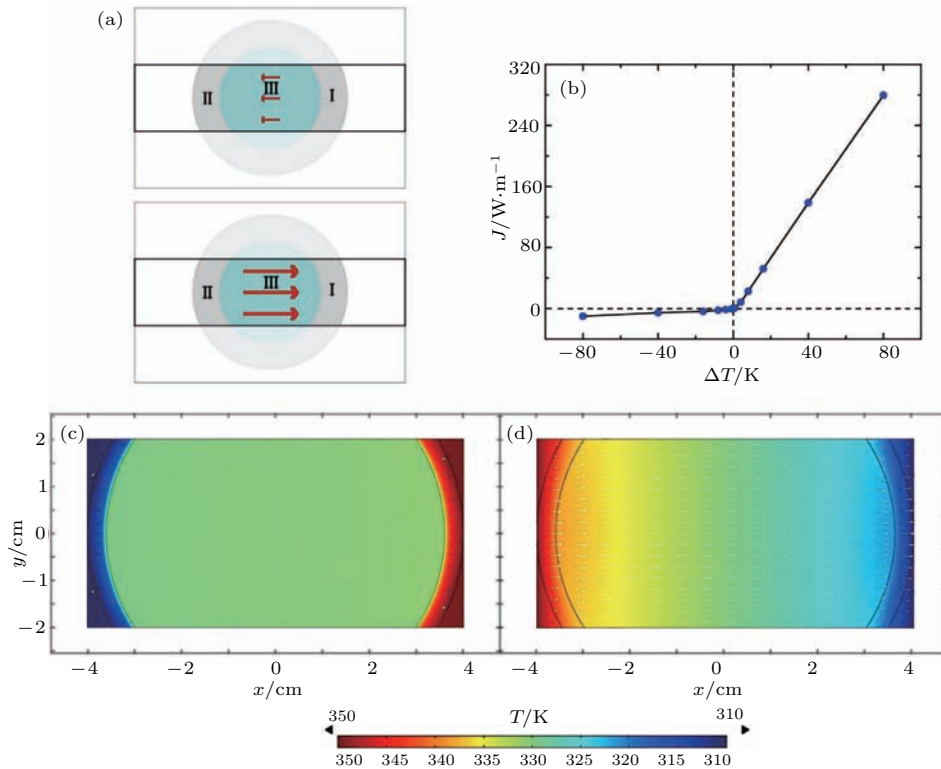


图 21 (a) 热二极管的示意图, 一个由黑色实线标出的矩形代表二极管区域, 外部的模糊区域代表了一个完整的热隐身衣设计, 但是在二极管中这些区域并不存在; I, II, III 三个区域在图中分别标出; 箭头指向代表了热流的方向, 而长度代表了热流大小; 热流从右侧到左侧比从右到左的要少很多; (b) 热流 J 和温度差的数据点图; (c) 和 (d) 是热二极管的二维有限元模拟图, (c) 为绝热情况, (d) 为热导通的情况, 颜色是温度值, 白色的箭头代表热流方向, 长度代表热流量; 上下边界同样是热绝缘, 中间区域热导率为 10 W/mK ; 其他参数: $\kappa_0 = 1 \text{ W/mK}$, $R_1 = 3.6 \text{ cm}$, $R_2 = 4 \text{ cm}$, 且 $T_C = 330 \text{ K}$ [68]

Fig. 21. (a) Sketch of a thermal diode, which is the rectangular area enclosed by the solid black lines. The blurred area outside is a reference and actually does not exist in the design. I, II, and III represent three regions, respectively. Here, the arrows indicate the direction of heat flow; the length of the arrows represents the amount of heat flux: the heat flux transferred from right to left (upper panel, the insulating case) is much smaller than that from left to right (lower panel, the conducting case); (b) heat current J versus temperature bias ΔT ; (c), (d) thermal diode obtained by two-dimensional finite-element simulations: (c) the insulating case and (d) the conducting case. The color surface denotes the distribution of temperature; the white arrows represent the direction of heat flow; the length of the white arrows indicates the amount of heat flux; the upper and lower boundaries are the thermal insulation. Thermal conductivities are calculated according to Eq. (3); an object with thermal conductivity 10 W/mK is set in the central region with radius R_1 . Parameters: $\kappa_0 = 1 \text{ W/mK}$, $R_1 = 3.6 \text{ cm}$, $R_2 = 4 \text{ cm}$, and $T_C = 330 \text{ K}$ [68].

上面关于开关热学隐身的讨论可以帮助我们设计一种宏观热二极管. 如图 21, 二极管装置包含三个区域: I, II 和 III. 区域 I 和 II 中分别放置 A 型热隐身衣和 B 型热隐身衣的一部分, 而 III 区域就是一个普通的热良导体. 与整个系统相比, 热隐身衣效果在二极管中依然存在, 但并非完美. 仍然会有少量的热流在绝缘状态下通过中间区域. 然而整个热隐身衣的被截断为 A 型和 B 型两部分, 这两部分的不对称性以及材料热导率对温度的不同响应造成了当热流从不同方向传过来时, 系统会有截然不同的热分布. 变换理论在此过程中扮演了非常重要的角色: 正是由于引入了各向异性的结构, 这种

结构将热通量引导至边界从而极大地增加绝热时的热流屏蔽效果.

有限元模拟结果显示如图 21 中所示, 宏观热二极管允许我们在热流从左流向右侧, 而当热流试图反方向即高温在右侧时, 这块材料会限制热流大小, 展现出热绝缘的性质. 这意味着热二极管可以通过在区域 I 和 II 中放置 A 型和 B 型开关隐身衣来实现. 此外, 对于不同的温度差, 我们计算了沿 $x = 0$ 方向的全部 x 分量积分得到的热流密度 J , 见图 21 (b). 该装置展现出了非常明显的整流效果, 根据目前的参数设置整流比甚至可以达到 30 左右.

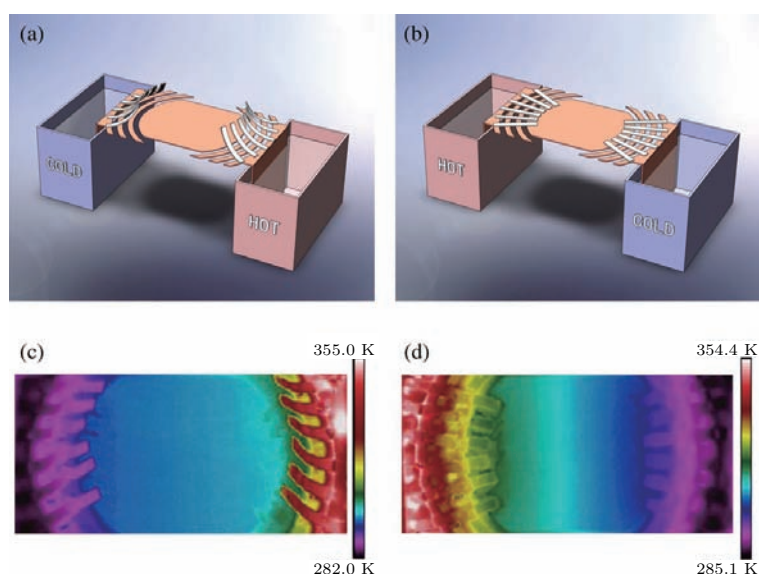


图 22 宏观热二极管的设计图 (a) 绝热情况; (b) 导通情况, 两种铜制的通信层状结构被放置在发泡塑料板上, 为了能够更清晰, 发泡塑料板在图中并未展示, 二极管的左右两侧被浸入在水中来提供稳定的温度: (a) 当左侧为冷水, 右侧为热水时, SMA 和铜双金属片将翘起来从而阻止热流流入内部区域, (b) 当两个容器调换为止后, 双金属片将会展平, 那么热流就会右左侧传向右侧; (c), (d) 实验上测量出宏观热二极管的温度分布, (c) 绝热, (d) 导通^[68]

Fig. 22. (a), (b) Scheme of experimental demonstration of the macroscopic thermal diode: (a) insulating case and (b) conducting case. Both the copper-made concentric layered structure and the central copper plate (both displayed in orange) are placed on an EPS plate which, for the sake of clarity, is not shown. The left and right sides of the diode are stuck in water to promote constant temperature boundary conditions. (a) When cold water is filled in the left container (light blue) and hot water in the right container (pale red), the bimetallic strips of SMA and copper (white) warp up and the device blocks heat from right to left. (b) When the two containers swap their locations, the bimetallic strips (white) flatten and the device conducts heat from left to right. (c), (d) Experimentally measured temperature distribution of the device: (c) insulating case and (d) conducting case^[68].

为了能够实现这种宏观热二极管, 我们同样也采用了有效媒质理论. 如之前讨论, 开关热隐身衣可以通过交替排列两种薄层得到. 薄层的热导率需要对温度非常敏感并且要在相变点即 T_C 左右发生剧烈的数值改变. 诚然这种现象可以在一些特定的相变材料中找到. 然而, 相变材料在操作中可能会遇到非常多的限制和不便. 因此在超构材料

精神的启发下 (通过传统材料进行特定结构组配来实现新颖的功能), 我们尝试用具有恒定常数热导率的材料来实现宏观热导率, 方法就是利用结构上的相变来代替求助于材料物理性质的相变来启动开关隐身效果. 根据设计要求, 器件的几何结构在温度变化时需要非常迅速地相应变化. 幸运的是, 我们发现形状记忆合金 SMA 可以提供我们想要的

形状变化. 如图 22 所示, 首先利用铜和发泡塑料泡沫薄层交替组成了热隐身衣的切片. 在相变温度附近, SMA 薄片将会发生形变, 这种形变可以驱动黏贴在 SMA 上的铜片接通或者断开与铜片的连接. 这种连接和断开状态可以被等效地看作是局部热导率的相变. 因此, 温度相关的热学材料就可以通过均匀的各向同性材料来实现. 同时, 因为宏观热二极管是开关热隐身衣的一部分, 因此一整块这样的材料可以通过相同的方法来实现. 实验结果在图 22 中展示. 在绝热情况下, 热流几乎无法进入内部区域. 相反在图 22 (d) 的中间区域存在非常明显的温度梯度. 同温度分布是水平的, 因此根据傅里叶定律, 我们可以认为当热导率相同时, 温度梯度大的情况其热流密度大.

综上, 一个具有整流作用的宏观热二极管被制造出来. 一个这样的二极管在热保护、热耗散、甚至热幻像等方面有非常多的潜在应用, 比如高效率的冰箱、太阳能元件、节能建筑或者军事伪装. 因此, 利用温度相关的热变换理论来构造具有非线性效应的材料, 可以制造人们需要的可以多向整流的宏观热超构材料. 由于变换理论的广阔应用范围, 本文中提到的开关隐身衣和整流二极管还可能被推广到地震波、声波、电磁波甚至物质波等其他领域.

4.3 非稳态非线性变换理论

之前建立的稳态温度相关变换理论, 只考虑了稳态的热传导情况. 下面我们将把该理论拓展到非稳态热传导领域. 考虑到无热原的 n 维广义傅里叶定律, 可以得到瞬时热传导方程:

$$\frac{\partial \rho c(T) T}{\partial t} = \nabla \cdot [\kappa(T) \cdot \nabla T], \quad (58)$$

式中 ρ 是质量密度, c 是比热容, $\kappa(T)$ 是依赖于温度的热导率张量. 将乘积 $\rho c(T)$ 视为一个整体并认为它是温度相关的. 通过将方程 (58) 在曲线坐标系 $(x^i, i = 1, 2, \dots, n)$ 表示为对应的变换, 可以得到需要的热导率在形式上和稳态的情况一致:

$$\tilde{\kappa}(T) = \frac{\mathbf{J} \kappa(T) \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})}. \quad (59)$$

另一个对于瞬时超构材料额外的要求是密度和比热容的乘积需要再乘上雅克比矩阵行列式的倒数:

$$\tilde{\rho} \tilde{c}(T) = \frac{\rho c(T)}{\det(\mathbf{J})}. \quad (60)$$

这一要求使得在 $\tilde{\rho}$ 和 \tilde{c} 中至少有一个是径向位置相关的函数, 这就大大增加了设计和实验实现的难度. 之后我们会展示一种简单的方法来处理这个问题.

在稳态非线性热材料的研究中 $\tilde{\kappa}(T)$ 可以表示为

$$\tilde{\kappa}(T) = \frac{\tilde{\mathbf{J}}(T) \kappa_0 \tilde{\mathbf{J}}(T)^T}{\det[\tilde{\mathbf{J}}(T)]}. \quad (61)$$

在 (61) 中 $\tilde{\mathbf{J}}(T)$ 是与温度相关的坐标变换对应的雅克比矩阵, 而 κ_0 是一个恒定的不依赖温度的热导率. 类似地, 也可以得到:

$$\tilde{\rho} \tilde{c}(T) = \frac{\rho_0 c_0}{\det[\tilde{\mathbf{J}}(T)]}, \quad (62)$$

其中 ρ_0 和 c_0 分别是温度相关的质量密度和比热容. 基于上面的表达式, 可以制造一个在不同温度下表现完全不同的热超构材料. 我们将以开关热聚集器为例展示非稳态非线性变换热学理论.

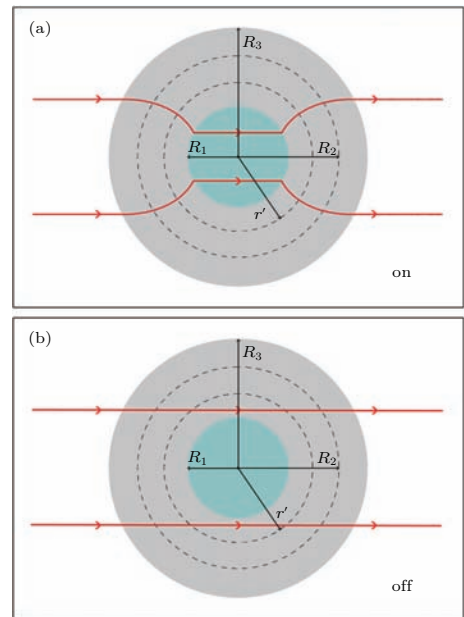


图 23 开关热聚集器的示意图 (a) 和 (b) 分别代表热聚集功能的开启和关闭; 红色箭头代表热流, R_1 和 R_3 代表内径和外径 [69]

Fig. 23. Schematic graphs of a switchable thermal concentrator when the concentrating effect is switched (a) on or (b) off. The red lines with arrows represent the flow of heat. R_1 and R_3 denote the interior and exterior radius, respectively. R_2 and r' are also indicated [69].

开关热聚集器的原理如图 23 所示. 所有的讨论仍在极坐标范畴下进行. 器件是一个灰色的环, 有内径 R_1 和外径 R_3 . 聚集器可以提高内部区域的

温度梯度, 且不会对外场的温度分布造成任何影响. 具体的热聚集器变换可以参考前面的章节, 以及方程 (19) 和 (20). 根植于之前的理念, 瞬时非线性变换热学赋予了传统热聚集器在不同温度下具有开启热聚集功能和关闭热聚集变为普通材料的功能. 具体来说, 材料可以被设计为在温度低于特定值 T_C 时是传统的热聚集器, 而当温度高于此值时变成和背景热导率相同的材料.

开关功能可以通过修饰方程 (20) 得到. 要注意一个等价变换 $r' = r$ 和 $\theta' = \theta$ 不会对温度分布和热流造成影响. 把方程 (20) 中的 R_2 替换成 R_1 , 我们可以精确地得到一个等价映射. 因此可以构建一个方程 $R^*(T)$, 它可以在温度低于 T_C 时取 R_1 值, 而当温度上升到 T_C 之上后, 取值变为 R_2 . 这样的 $R^*(T)$ 具有如下形式:

$$R^*(T) = R_1 + \frac{(R_2 - R_1)}{1 + e^{\beta(T-T_C)}}, \quad (63)$$

式中 β 是缩放因子, 用来控制参数对温度的灵敏性. 那么可以实现开关热聚集器的新变换, 定义为 $r' = F(r, T)$, $\theta' = \theta$.

$$F(r, T) = \begin{cases} r \frac{R_1}{R^*(T)}, & r' < R_1, \\ r \frac{R_3 - R_1}{R_3 - R^*(T)} + R_3 \frac{R_1 - R^*(T)}{R_3 - R^*(T)}, & R_1 \leq r' \leq R_3, \end{cases} \quad (64)$$

接下来, 一个希望得到的器材在极坐标下的热导率分布, 结果如下:

$$\text{对于 } r' < R_1, \quad \begin{cases} \tilde{\kappa}_r(T) = \kappa_0, \\ \tilde{\kappa}_\theta(T) = \kappa_0; \end{cases} \quad (65)$$

$$\text{对于 } R_1 \leq r' \leq R_3, \quad \begin{cases} \tilde{\kappa}_r(T) = \kappa_0 \left[1 + \frac{R_3 R^*(T) - R_1}{r' R_3 - R^*(T)} \right], \\ \tilde{\kappa}_\theta(T) = \kappa_0 \left[1 + \frac{R_3 R^*(T) - R_1}{r' R_3 - R^*(T)} \right]^{-1}. \end{cases} \quad (66)$$

瞬时的温度相关变换理论不仅仅要求热导率做出变化, 还要求质量密度和热容的乘积也要按照方程 (61) 进行变换. 对于开关热聚集器而言, 这个乘积可以用下式进行表示:

$$\frac{\rho_0 c_0}{\det [\tilde{J}(T)]} =$$

$$\begin{cases} \left[\frac{R^*(T)}{R_1} \right]^2, & r' < R_1, \\ \left[1 + \frac{R_3 R^*(T) - R_1}{r' R_3 - R^*(T)} \right] \left[\frac{R_3 - R^*(T)}{R_3 - R_1} \right]^2, & R_1 \leq r' \leq R_3. \end{cases} \quad (67)$$

需要注意到, 尽管热导率在内部区域是不变的, 密度和热容的乘积还是需要做出调整. 这个事实带来了额外的困难. 为了克服质量密度和热容乘积带来的新问题, 我们提出一种近似方法来让 $\tilde{\rho}\tilde{c}(T) = \rho c$. 不同于广泛应用于非稳态热隐身衣中的方法, 我们建议对传统的变换热聚集器不做任何修正. 原因在于当聚集器中的 $R^*(T)$ 接近 R_2 时, $\det^{-1} [\tilde{J}(T)]$ 在整个区域中的平均值为 1:

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^{R_3} \det^{-1} [\tilde{J}(T)] 2\pi r' dr'}{\pi R_3^2} \\ &= \frac{1}{\pi R_3^2} \left[\int_0^{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 2\pi r' dr' \right. \\ & \quad \left. + \int_{R_1}^{R_3} \left(1 + \frac{R_3 R_2 - R_1}{r' R_3 - R_2} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_2} \right)^2 2\pi r' dr' \right] = 1. \quad (68) \end{aligned}$$

另外, 当聚集功能关闭后 $R^*(T)$ 接近 R_1 , 在空间各点中 $\det^{-1} [\tilde{J}(T)] = 1$. 因此热容和质量密度的乘积不需要有任何的修正.

最后, 我们来看非稳态开关热聚集器在二维有限元模拟中的表现. 为了将温度归一化, 所有长度、温度、热导率和时间的单位被分别定义为: $L_x/8$ (L 是模拟环境的宽度和高度), 初始温度值, 背景热导率 κ_0 和 $L_x^2 \rho c / 64 \kappa_0$. 模拟图如图 24 所示. 可以发现如理论预测, 开关热聚集器的设计效果在理论模拟中表现良好.

可见非线性温度相关变换热学具有非常强大的功能, 通过设计不同的温度相关变换, 可以在不同温度下令热超构材料具有完全不同的功能. 这是之前变换理论不可能具有的功能. 除此之外, 除了自场耦合以外, 该理论对多场耦合和多场调控具有很强的指导作用. 鉴于变换理论在物理学各个领域都有涉及, 此理论具有非常广泛的推广和应用前景. 希望非线性的变换理论能够在其他不同领域激起更多的想法和新颖的设计.

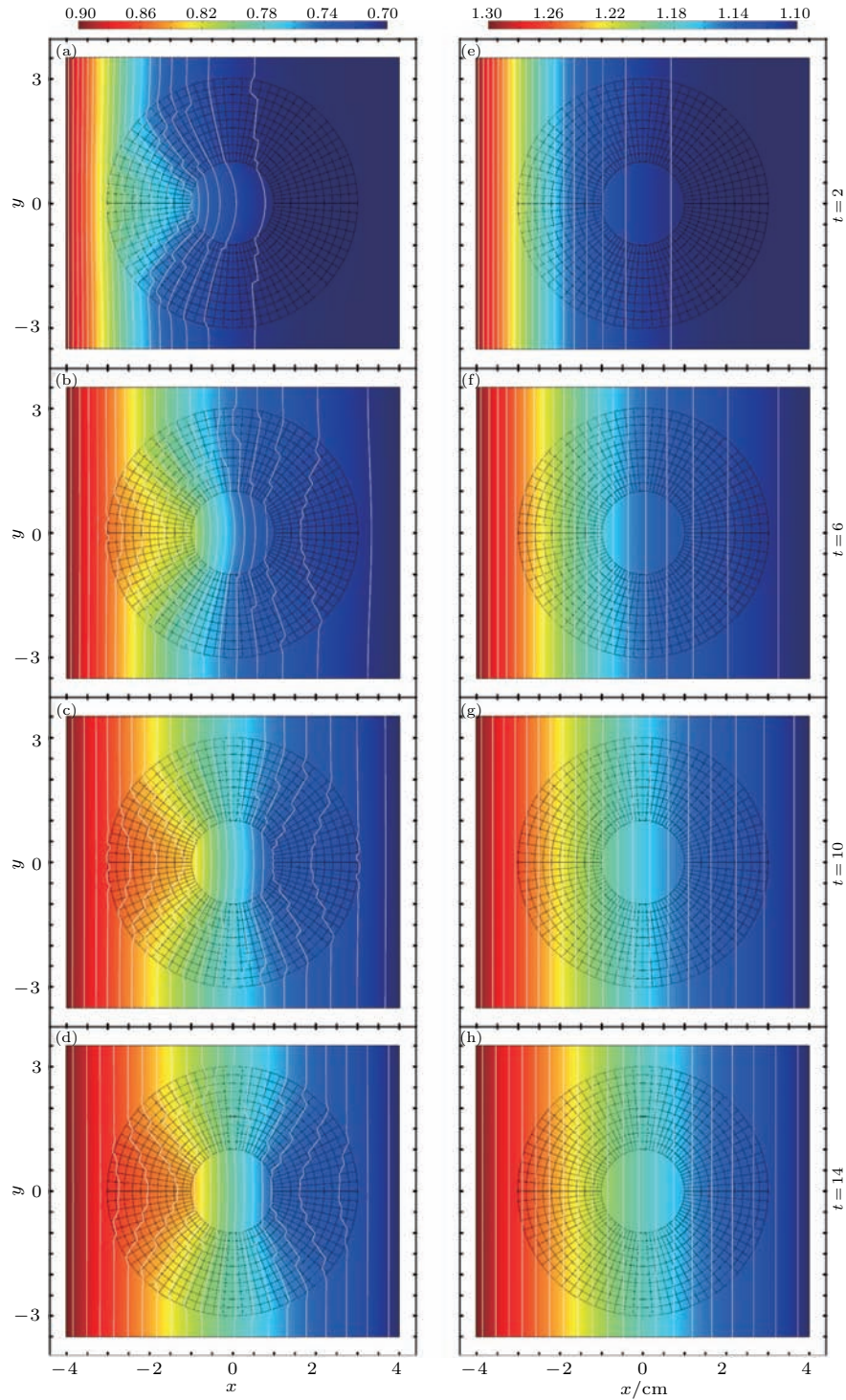


图 24 开关热聚集器的有限元模拟结果 所有的物理量都被归一化, 热流从左流向右侧, 两边的温度被锁定, 而上下边界为热绝缘, 相变温度被设为 1, 期间在温度低于 0.9 时表现如同热聚集器 (e)—(h), 当温度大于 1.1 时整体变为和背景热导率相同的材料; 颜色代表温度分布, 白色的线是等温线; 我们选取了不同时间下的温度分布截图, 其中 (a), (e) $t = 2$; (b), (f) $t = 6$; (c), (g) $t = 10$; (d), (h) $t = 14$ [69]

Fig. 24. Results of the finite-element simulations for the switchable concentrator. All the physical quantities adopted are nondimensionalized, as listed in the text. Heat conducts from left to right throughout the time and the temperatures on two lateral boundaries are fixed. Upper and lower boundaries are thermally insulated. The critical temperature T_c is set to be 1. (a)–(d) The device functions as a concentrator at temperature below 0.9 and (e)–(h) the device is turned to be the same as the background when the temperature is higher than 1.1. The temperature distribution is denoted by the rainbow color surfaces, while the isothermal lines are indicated by the white lines. We take the snapshots of temperature distributions at time (a), (e) $t = 2$; (b), (f) $t = 6$; (c), (g) $t = 10$; and (d), (h) $t = 14$ [69].

5 结 论

变换热学为随心所欲地控制热流提供了一种理论方法, 此外, 它为扩散系统带来了坐标变换理论. 回顾当前热超构材料的发展, 可以看出传统的热超构材料(热隐身衣、热聚集器、热旋转器)通常由容易获取的廉价材料组成, 在材料内部实现热流操控的同时, 不会对外场的热传导产生影响. 这一性质可以让这些材料作为非侵入式的热流调节元件, 服务于大型热传导器件的内部. 而该领域最新的进展——非线性热超构材料可以用来设计并制成宏观热二极管和随温度变化可改变自身功能的智能材料. 利用该原理设计的热二极管具有非常可观的整流比, 有望成为热学计算机的基础元件, 例如: 将热学计算机与传统电子计算机杂化, 可以“变废为宝”, 利用热能进行计算从而提高现有计算机的效率, 并减少能量损耗. 诚然, 变换热学的发展历史还非常短暂, 接下来, 我们认为它可能会在以下四个方向取得新的发展.

1) 与变换光学相关的方向

自2006年以来, 变换光学发展出了很多新的和重要的推论. 因此, 非常多的具有新颖电磁波超构材料被设计出来甚至实验上得以实现. 其中, 电磁波隐身衣、聚集器、旋转器等在热学中都有了对应的副本. 另一方面, 基于变换光学, 更多的根植于波动本质符合波动方程描述的电磁波器件比如超散射体等也应运而生. 像这种器件在热传导中并没有相似的设计, 这主要是由于热传导的主导方程式——扩散方程. 然而, 这些电磁场设备能够激发更多的热场中的新材料设计, 比如, 电磁场中的超散射体可能帮助科研工作者设计一种热超级吸收器用来收集热能. 在变换光学理论的影响下, 还有很多具有新颖功能的其他物理场中的超构材料可以被引入热传导领域并发展为具有特殊功能的热超构材料.

2) 与热传导相关的方向

当然, 在实验上非常有必要通过各种不同的结构实现理论上提出的几种热超构材料, 并进一步在各个领域应用它们去随心所欲地控制热流. 那么为了将来的研究, 缩小基础研究和实际应用之间的鸿沟需要被提上日程. 除此之外, 在此还要多提及一下我们之前讨论的全部器材都是被放置在外场中,

且都是不考虑热源存在的. 我们也许可以将热源纳入考量, 设计一种新的超结构材料将热源包裹, 制成一种超级热收集器. 这种器件可以完全保存热源耗散出来的热能, 从而让热源保持恒温, 或者将这些热能无损地应用到其他需要热能的地方. 这看起来难以置信, 但很有可能实现. 这是因为坐标变换为材料设计提供了巨大的自由度. 我们甚至可以将一个换装区域拉伸到无穷远处, 从而使得耗散的热能永远也无法离开这个区域. 很明显, 这种超级热能收集器具有非常多的潜在应用, 比如石油的油管输送等.

3) 与三种热传递方式相关的方向

众所周知, 热传递有三种方式, 即: 热传导、热对流以及热辐射. 宽泛地讲, 在固体中热传导占据主导作用, 尽管热辐射和对流是不可避免的, 但热对流的相对影响非常有限. 即便如此, 就算在固体中为了精确控制热流, 我们也需要考虑到至少两种热传递方式的共同作用. 幸运的是, 由于热辐射是通过电磁波的形式发散的, 这可以被纳入变换光学的控制领域. 那么, 为了能够更好地控制固体中的热流, 有必要将变换光学和变换热学结合起来. 在液体和气体中, 热对流是主要的热传递形式, 当然其他两种方式仍然伴随存在. 为此, 人们需要建立热对流方程所满足的变换流体理论, 并设计相应的超构器件. 然后再与之前提到的热传导(变换热学)材料和热辐射(变换光学)材料结合起来. 很明显, 这会遭遇非常多的困难和挑战. 另一方面, 值得一提的是除了在固体、液体和气体中的热传导作用, 热还能够通过热辐射在真空中传递. 在这种情况下, 我们可以利用变换光学理论来设计对应的热超构材料. 然而, 考虑到热辐射的形式, 此处存在一个巨大的挑战, 那就是如何制造一个能够在全频域下都能工作的电磁波材料. 在这方面, 仍需要更多的研究和理论来克服.

4) 与组成材料性质相关的方向

热超构材料是通过将不同材料组分以特殊结构组配的新型材料. 对于材料组分, 很有必要将现在的线性响应推广到非线性响应. 更进一步地讲, 人们还应该研究宏观热传导机理和微观热传导机理之间的异同, 从而设计全尺度应用的材料. 同时, 一些新产生的微观热材料也将影响人们对宏观热传导的理解, 并激发更多的研究. 这类探索在芯片降温和太阳能收集上有非常巨大的潜在应用价值.

总而言之, 传统的变换热学理论和温度相关的非线性变换热学理论以及在其指导下设计的热超构材料可以在经济、民生、军事等领域产生更多的具有奇异功能的新颖材料。

参考文献

[1] Veselago V G 1968 *Physics-USPEKHI* **10** 509
 [2] Leonhardt U 2006 *Science* **312** 1777
 [3] Pendry J B, Schurig D, Smith D R 2006 *Science* **312** 1780
 [4] Alitalo P, Tretyakov S 2009 *Mater. Today* **12** 22
 [5] Padilla W J, Basov D N, Smith D R 2006 *Mater. Today* **9** 28
 [6] Zhao Q, Zhou J, Zhang F L, Lippens D 2009 *Mater. Today* **12** 60
 [7] Wood J 2008 *Mater. Today* **11** 40
 [8] Jiang W X, Chin J Y, Cui T J 2009 *Mater. Today* **12** 26
 [9] Lax M, Nelson D F 1976 *Phys. Rev. B* **13** 1777
 [10] Leonhardt U, Philbin T G 2009 *Prog. Opt.* **53** 69
 [11] Schurig D, Pendry J B, Smith D R 2006 *Opt. Express* **14** 9794
 [12] Milton G W, Briane M, Willis J R 2006 *New J. Phys.* **8** 248
 [13] Shalaev V M 2008 *Science* **322** 384
 [14] Chen H Y, Chan C T, Sheng P 2010 *Nature Mater.* **9** 387
 [15] Pendry J B, Maier S A 2012 *Science* **337** 549
 [16] Schurig D, Mock J J, Justice B J, Cummer S A, Pendry J B, Starr A F, Smith D R 2006 *Science* **314** 977
 [17] Chen H Y, Chan C T 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 183518
 [18] Cummer S A, Schurig D 2007 *New J. Phys.* **9** 45
 [19] Norris A N 2008 *Proc. R. Soc. Lond. A: Math. Phys. Sci.* **464** 2411
 [20] Farhat M, Enoch S, Guenneau S, Movchan A B 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 134501
 [21] Liu B, Huang J P 2009 *Euro. Phys. J. Appl. Phys.* **48** 093901
 [22] Brun M, Guenneau S, Movchan A B 2009 *Appl. Phys. Lett.* **94** 061903
 [23] Su Q, Liu B, Huang J P 2011 *Front. Phys.* **6** 65
 [24] Zhang S, Xia C G, Fang N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 024301
 [25] Parnell W J, Norris A N, Shearer T 2012 *Appl. Phys. Lett.* **100** 171907
 [26] Farhat M, Guenneau S, Enoch S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 024301
 [27] Milton G W, Nicorovici N A P 2006 *Proc. R. Soc. Lond. A, Math. Phys. Sci.* **462** 3027
 [28] Stenger N, Wilhelm M, Wegener M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 014301
 [29] Chen H Y, Yang J, Zi J, Chan C T 2009 *EPL* **85** 24004
 [30] Zhang S, Genov D A, Sun C, Zhang X 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 123002
 [31] Greenleaf A, Kurylev Y, Lassas M, Uhlmann G 2008 *New J. Phys.* **10** 115024
 [32] Diatta A, Guenneau S 2011 *J. Opt.* **13** 024012
 [33] Greenleaf A, Kurylev Y, Lassas M, Leonhardt U, Uhlmann G 2012 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **109** 10169
 [34] Fan C Z, Gao Y, Huang J P 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 25190767
 [35] Chen T Y, Weng C N, Chen J S 2008 *Appl. Phys. Lett.* **93** 114103
 [36] Li J Y, Gao Y, Huang J P 2010 *J. Appl. Phys.* **108** 074504
 [37] Yu G X, Lin Y F, Zhang G Q 2011 *Front. Phys.* **6** 70
 [38] Guenneau S, Amra C, Veynante D 2012 *Opt. Express* **20** 8207
 [39] Narayana S, Sato Y 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 214303
 [40] Schittny R, Kadic M, Guenneau S, Wegener M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 195901
 [41] Guenneau S, Amra C 2013 *Opt. Express* **21** 6578
 [42] Han T C, Yuan T, Li B W, Qiu C W 2013 *Sci. Rep.* **3** 1593
 [43] Guo Y, Jacob Z 2013 *Opt. Express* **21** 15014
 [44] Narayana S, Savo S, Sato Y 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 201904
 [45] Ma Y G, Lan L, Jiang W, Sun F, He S L 2013 *Npg. Asia Mater.* **5** e73
 [46] He X, Wu L Z 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 211912
 [47] Gao Y, Huang J P 2013 *EPL* **104** 44001
 [48] Ball P 2012 *Nature Mater.* **11** 666
 [49] Shen X Y, Huang J P 2014 *Int. J. Heat Mass Trans.* **78** 1
 [50] Shen X Y, Chen Y X, Huang J P 2016 *Commun. Theor. Phys.* **65** 375
 [51] Chen Y X, Shen X Y, Huang J P 2015 *Euro. Phys. J. Appl. Phys.* **70** 20901
 [52] Zhu N Q, Shen X Y, Huang J P 2015 *AIP Adv.* **5** 053401
 [53] Han T C, Bai X, Thong T L J, Li B W, Qiu C W 2014 *Adv. Mater.* **26** 1731
 [54] Chen H S, Wu B I, Zhang B, Kong J A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 063903
 [55] Ruan Z C, Yan M, Neff C W, Qiu M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 113903
 [56] Yan M, Ruan Z C, Qiu M 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 233901
 [57] Greenleaf A, Lassas M, Uhlmann G 2003 *Physiol. Meas.* **24** 413
 [58] Huang J P, Yu K W 2006 *Phys. Rep.* **431** 87
 [59] Xia T K, Hui P M, Stroud D 1990 *J. Appl. Phys.* **67** 2736
 [60] You C Y, Shin S C, Kim S Y 1997 *Phys. Rev. B* **55** 5953
 [61] Shi L H, Gao L 2008 *Phys. Rev. B* **77** 195121
 [62] Nan C W, Birringer R, Clarke D R, Gleiter H 1997 *J. Appl. Phys.* **81** 6692
 [63] Gao L, Zhou X F, Ding Y L 2007 *Chem. Phys. Lett.* **434** 297
 [64] Mackay T G, Lakhtakia A 2005 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **7** 669
 [65] Landau L D, Lifshitz E M 1984 *Electrodynamics of Continuous Media* (city Amsterdam: Elsevier)

- [66] Zhang M, Che Z H, Chen J H, Zhao H Z, Yang L, Zhong Z Y, Lu J H 2010 *J. Chem. Eng. Data* **56** 859
- [67] Han T C, Gao D L, Thong T L J, Li B W, Qiu C W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 054302
- [68] Li Y, Shen X Y, Wu Z H, Huang J Y, Chen Y X, Ni Y S, Huang J P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 195503
- [69] Li Y, Shen X Y, Huang J P, Ni Y S 2016 *Phys. Lett. A* **380** 1641

SPECIAL TOPIC—Progress in Soft Matter Research

Transformation thermotics: thermal metamaterials and their applications*

Shen Xiang-Ying Huang Ji-Ping[†]

(Department of Physics and State Key Laboratory of Surface Physics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(Received 26 May 2016; revised manuscript received 4 July 2016)

Abstract

Heat transportation is one of the most ubiquitous phenomenon in the mother nature. Manipulating heat flow at will is of tremendous value in industry, civil life and even military. It would be a common sense that in different materials thermal properties are different. According to this knowledge people may design thermal materials to control heat conduction. One of the most common and successful example is blanket, which has been invented for thousands of years to keep us warm in cold days and keep icecream cool in summer. However, those great inventions are not powerful enough to manipulate heat flow at will. So there are still a lot of demands for designing the so-called metamaterials which have special properties that should not exist in nature.

In 2006, Leonhardt and Pendry's research group (Pendry, Schurig and Smith) independently proposed a type of optical metamaterial which is also called invisible cloak. This device is well known for bending light around an object to make it invisible. Such a significant progress soon enlightened a lot of scientists in different aspects since it offers a powerful approach to design metamaterials. The principle of invisible cloak, which is concluded as transformation optics has been applied to light waves, acoustic, seismic, elastic waves, hydrodynamics and even matter waves as they all satisfy with wave equation.

Although the conduction equation which governs the process of heat conduction is totally different from wave equation, from 2008 to 2012, Fan's group and Guenneau's group established the theoretical system of transformation thermotics. Since then, many thermal metamaterials with novel thermal properties have been figured out. Therefore, a boom in transformation thermotics and thermal metamaterials has begun.

In this article, we will introduce some most recent achievements in this field, including novel thermal devices, simplified experimental method, macro thermal diode based on temperature dependent transformation thermotics, and the important role that soft matters play in the experimental confirmations of thermal metamaterials.

These works pave the developments in transformation mapping theory and can surely inspire more designs of thermal metamaterials. What is more, some approaches proposed in this article provide more flexibility in controlling heat flow, and it may also be useful in other fields that are sensitive to temperature gradient, such as the Seebeck effect and many other domains where transformation theory is valid.

Keywords: transformation thermotics, thermal metamaterial, soft matter

PACS: 81.05.Xj, 74.25.fc, 44.90.+c

DOI: 10.7498/aps.65.178103

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11222544), and the Science and Technology Commission of Shanghai Municipality, China (Grant No. 16ZR1445100).

† Corresponding author. E-mail: jphuang@fudan.edu.cn