

分数阶 Willis 环脑动脉瘤系统的混沌动力学分析与控制

高飞 李腾 童恒庆 欧卓玲

Chaotic dynamics of the fractional Willis aneurysm system and its control

Gao Fei Li Teng Tong Heng-Qing Ou Zhuo-Ling

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 230502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.230502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.230502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I23>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于频域信息交换的随机共振研究

Stochastic resonance based on frequency information exchange

物理学报.2016, 65(22): 220501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.220501>

具有时滞的抑制性自突触诱发的神经放电的加周期分岔

Period-adding bifurcation of neural firings induced by inhibitory autapses with time-delay

物理学报.2016, 65(21): 210502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.210502>

基于事件触发采样控制的异构混沌系统主从同步

Event-triggered heterogeneous master-slave synchronization with sampled-data control

物理学报.2016, 65(20): 200501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.200501>

基于忆阻器反馈的 Lorenz 超混沌系统及其电路实现

Memristor-based Lorenz hyper-chaotic system and its circuit implementation

物理学报.2016, 65(19): 190502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.190502>

非自治分数阶 Duffing 系统的激变现象

Crises in a non-autonomous fractional-order Duffing system

物理学报.2016, 65(18): 180502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.180502>

分数阶 Willis 环脑动脉瘤系统的混沌动力学分析与控制*

高飞[†] 李腾 童恒庆 欧卓玲

(武汉理工大学理学院, 武汉 430070)

(2016年6月5日收到; 2016年9月6日收到修改稿)

整数阶 Willis 环脑动脉瘤系统在描述表现出黏弹性的血液在具有繁杂弹性的血管系统内的复杂血流动力学机理上有一定局限性; 鉴于此, 本文利用分数阶 Caputo 微分及其理论, 提出分数阶 Willis 环脑动脉瘤模型 (FWAS): 证明 FWAS 解的存在惟一性; 利用相图和 Poincaré 截面证明 FWAS 具有混沌特性, 是其整数阶形式的合理推广; 结合分岔图和倍周期分岔讨论脉冲压、系统阶次对 FWAS 的影响; 采用通过非自治非线性系统的稳定性条件设计合理的控制器, 以药物激励项函数作为脉冲函数进行脉冲控制这两种方法, 对 FWAS 进行有效的控制. 本文对 FWAS 的探讨将对脑动脉瘤的研究具有一定的理论指导意义.

关键词: 分数阶 Willis 环脑动脉瘤系统, 分数阶 Caputo 微分, Poincaré 截面, 混沌控制

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.65.230502

1 引言

Willis 环脑动脉瘤系统 (WAS) 是近年来提出的具有较强的生物和医学背景的非自治非线性系统. 脑动脉瘤是由多种原因造成脑动脉血管壁上的异常膨出, 因瘤壁不健全, 易发生破裂, 造成致残率和死亡率都很高. Willis 环 (颅底动脉环) 是脑动脉瘤的高发病区, 而血流复杂动力学机理是导致脑动脉瘤甚至破裂的主要因素^[1].

曹进德和刘天一^[2]提出具有阻尼项的 Willis 环脑动脉瘤系统, 证明在相应条件下至少存在一个周期解. Nieto 和 Torres^[3]证明 Willis 环脑动脉瘤系统的周期边值问题解的存在性. 杨翠红和朱思铭^[4]用 Melnikov 方法得到 Willis 环脑动脉瘤系统存在 Devaney 混沌的条件. 古元凤和肖剑^[5]研究了稳定和不稳定两种生理状态下 Willis 环脑动脉瘤系统的混沌特性, 采用随机相位的扰动有效控制 Willis 环脑动脉瘤混沌系统. 李医民和于霜^[6]设计了一种自适应控制器实现了两个参数不相同

的 Willis 环脑动脉瘤混沌系统的同步. 孙梦晗等^[7]引入降压药物激励项函数构建了一个新的 Willis 环脑动脉瘤模型, 通过相图和 Poincaré 截面证明了降压药物有助于脑动脉瘤病情的控制. 由此可见, Willis 环脑动脉瘤系统的研究十分全面、深入, 但是以整数阶 Willis 环脑动脉瘤系统为探讨对象描述血流复杂动力学机理有一定的缺陷.

一方面, 血液是一种软物质, 其运动规律特殊且复杂, 同时血管系统是比较繁杂的弹性管道系统; 而且血液作为软物质^[8]中的黏弹性体^[9]同时具有流体的黏性和固体的弹性, 传统的整数阶导数模型并不能有效地描述其复杂性. 另一方面, 分数阶微积分适用于刻画生物体内一些复杂无序的过程, 无序程度由分数阶阶次加以控制和描述, 具有时间记忆的特性, 被广泛应用于生物学^[10,11]与医学^[12,13], 因而采用分数阶微积分刻画血液的运动是相对合理的.

本文结合分数阶微积分的基本理论, 运用分数阶 Caputo 微分将整数阶 Willis 环脑动脉瘤系统拓展到分数阶 Willis 环脑动脉瘤 (FWAS). 采用经

* 国家自然科学基金重大研究计划 (批准号: 91324201) 和湖北省自然科学基金 (批准号: 2014CFB865) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: hgaofei@gmail.com

典的动力学分析方法(包括相图、时间序列图、Poincaré截面对FWAS进行详细的分析. 本文的主要结构如下: 第二节简要介绍分数阶微积分的基本理论知识; 第三节构建FWAS, 证明该系统解的存在惟一性定理, 并且结合相图和Poincaré截面, 数值论证FWAS仍然呈现出整数阶时类似的混沌现象; 第四节, 分别采用通过稳定性条件设计合理的控制器和以药物激励项函数作为脉冲函数两种方法, 实现对FWAS的控制, 并且将这两种方法进行比较, 给实际应用提供理论基础; 第五节, 对本文进行简要总结.

2 分数阶微分及其性质

分数阶微分存在多种定义方式, 本文选择Caputo分数阶微分^[14]进行研究. 如无特别说明, 文中的 ${}_a D_t^\alpha$ 均表示Caputo分数阶微分.

定义1^[14] 设 α 是一个正实数, 令 $n-1 \leq \alpha < n$, n 为一个正整数. 函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 称

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$$

为函数 $f(t)$ 的 α 阶Caputo分数阶导数, 其中 $t \in [a, b]$, $\Gamma(z)$ 表示Gamma函数.

将含有初值条件的分数阶微分系统写成如下形式:

$$\begin{cases} D_*^{\alpha_i} y_i(t) = f_i(t, y_1, \dots, y_n), \\ y_i^{(k)}(0) = c_k^i, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $m_i < \alpha_i \leq m_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, m_i$, $D_*^{\alpha_i}$ 表示Caputo分数阶微分.

引理1^[15] 若 $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在区间 $W = [0, \chi^*] \times \prod_{j=1}^n [y_j(0) - l_j, y_j(0) + l_j]$, $\chi^* > 0$, $l_j > 0$, $\forall j$ 上连续, 那么含有初值条件的分数阶微分系统(1)有惟一解.

文献^[16]给出阶次满足 $0 < \alpha \leq 1$ 的分数阶非自治非线性系统的稳定性准则, 但未指出系统阶次满足 $1 < \alpha < 2$ 时是否可以依据引理2判断稳定性, 本文讨论的是阶次满足 $0 < \alpha < 2$ 的分数阶非自治非线性系统, 因此给出如下定理.

定理1 对于分数阶含初值条件的非自治非线性系统:

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = c, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $f(t, x(t))$ 满足Lipschitz条件, 且 $f(t, 0)$ 恒为零. 当阶次 $0 < \alpha < 2$ 时, 对任意状态变量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, 存在正定矩阵 Q , 使函数

$$g(x(t)) = x(t)^T Q \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \leq 0$$

恒成立, 则分数阶非自治系统(2)稳定.

证明 当 $0 < \alpha < 2$ 时, 系统(2)的解等价于如下Voltergral积分形式^[15]:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x(0)^{(k)} \frac{t^k}{k!} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &= x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

即

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

两边再采用导数的定义得:

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(0) - x(0)}{\Delta t} \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right. \\ &\left. - \int_0^{t-\Delta t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{t-\Delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau}{\Delta t}, \end{aligned}$$

则

$$dx(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

构造正定函数 $W = \frac{1}{2} x^T(x) Q x(t)$, 则

$$\begin{aligned} dW &= x^T(x) Q dx(t) \\ &= \frac{x^T(x) Q}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t-\Delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} x^T(x) Q f(\tau, x(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

因为

$$J = x(t)^T Q \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = x^T(x) Q f(\tau, x(\tau)) \leq 0,$$

并且函数 $f(t, x(t))$ 满足Lipschitz条件, 即当 $\Delta t \rightarrow 0$ 且 $\tau \in (t-\Delta t, t]$ 时, $x^T(x) Q f(\tau, x(\tau)) \leq 0$. 所以,

$$\begin{aligned} W' &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} x^T(x) \right. \end{aligned}$$

$$\times \mathbf{Q}f(\tau, x(\tau))d\tau \Big] \leq 0,$$

根据 Lyapunov 稳定性理论:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^T(x) \mathbf{Q}x(t) = 0,$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$, 系统(2)是稳定的. 定理1证毕.

3 FWAS 及其性质

3.1 FWAS 的建立

具有阻尼项的 Willis 环脑动脉瘤模型^[2]如下:

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 = F \cos(\omega t), \quad (3)$$

其中, x 为脑动脉瘤内的血流速度; \dot{x} 为血流变化率; \ddot{x} 为血流变化的加速度; 参数 α, β, γ 的取值与血流阻力及血管壁的弹性有关; μ 为血流阻尼系数; F 为脉冲压; ω 为心率倒数. 这些参量都和人的生理结构及动脉瘤状况有关.

对系统(3)重新描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F \cos(\omega t) - \mu y - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3, \end{cases}$$

进一步分数阶化得到

$$\begin{aligned} D_*^{p_1} x + \mu D_*^{p_2} x + \alpha x - \beta x^2 + \gamma x^3 &= F \cos(\omega t), \\ 1 < p_1 \leq 2, \quad 0 < p_2 \leq p_1. \end{aligned} \quad (4)$$

对系统(4)重新描述, 得

$$\begin{cases} D_*^{p_2} x = y, \\ D_*^{p_1 - p_2} y = F \cos(\omega t) - \mu y - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3. \end{cases} \quad (5)$$

令 $q_1 = p_2, q_2 = p_1 - p_2$, 则系统(5)等价于 FWAS 如下:

$$\begin{cases} D_*^{q_1} x = y, \\ D_*^{q_2} y = F \cos(\omega t) - \mu y - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3, \\ 0 < q_1, \quad q_2 < 2. \end{cases} \quad (6)$$

3.2 FWAS 解的存在惟一性

定理 2 若 $a > 0$, 具有初值条件的 FWAS 可以构造如下:

$$\begin{cases} {}_0 D_t^q X(t) = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{F}(t) + x_1^2(t)[\mathbf{B} - \mathbf{C}X(t)], \\ 0 \leq t \leq a, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} X(t) &= (x_1(t), x_2(t))^T, \quad X_0 = (x_{10}, x_{20})^T, \\ q &= (q_1, q_2)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -\mu \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F \cos(\omega t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

那么系统(7)存在惟一解.

证明 取 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别为向量范数和矩阵范数. 令 $G(t, X(t)) = \mathbf{A}X(t) + \mathbf{F}(t) + x_1^2(t)[\mathbf{B} - \mathbf{C}X(t)]$. 对于任意 $\delta > 0$, 区间 $[X_0 - \delta, X_0 + \delta]$ 连续并有界. 取任意 $X(t), Y(t) \in [X_0 - \delta, X_0 + \delta]$, 有

$$\begin{aligned} &|G(t, X(t)) - G(t, Y(t))| \\ &\leq |\mathbf{A}X(t) - \mathbf{A}Y(t)| + |x_1^2(t)[\mathbf{B} - \mathbf{C}X(t)] \\ &\quad - y_1^2(t)[\mathbf{B} - \mathbf{C}Y(t)]|, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &|x_1^2(t)[\mathbf{B} - \mathbf{C}X(t)] - y_1^2(t)[\mathbf{B} - \mathbf{C}Y(t)]| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \beta x_1^2 - \gamma x_1^3 - (\beta y_1^2 - \gamma y_1^3) \end{pmatrix} \right| \\ &\leq |(\beta x_1^2 - \beta y_1^2) - (\gamma x_1^3 - \gamma y_1^3)| \\ &\leq |(x_1 - y_1)| \cdot |\beta(x_1 + y_1) - \gamma(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2)| \\ &\leq |(x_1 - y_1)| \cdot |2\beta(|X_0| + \delta) - 3\gamma(|X_0| + \delta)^2| \\ &\leq |X(t) - Y(t)| \cdot (|X_0| + \delta) \cdot |2\beta - 3\gamma(|X_0| + \delta)|, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &|G(t, X(t)) - G(t, Y(t))| \\ &\leq |\mathbf{A}X(t) - \mathbf{A}Y(t)| + |X(t) - Y(t)| \\ &\quad \times (|X_0| + \delta) |2\beta - 3\gamma(|X_0| + \delta)| \\ &\leq (\|\mathbf{A}\| + (|X_0| + \delta) \\ &\quad \times |2\beta - 3\gamma(|X_0| + \delta)|) |X(t) - Y(t)|. \end{aligned}$$

令 $L = \|\mathbf{A}\| + (|X_0| + \delta) |2\beta - 3\gamma(|X_0| + \delta)|$, 所以 $|G(t, X(t)) - G(t, Y(t))| \leq L |X(t) - Y(t)|$. 上述不等式 $G(t, X(t))$ 说明满足 Lipschitz 条件, 因此连续. 根据定理1可得, 具有初值问题的 FWAS 存在惟一解. 定理2证毕.

3.3 FWAS 的数值实现

针对 FWAS(6), 采用 Adams-Bashforth-Moulton 方法^[17,18]求解. 参数取 $\alpha = 0.9, \beta = 3, \gamma = 2$,

$F = 0.1, \mu = 0.1, \omega = 1$. 因为分数阶微分是整数阶微分的推广, 首先选取阶次均为整数. 图 1 给出了系统 (6) 的阶次均为 1 时的 $x-t$ 曲线、 $y-t$ 曲线、

时间历程、相图和 Poincaré 截面, 与不稳定生理状态下整数阶 Willis 环脑动脉瘤系统的混沌现象 [5] 一致.

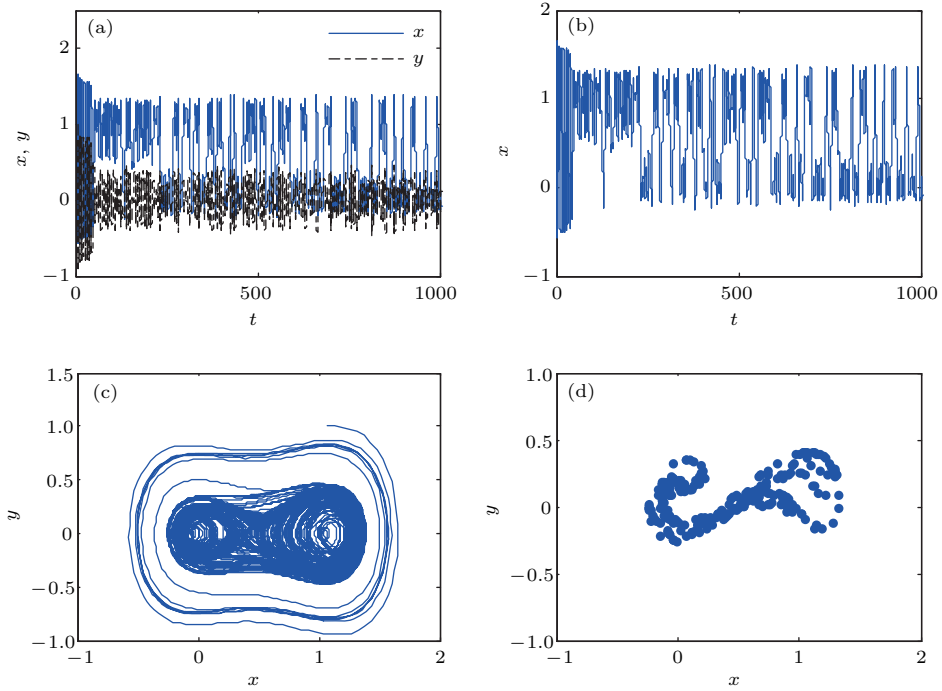


图 1 系统阶次取 $q_1 = q_2 = 1$ (a) $x-t$ 和 $y-t$ 曲线; (b) 时间历程; (c) 相图; (d) Poincaré 截面

Fig. 1. System order in the case $q_1 = q_2 = 1$: (a) Curves of $x-t$ and $y-t$; (b) time course; (c) phase diagram; (d) Poincaré section.

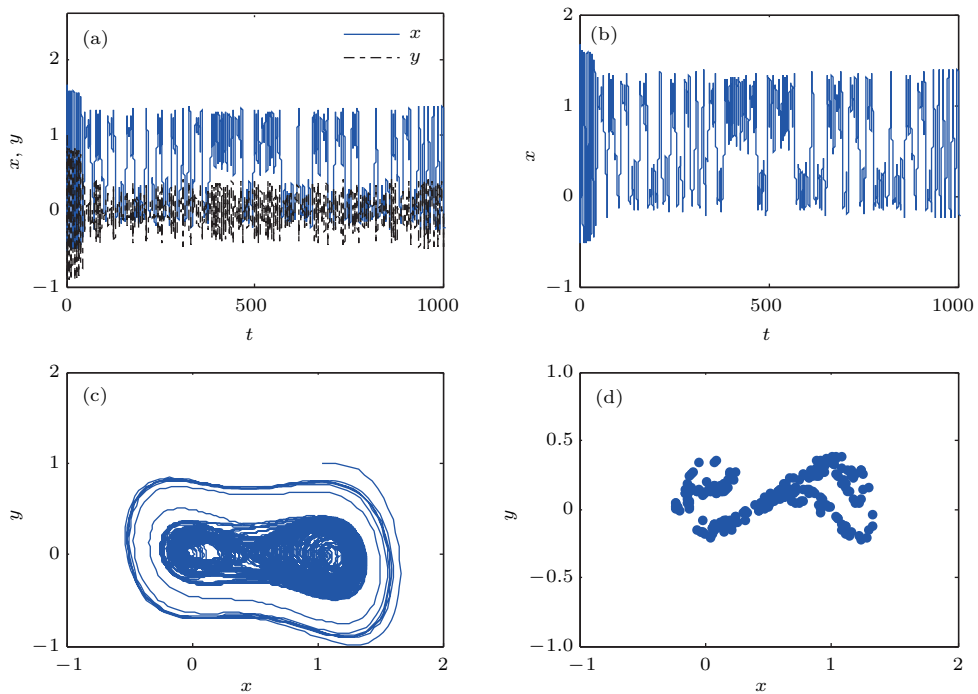


图 2 阶次取 $q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$ (a) $x-t$ 和 $y-t$ 曲线; (b) 时间历程; (c) 相图; (d) Poincaré 截面

Fig. 2. System order in the case $q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$: (a) Curves of $x-t$ and $y-t$; (b) time course; (c) phase diagram; (d) Poincaré section.

当Poincaré截面上只有一个不动点或者少数离散点时,可判定运动是周期的;当Poincaré截面上是一条闭合的曲线时,可判定运动是准周期的;当Poincaré截面上是成片的密集点,并且有层次结构时,可判定运动处于混沌状态.图2给出了系统(6)阶次取 $q_1 = 1.1, q_2 = 0.9$ 时的 $x-t$ 曲线、 $y-t$ 曲线、时间历程、相图和Poincaré截面.从Poincaré截面的结果可以看出,阶次为分数时,仍然会表现出复杂的混沌现象.

3.4 脉冲压对FWAS的影响

将FWAS (6)中的参数设置如下: $q_1 = 1.1, q_2 = 0.9, \alpha = 0.9, \beta = 3, \gamma = 2, \mu = 0.1, \omega = 1$, 得到

$$\begin{cases} {}_0D_t^{1.1}x = y, \\ {}_0D_t^{0.9}y = F \cos t - 0.1y - 0.9x + 3x^2 - 2x^3. \end{cases} \quad (8)$$

这里脉冲压 F 的影响主要是指血压对FWAS的影响.令 F 在区间 $(0.05, 0.2)$ 之间变化,图3给出了 x 随着 F 变化的分岔图.从图3可以看出脉冲压 F 的

微小变化都能显著地影响混沌状态.由此可知,当血压保持稳定时,脑动脉瘤内的血流也比较平稳,反之,如果血压不稳定,就会导致脑动脉瘤内的血流处于混沌状态,脑动脉瘤易发生破裂.

从图3可以看出,系统是通过倍周期分岔道路到达混沌状态的.图4给出了系统(8)随脉冲压 F 变化的相图和Poincaré截面. $F = 0.083$ 时,系统是

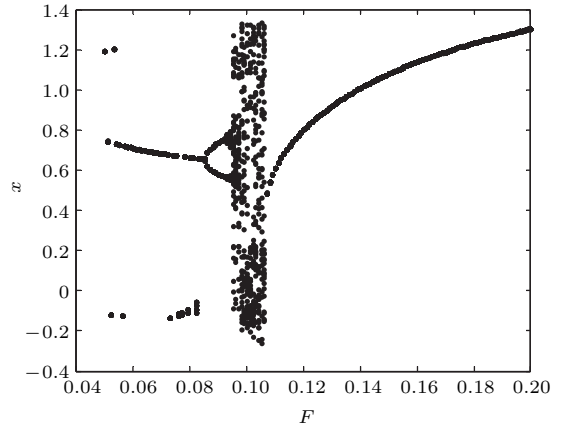


图3 系统(8)随脉冲压 F 变化的分岔图
Fig. 3. Bifurcation diagram of system (8) versus pulse pressure F .

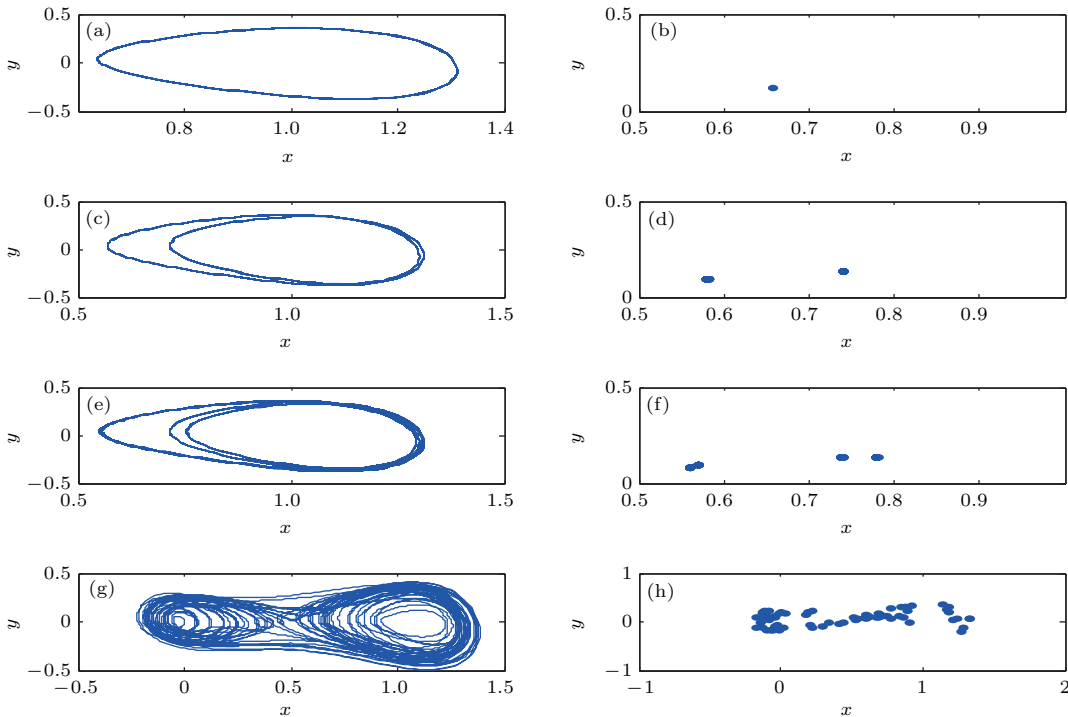


图4 系统相图和Poincaré截面随脉冲压 F 的变化 (a)相图, $F = 0.083$; (b) Poincaré截面, $F = 0.083$; (c)相图, $F = 0.09$; (d) Poincaré截面, $F = 0.09$; (e)相图, $F = 0.093$; (f) Poincaré截面, $F = 0.093$; (g)相图, $F = 0.095$; (h) Poincaré截面, $F = 0.095$

Fig. 4. Phase diagrams and Poincaré section for different values of the pulse pressure F : (a) Phase diagram, $F = 0.083$; (b) Poincaré section, $F = 0.083$; (c) phase diagram, $F = 0.09$; (d) Poincaré section, $F = 0.09$; (e) phase diagram, $F = 0.093$; (f) Poincaré section, $F = 0.093$; (g) phase diagram, $F = 0.095$; (h) Poincaré section, $F = 0.095$.

周期为1的极限环; $F = 0.09$ 时, 系统是周期变为2; $F = 0.093$ 时, 系统的周期为4; $F = 0.095$ 时, 系统呈现混沌状态.

3.5 系统阶次 q_1 和 q_2 对FWAS的影响

进一步分别讨论分数阶阶次 q_1 和 q_2 对系统(8)的影响, 其中 $F = 0.1$, 其他参数值保持不变. 令分

数阶阶次 q_1 在区间 $(0.95, 1.14)$ 之间变化, 图5(a)给出了 x 随着 q_1 变化的分岔图. 令分数阶阶次 q_2 在区间 $(0.8, 0.94)$ 之间变化, 图5(b)给出了 x 随着 q_2 变化的分岔图. 从图5可以看出系统阶次 q_1 和 q_2 的微小变化都能显著地影响FWAS的混沌状态, 并且系统是通过倍周期分岔道路到达混沌状态的. 图6和图7分别给出系统(8)随阶次 q_1 和 q_2 变化的相图和 Poincaré 截面.

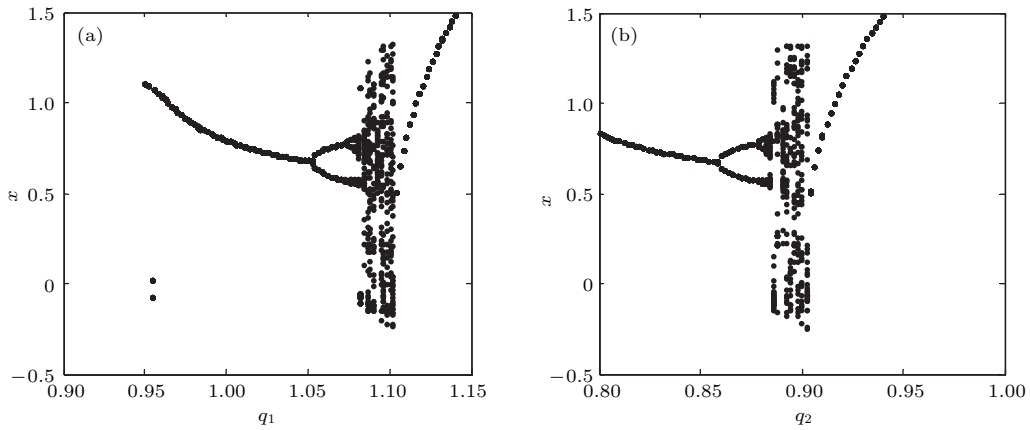


图5 系统(8)随分数阶阶次变化的分岔图 (a) 随 q_1 变化; (b) 随 q_2 变化

Fig. 5. Bifurcation diagram of system (8) versus fractional order: (a) Versus q_1 ; (b) versus q_2 .

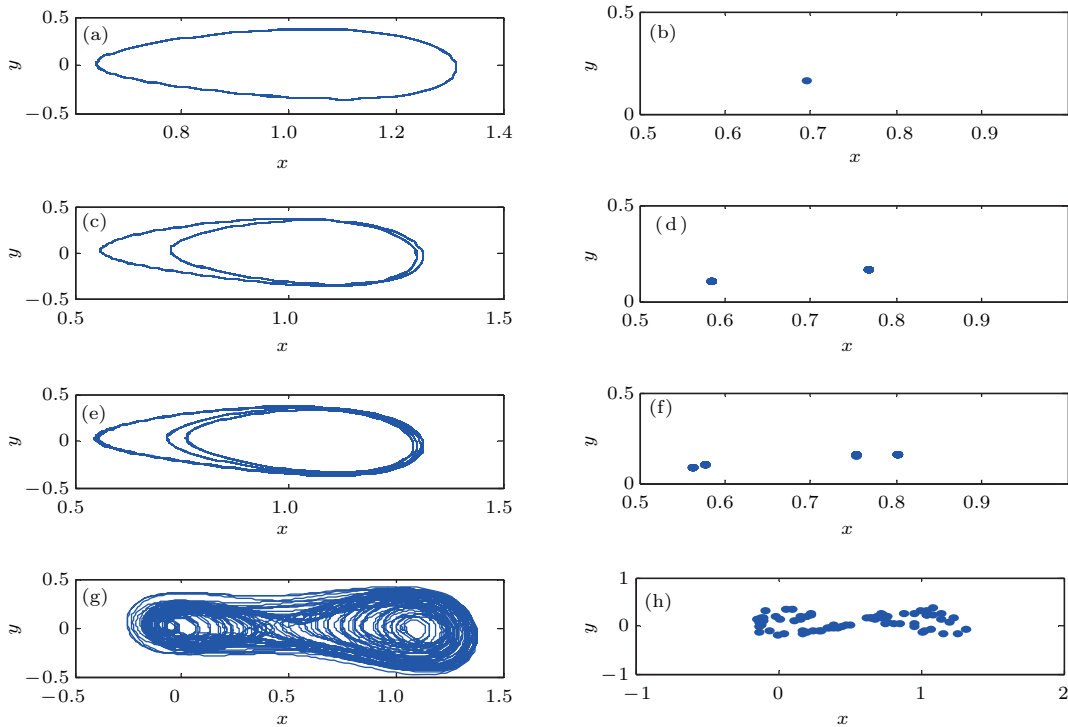


图6 系统相图和 Poincaré 截面随分数阶阶次 q_1 的变化 (a) 相图, $q_1 = 1.04$; (b) Poincaré 截面, $q_1 = 1.04$; (c) 相图, $q_1 = 1.068$; (d) Poincaré 截面, $q_1 = 1.068$; (e) 相图, $q_1 = 1.076$; (f) Poincaré 截面, $q_1 = 1.076$; (g) 相图, $q_1 = 1.09$; (h) Poincaré 截面, $q_1 = 1.09$

Fig. 6. Phase diagrams and Poincaré section for different values of the pulse pressure q_1 : (a) Phase diagram, $q_1 = 1.04$; (b) Poincaré section, $q_1 = 1.04$; (c) phase diagram, $q_1 = 1.068$; (d) Poincaré section, $q_1 = 1.068$; (e) phase diagram, $q_1 = 1.076$; (f) Poincaré section, $q_1 = 1.076$; (g) phase diagram, $q_1 = 1.09$; (h) Poincaré section, $q_1 = 1.09$.

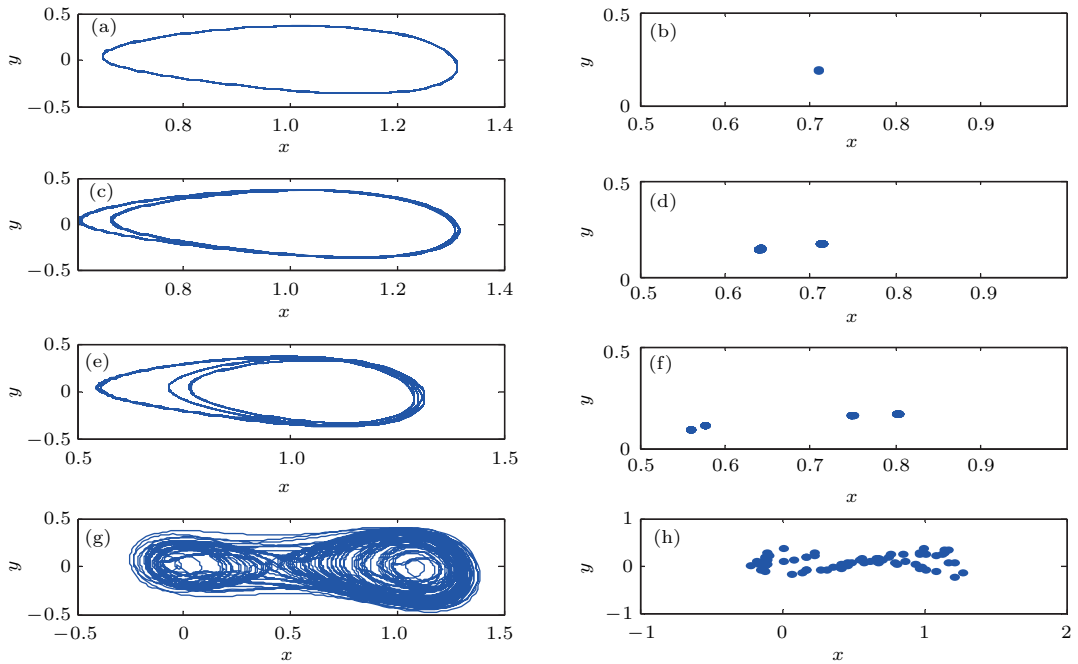


图7 系统相图和 Poincaré 截面随分数阶阶次 q_2 的变化 (a) 相图, $q_2 = 0.84$; (b) Poincaré 截面, $q_2 = 0.84$; (c) 相图, $q_2 = 0.86$; (d) Poincaré 截面, $q_2 = 0.86$; (e) 相图, $q_2 = 0.88$; (f) Poincaré 截面, $q_2 = 0.88$; (g) 相图, $q_2 = 0.89$; (h) Poincaré 截面, $q_2 = 0.89$

Fig. 7. Phase diagrams and Poincaré section for different values of the pulse pressure q_2 : (a) Phase diagram, $q_2 = 0.84$; (b) Poincaré section, $q_2 = 0.84$; (c) phase diagram, $q_2 = 0.86$; (d) Poincaré section, $q_2 = 0.86$; (e) phase diagram, $q_2 = 0.88$; (f) Poincaré section, $q_2 = 0.88$; (g) phase diagram, $q_2 = 0.89$; (h) Poincaré section, $q_2 = 0.89$.

4 FWAS 的混沌控制

FWAS 的混沌状态表征为血流不稳定, 而脑动脉瘤在极混乱的速度场中更容易破裂. 因此, 应尽量对系统进行控制, 避免混沌现象的产生. 本节采用两种方式对 FWAS 进行混沌控制. 第一种通过设计合适的控制器, 根据非自治非线性系统的稳定性条件设置合适的参数, 对 FWAS 的混沌现象控制. 第二种是采用药物激励项函数, 作为脉冲函数, 对 FWAS 的混沌行为进行脉冲控制.

4.1 设计控制器实现 FWAS 的混沌控制

在与第二节同样的参数设置下, 得到具有初值条件的 FWAS 如下:

$$\begin{cases} {}_0D_t^{1.1}x = y, \\ {}_0D_t^{0.9}y = 0.1 \cos t - 0.1y - 0.9x + 3x^2 - 2x^3, \\ x(0) = 1, y(0) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

定理 3 具有初值条件的 FWAS (9) 是不稳定的.

证明 由定理 2 的证明过程可知, FWAS (9) 的右端项满足 Lipschitz 条件. 取正定矩阵 Q 为单

位矩阵, 根据定理 1 构造函数:

$$\begin{aligned} g(x(t), y(t)) &= x_0 D_t^{1.1}x + y_0 D_t^{0.9}y \\ &= xy + (0.1 \cos t - 0.1y - 0.9x + 3x^2 - 2x^3)y \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{2} + 0.1y \cos t - 0.1y^2 - 0.9 \frac{x^2 + y^2}{2} \\ &\quad + 3 \frac{x^4 + y^2}{2} - 2 \frac{x^4 + x^2y^2}{2} \\ &\leq 0.1y + \frac{1}{20}x^2 + \frac{29}{20}y^2 - \frac{y^4}{2}, \end{aligned}$$

函数 $g(x(t), y(t))$ 既不恒大于零, 也不恒小于零, 系统 (9) 的稳定性难以判定. 但从图 2 的仿真结果可以看出时间历程图很不规则、相图的轨线无规律、Poincaré 截面具有一定的层次结构和形状, 因此具有初值条件的 FWAS (9) 是不稳定的. 定理 3 证毕.

对系统 (9) 设计控制器:

$$\begin{cases} {}_0D_t^{1.1}x = y - k_1x, \\ {}_0D_t^{0.9}y = 0.1 \cos t - 0.1y - 0.9x \\ \quad + 3x^2 - 2x^3 - k_2 \left(y - \frac{1}{10k_2} \right), \\ x(0) = 1, y(0) = 1. \end{cases} \quad (10)$$

定理 4 当 $k_1 \geq 0.05$, $k_2 \geq 1.45$ 时, 受控 FWAS (10) 是稳定的.

证明 根据定理1构造函数:

$$\begin{aligned}
 g(x(t), y(t)) &= x_0 D_t^{1.1} x + y_0 D_t^{0.9} y \\
 &= x(y - k_1 x) + \left(0.1 \cos t - 0.1y - 0.9x + 3x^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2x^3 - k_2 \left(y - \frac{1}{10k_2} \right) y \right) \\
 &\leq \frac{1}{10} \frac{x^2 + y^2}{2} - k_1 x^2 - \frac{1}{10} y^2 - k_2 y^2 \\
 &\quad + 3 \frac{x^4 + y^2}{2} - 2 \frac{x^4 + x^2 y^2}{2} \\
 &\leq \left(\frac{1}{20} - k_1 \right) x^2 + \left(\frac{29}{20} - k_2 \right) y^2 - \frac{y^4}{2},
 \end{aligned}$$

当 $k_1 \geq 0.05, k_2 \geq 1.45$ 时, 函数 $g(x(t), y(t)) \leq 0$. 根据定理1, 受控 FWAS (1) 是稳定的. 定理4证毕.

取 $k_1 = 0.05, k_2 = 1.45$, 系统 (10) 的仿真结果如图8所示.

从图8中 Poincaré 截面和相图的结果可以看出, 取 $k_1 = 0.05, k_2 = 1.45$, 受控 FWAS (1) 在 10 s 之后, 很快被限制在一个很小的范围内做周期性波动并且振幅很小. 图9给出了受控制器控制的 FWAS (1) 分别随分数阶阶次 q_1 和 q_2 变化的分岔图. 从图9中可以看出, 引入控制器后, FWAS 的混沌区间也变成了稳定区间.

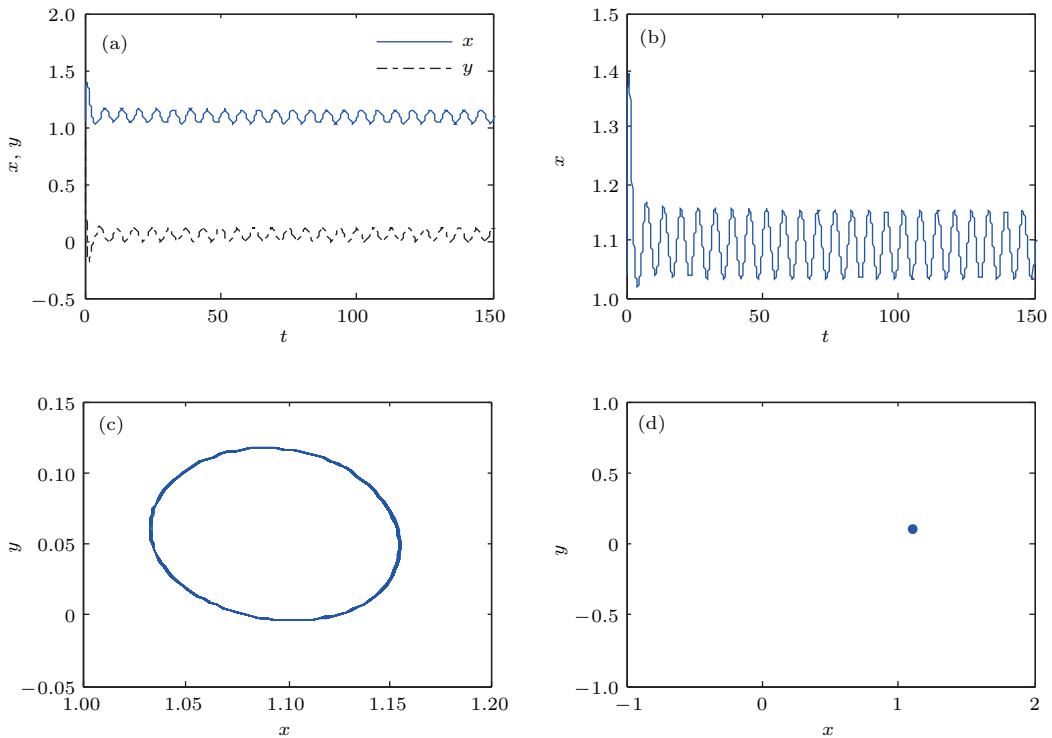


图8 控制器控制的FWAS (a) x - t 和 y - t 曲线; (b) 时间历程; (c) 相图; (d) Poincaré 截面

Fig. 8. The control of FWAS with controller: (a) Curves of x - t and y - t ; (b) time course; (c) phase diagram; (d) Poincaré section.

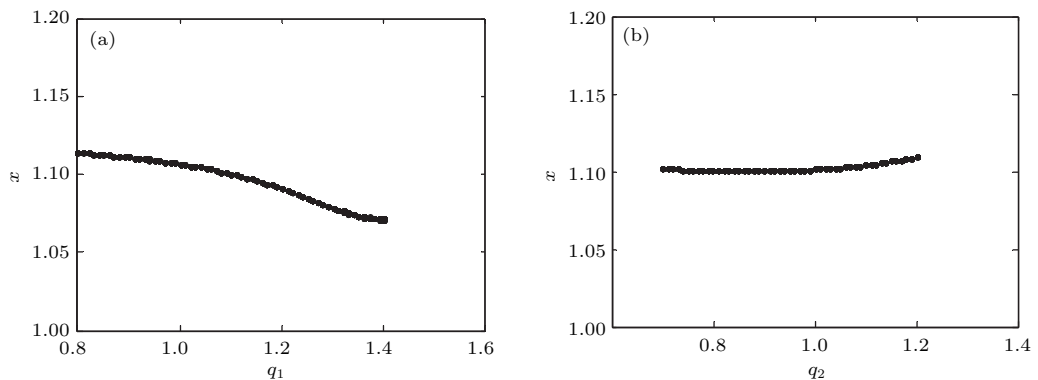


图9 受控制器控制的FWAS(1)随分数阶阶次变化的分岔图 (a) 随 q_1 变化; (b) 随 q_2 变化

Fig. 9. Bifurcation diagram of FWAS (10) with controller versus fractional order: (a) versus q_1 ; (b) versus q_2 .

4.2 采用脉冲函数实现FWAS的混沌控制

将药效激励项函数^[7]记为:

$$\text{med}(d, f, t) = \begin{cases} d \cos(ft), & t \bmod T < 0.8T, \\ k(t - 0.8T) + d \cos(0.8Tf), & t \bmod T \geq 0.8T, \end{cases}$$

其中 $T = 0.2 \cdot (2\pi/f)$. $\text{med}(d, f, t) = d$ 表示降压药物对血液波动起到最大作用; $\text{med}(d, f, t) = d \cos(0.8Tf)$ 表示降压药物的最低作用效果. 参数取值 $d = 0.1, f = 0.01$ 时, 可计算得 $k = 0.0018$, 周期为 $T = 125.663$. 通过 Matlab 得到药物激励项函数效果图, 如图 10.

将药物激励项函数作为脉冲函数, 作用到 FWAS (8) 上得到:

$$\begin{cases} {}_0D_t^{1.1}x = y, \\ {}_0D_t^{0.9}y = (0.1 - \text{med}(d, f, t)) \cos t \\ \quad - 0.1y - 0.9x + 3x^2 - 2x^3, \\ x(0) = 1, y(0) = 1. \end{cases} \quad (11)$$

设置参数 $d = 0.1, f = 0.01$, 代入到受脉冲控制的 FWAS (11) 中, 图 11 给出系统 (11) 的 $x-t$ 曲线、 $y-t$ 曲线、时间历程、相图和 Poincaré 截面.

从图 11 中 Poincaré 截面和相图的结果可以看出, 加入以药物激励项函数作为脉冲函数的控制后, FWAS (11) 在 50 s 之后, 很快被限制在一个很小的范围内做周期性波动.

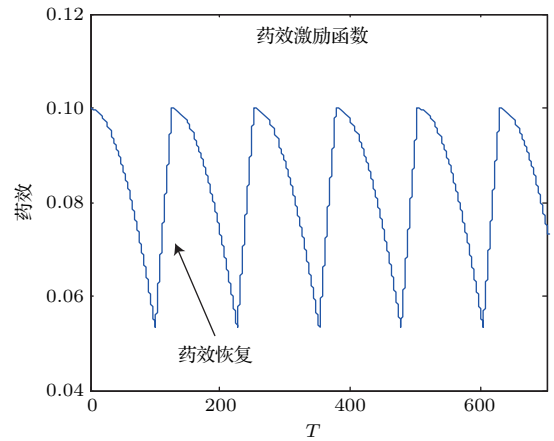


图 10 药物激励项函数效果

Fig. 10. The efficiency of drug's inspirit function.

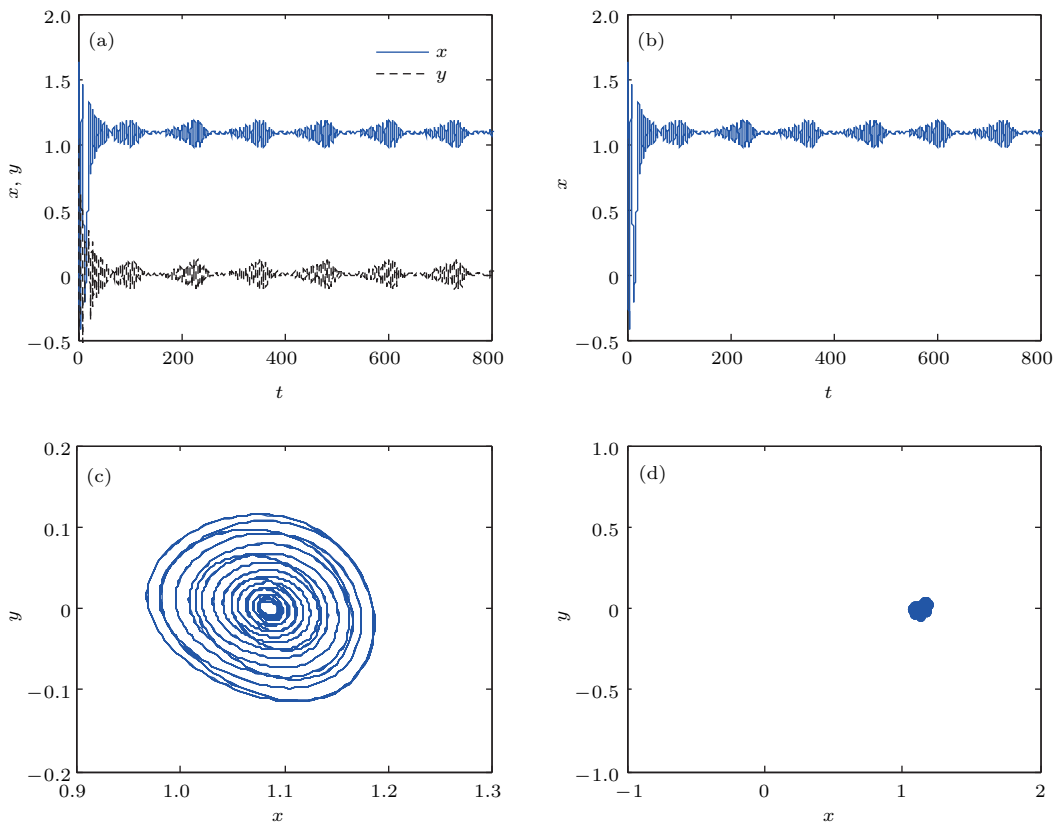


图 11 加入脉冲控制的FWAS (a) $x-t$ 和 $y-t$ 曲线; (b) 时间历程; (c) 相图; (d) Poincaré 截面

Fig. 11. The control of fractional Willis aneurysm systems with impulse control: (a) Curves of $x-t$ and $y-t$; (b) time course; (c) phase diagram; (d) Poincaré section

4.3 两种控制方法的比较

将上述两种方法进行比较, 设置相同的仿真条件, 得到图 12.

图 12 中, 子图 (a) 和 (b) 展示的是针对 FWAS 分别设计合适的控制器和进行脉冲控制得到的 $x-t$, $y-t$ 时间序列比较图. 由图可知, 上述两种方法均可以将脑动脉瘤内的血流速度和血流速度变化率长时间控制在一个恒定的很小范围内进行周期性波动. 这种状态对于脑动脉瘤患者是十分有利的, 说明病情稳定, 脑动脉瘤不易破裂.

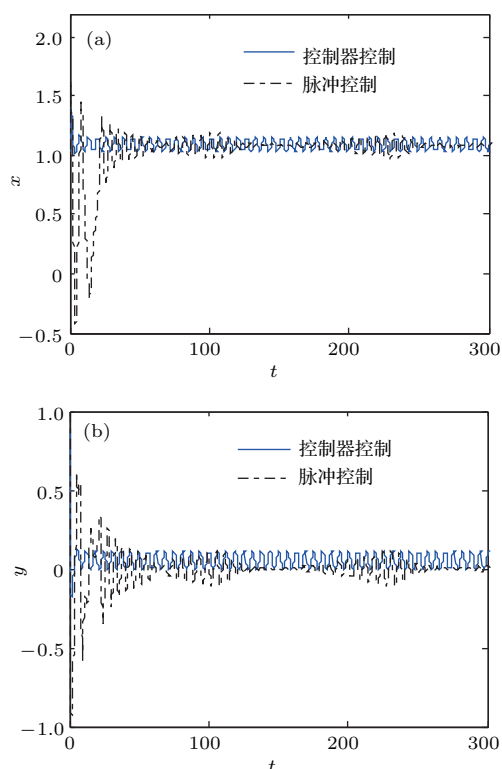


图 12 FWAS 的控制 (a) 控制器控制与脉冲控制的 $x-t$ 曲线; (b) 控制器控制与脉冲控制的 $y-t$ 曲线

Fig. 12. The control of fractional Willis aneurysm systems: (a) Curves of $x-t$ with controller and impulse control respectively; (b) curves of $y-t$ with controller and impulse control respectively.

设计合适的控制器可以使 FWAS 在很短的时间里稳定下来, 而且该方法设计简单, 但是控制器缺少实际理论的支持. 而采用脉冲函数对系统进行控制所需时间较长, 而且稳定性能差, 但实际表现为患者使用药物, 更为切合实际应用.

5 总结

本文在 WAS 的基础上, 提出了 FWAS, 并且通过理论证明和数值仿真论证其动力学性质. 研究表

明, FWAS 存在同 WAS 一样的复杂混沌现象. 最后, 分别采用以基于稳定性定理设计合适的控制器和以药物激励项函数作为脉冲函数进行脉冲控制这两种方法, 分别对 FWAS 进行控制, 使其在一个很小的范围内做周期性波动, 此时脑动脉瘤系统就从混沌状态转变为稳定状态. 本文所得的结果表明, 应用分数阶微分算子刻画 Willis 环脑动脉瘤模型是一种可行的方法和工具. 在实际问题中, FWAS 的阶次大小应当如何选取还需要医学实验的数据, 但本文对于脑动脉瘤的研究具有一定的理论指导意义.

参考文献

- [1] Austin G 1971 *Math. Biosci.* **11** 163
- [2] Cao J D, Liu T Y 1993 *J. Biomath.* **8** 9 (in Chinese) [曹进德, 刘天一 1993 生物数学学报 **8** 9]
- [3] Nieto J J, Torres A 2000 *Nonlinear Anal.* **40** 513
- [4] Yang C H, Zhu S M 2003 *Acta Sci. Nat. Univ. Sunyatseni* **42** 1 (in Chinese) [杨翠红, 朱思铭 2003 中山大学学报 **42** 1]
- [5] Gu Y F, Xiao J 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 160506 (in Chinese) [古元凤, 肖剑 2014 物理学报 **63** 160506]
- [6] Li Y M, Yu S 2008 *J. Biomath.* **23** 235 (in Chinese) [李医民, 于霜 2008 生物数学学报 **23** 235]
- [7] Sun M H, Xiao J, Dong H L 2016 *Highlights of Sciencepaper Online* **9** 640 (in Chinese) [孙梦晗, 肖剑, 董海亮 2016 中国科技论文在线精品论文 **9** 640]
- [8] Lu K Q, Liu J X 2009 *Physics* **38** 453 (in Chinese) [陆坤权, 刘寄星 2009 物理 **38** 453]
- [9] Zhu K Q 2009 *Mech. Pract.* **31** 104 (in Chinese) [朱克勤 2009 力学与实践 **31** 104]
- [10] Ahmed E, El-Sayed A M A, El-Saka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542
- [11] Chen M, Jia L B, Yin X Z 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 88703
- [12] Dokoumetzidis A, Macheras P 2009 *J. Pharmaceut. Biomed.* **36** 165
- [13] Verotta D 2010 *J. Pharmaceut. Biomed.* **37** 257
- [14] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press) pp41-120
- [15] Daftardar-Gejji V, Jafari H 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **328** 1026
- [16] Hu J B, Zhao L D 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 060504 (in Chinese) [胡建兵, 赵灵冬 2013 物理学报 **62** 060504]
- [17] Kai D, Ford N J 2004 *Appl. Math. Comput.* **154** 621
- [18] Diethelm K, Ford N J, Freed A D 2005 *Comput. Method Appl. M.* **194** 743

Chaotic dynamics of the fractional Willis aneurysm system and its control*

Gao Fei[†] Li Teng Tong Heng-Qing Ou Zhuo-Ling

(School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

(Received 5 June 2016; revised manuscript received 6 September 2016)

Abstract

The Willis aneurysm system has some limitations in the description of the complex hemodynamic mechanism of blood with viscoelasticity. The fractional calculus has been used to depict some complex and disordered processes in organisms. Thus, we propose a fractional Willis aneurysm system (FWAS) by using the Caputo fractional differential and its theory in the present article.

Firstly, the existence and uniqueness of solution for FWAS are investigated theoretically. Then, we prove that the FWAS has a chaotic characteristic by analyzing the phase portraits and Poincaré section, and it is a rational extension of its integer order form. We investigate the influences of pulse pressure and fractional order on the FWAS by means of bifurcation diagram and period doubling bifurcation. The results show that small changes of pulse pressure and fractional order can lead to a remarkable effect on the motion state of the FWAS.

As the chaotic FWAS indicates that the brain blood flow is unstable, and the cerebral aneurysms are more likely to rupture in a very chaotic velocity field. Therefore we use two methods to control the chaotic FWAS. One is to design a suitable controller based on the stability theorem of fractional nonlinear non-autonomous system, and the other is to use a pulse control by taking the inspirit function of drug as impulse function. The numerical simulations show that the proposed two methods can control the blood flow velocity and speed up the periodic fluctuation within a small range, which shows that the cerebral aneurysm is not easy to rupture.

The results obtained in this paper display that the fractional differential is a feasible method to characterize the Willis aneurysm system. The theoretical results in our article can provide some theoretical guidance for controlling and utilizing the actual FWAS system.

Keywords: fractional Willis aneurysm system, Caputo fractional differential, Poincaré section, chaos control

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.65.230502

* Project supported by the Major Research plan of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 91324201) and the Natural Science Foundation of Hubei Province, China (Grant No. 2014CFB865).

† Corresponding author. E-mail: hgaofei@gmail.com