

广义非线性薛定谔方程描述的波坍缩及其演变

崔少燕 吕欣欣 辛杰

Collapse and evolution of wave field based on a generalized nonlinear Schrödinger equation

Cui Shao-Yan Lü Xin-Xin Xin Jie

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 040201 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.040201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.040201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I4>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

点堆中子动力学方程组曲率权重法的解

Curvature weight method of solving the point reactor neutron kinetic equations

物理学报.2015, 64(22): 220201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.220201>

耦合高压斯特林制冷效应的复合磁制冷循环的数值模拟

Numerical simulation of a hybrid magnetic refrigeration combined with high pressure Stirling regenerative refrigeration effect

物理学报.2015, 64(21): 210201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.210201>

水平温差对环形浅液池内 Marangoni-热毛细对流的影响

Effect of horizontal temperature difference on Marangoni-thermocapillary convection in a shallow annular pool

物理学报.2015, 64(14): 140202 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.140202>

轴对称构件受力分析的插值粒子法

Interpolating particle method for mechanical analysis of space axisymmetric components

物理学报.2015, 64(10): 100204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100204>

大气风场和温度对无线电声波探测系统探测高度影响的数值研究

A numerical study of effects on detection height of a radio acoustic sounding system influenced by atmospheric wind and temperature

物理学报.2015, 64(10): 100205 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.100205>

广义非线性薛定谔方程描述的波坍缩及其演变*

崔少燕[†] 吕欣欣 辛杰

(鲁东大学数学与统计科学学院, 烟台 264025)

(2015年9月18日收到; 2015年10月26日收到修改稿)

介绍了广义非线性薛定谔方程, 并且运用分步傅里叶方法进行了数值求解. 在外部势场一定的情况下, 给定系统一个小的初始扰动, 讨论了广义非线性薛定谔方程中复系数 p, q 对波场演变过程的影响. 通过数值研究发现波场会相继出现调制不稳定性、波坍缩、逆级联以及整个空间的湍流现象. 而当改变非线性频移系数的量级时, 数值研究发现在波坍缩之后出现了逆级联, 最终系统的能量主要凝聚在3个不同波矢终端的附近区域.

关键词: 非线性薛定谔方程, 波坍缩, 逆级联, 湍流

PACS: 02.60.Cb, 47.27.Cn, 82.40.Ck, 47.20.Gv

DOI: 10.7498/aps.65.040201

1 引言

奥地利物理学家埃尔温·薛定谔为了描述量子力学中的微观粒子运动的波动现象, 在德布罗意提出的物质波的基础上以微分方程为工具提出了薛定谔方程^[1]. 埃尔温·薛定谔因为在量子物理学方面的贡献获得了1933年度的诺贝尔物理学奖. 量子力学中的薛定谔方程是完全基于二象性, 发展几何学与经典力学的相似性, 把力学量代入波动方程导出的量子力学方程. 而薛定谔方程作为量子物理学中的一个基本假设, 其正确性只能依靠实验结果来检验. 根据外部势能是否与时间有关, 薛定谔方程可以分为含时薛定谔方程和定态薛定谔方程. 在物理学中非线性薛定谔方程所描述的多体系统依然保持能量守恒和粒子数守恒的基本约束条件, 一般用于具有相互作用的多体系统, 为一种典型的含时薛定谔方程. 非线性薛定谔方程是一个应用十分广泛的非线性模型, 而当广义非线性薛定谔方程的系数为复数时, 能够用来描述很多其他的量子物理学方面的现象, 尤其是可以用来分析等离子体波场中在给定初始条件下的波级联进程. 非线性薛

定谔方程很难直接求出解析解, 需要通过数值方法求解. 其求解方法主要分为两大类: 1) 分步有限差分法; 2) 分步傅里叶变换法. 一般情况, 在达到相同精度的前提条件下, 由于分步傅里叶变换法采用运算速度快的快速傅里叶变换^[2], 所以与有限差分法相比, 分步傅里叶变换法运算速度快一到两个数量级.

波坍缩现象的研究都是基于非线性薛定谔方程展开的, 此模型已成为研究弱非线性色散波的经典模型^[3], 而基于二维的广义非线性薛定谔方程描述的各种不稳定性态^[4-8], 如调制不稳定性、波坍缩、逆级联和湍流^[9,10]已经有很多相关的数值研究, 在外部势能和初始扰动取不同分布函数的情况下, 广义非线性薛定谔方程中复系数取不同值时, 波场的演变过程也不相同, 同时在研究波场演变过程中也发现了许多新的物理现象^[7,8]. 本文主要研究广义非线性薛定谔方程中复系数 p, q 对波场演变过程的影响, 首先选取一个复系数 p 与 q , 然后讨论了复系数 p 与 q 的实数部分的正负与大小对系统调制不稳定性、波坍缩、逆级联和湍流的影响. 通过数值结果可以发现, 当 $p = 1 + 0.04i$, $q = 10 + 0.6i$ 时以及改变复系数 p 的实数部分的正负与大小和

* 国家自然科学基金(批准号: 11105065, 11371183)资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: shycui@126.com

复系数 q 的实数部分的正负时系统会出现波坍缩、逆级联以及在所讨论的整个相空间内出现湍流态, 只是波级联进程中的不稳定性态出现的时刻有所不同; 而当改变复系数 q 的实数部分的大小时, 即 $p = 1 + 0.04i$, $q = 1 + 0.6i$ 时整个系统也出现调制不稳定性、波坍缩和逆级联现象, 但随着时间的演变, 数值研究发现最终系统的能量主要凝聚在 3 个不同波矢终端的附近区域, 与之前发现的能量分布在整个相空间区域^[5,6] 或者凝聚在同一波模附近区域的物理现象^[7] 不同.

2 广义非线性薛定谔方程

非线性薛定谔方程针对不同的应用有不同的形式, 本文中所探讨的二维广义非线性薛定谔方程的形式为^[5-8]

$$i\partial_t E + p\nabla^2 E + (V(x, y) - q|E|^2)E = 0, \quad (1)$$

其中, i 为虚数单位, $i^2 = -1$; ∇^2 是拉普拉斯算符, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; 为了便于讨论, 假定方程(1)描述的是电子等离子体波场的演化情况, 此时 $V(x, y)$ 代表给定的外部势能, $E(x, y, t)$ 是关于空间位置为 (x, y) 和时间 t 的复合函数; 而方程(1)的系数 $p = p_r + ip_i$, $q = q_r + iq_i$ 均为复数, 其中 p_r 表示色散项的系数, p_i 为由波长决定的黏性阻尼 (增长) 系数, $q_r|E|^2$ 为色散项的非线性频移, $q_i|E|^2$ 为非线性阻尼 (增长), 而 q_i 是由振幅决定的阻尼 (增长).

本文主要研究在一个局部有限振幅初始扰动影响下的各种不稳定性态的演化, 由于整个系统能量不守恒 ($p_i, q_i \neq 0$), 所以外部势场形式的选取对所研究的问题没有显著影响.

本文中采用的外部势场为

$$V(x, y) = V_0 \left\{ 1 - \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \right\},$$

其中 $a = 4$, $b = 4$, $V_0 = 6$. 给定的初始扰动为指数形式, 其具有高斯脉冲的形式, 即 $E(x, y, 0) = E_0 \exp[-(x^2 + y^2)/c^2]$, 其中 $E_0 = 0.1$, $c = 1.5$.

二维外部势能与初始扰动的剖面图如图1所示, 从空间轮廓上看, 初始的脉冲比外部势能要狭窄得多. 从图1也可以看出初始扰动 $E(x, y)$ 的最高点远低于外部势场 $V(x, y)$ 的最高点.

由前面的分析可以知道, 当外部势能和初始扰动给定时, 则该波场就能初步确定下来. 本文主要

是利用分步傅里叶变换方法来数值计算二维广义非线性薛定谔方程, 采用的计算网格为 256×256 , 每一个模拟区域为从 -2π 到 2π , 并且采用对称性边界条件, 我们选择了整个空间的 $1/4$ 范围来进行探讨. 为了增加计算精度, 选取的时间步长为 $h = 0.001$.

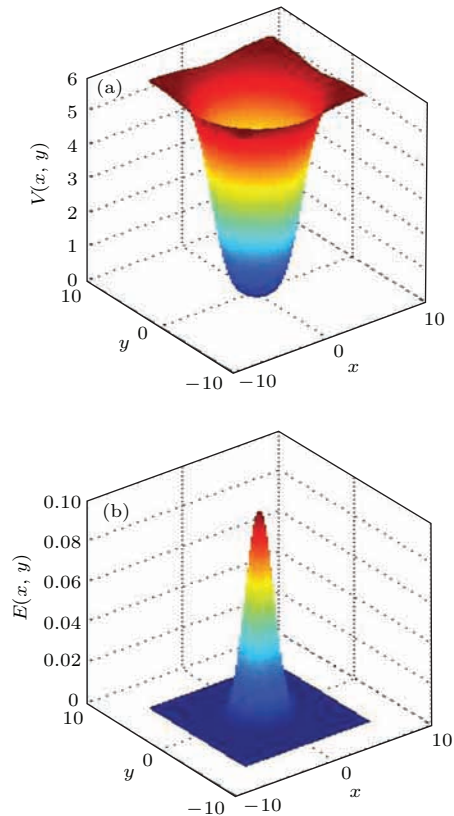


图1 (网刊彩色) (a) 外部势场 $V(x, y)$ 与 (b) 初始扰动 $E(x, y)$
Fig. 1. (color online) (a) The external potential $V(x, y)$ and (b) the initial pulse $E(x, y)$.

3 数值结果

本文首先讨论了当方程(1)的复系数 p 与 q 的实数部分均为正数时的波场的演变过程, 然后又改变了复系数 p 与 q 的实数部分的正负与大小讨论了在这些不同情况下波场的演变过程.

3.1 当 $p = 1 + 0.04i$, $q = 10 + 0.6i$ 时波场的演变

在复系数 p 与 q 的实数部分均为正的情况下, 选取 $p = 1 + 0.04i$, $q = 10 + 0.6i$. 在相空间中, 通过讨论系统的能量谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 在不同时刻的演化, 来研究整个系统的不稳定性状态. 图2所

描绘的是能量谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 随时间的演化过程, 所选取的时刻为: $t = 0.080, 0.120, 0.145, 0.148, 0.150, 2.000$.

由图 2 可以看到: 初始扰动的非线性调制首先出现在所研究的 \mathbf{k} 空间中波长较长 ($|\mathbf{k}|$ 值较小) 的位置上; 随着时间的推移, 当 $t = 0.120$ 时, 初始扰动的能量逐渐向波长较短 ($|\mathbf{k}|$ 值较大) 的位置上转

移, 形成波坍缩现象, 并且初始扰动的能量逐渐增大; 当 $t = 0.145$ 时, 初始扰动的能量完全转移到波长最短的位置; 而在 $t = 0.148$ 时, 初始扰动又向波长较长 ($|\mathbf{k}|$ 值较小) 的位置转移, 出现了逆级联现象, 并且初始扰动的能量也是逐渐增大的; 当 $t = 2.000$ 时, 在整个 \mathbf{k} 空间出现了湍流态. 随着时间的演化, 一直计算到 $t = 20$ 时, 湍流态持续存在.

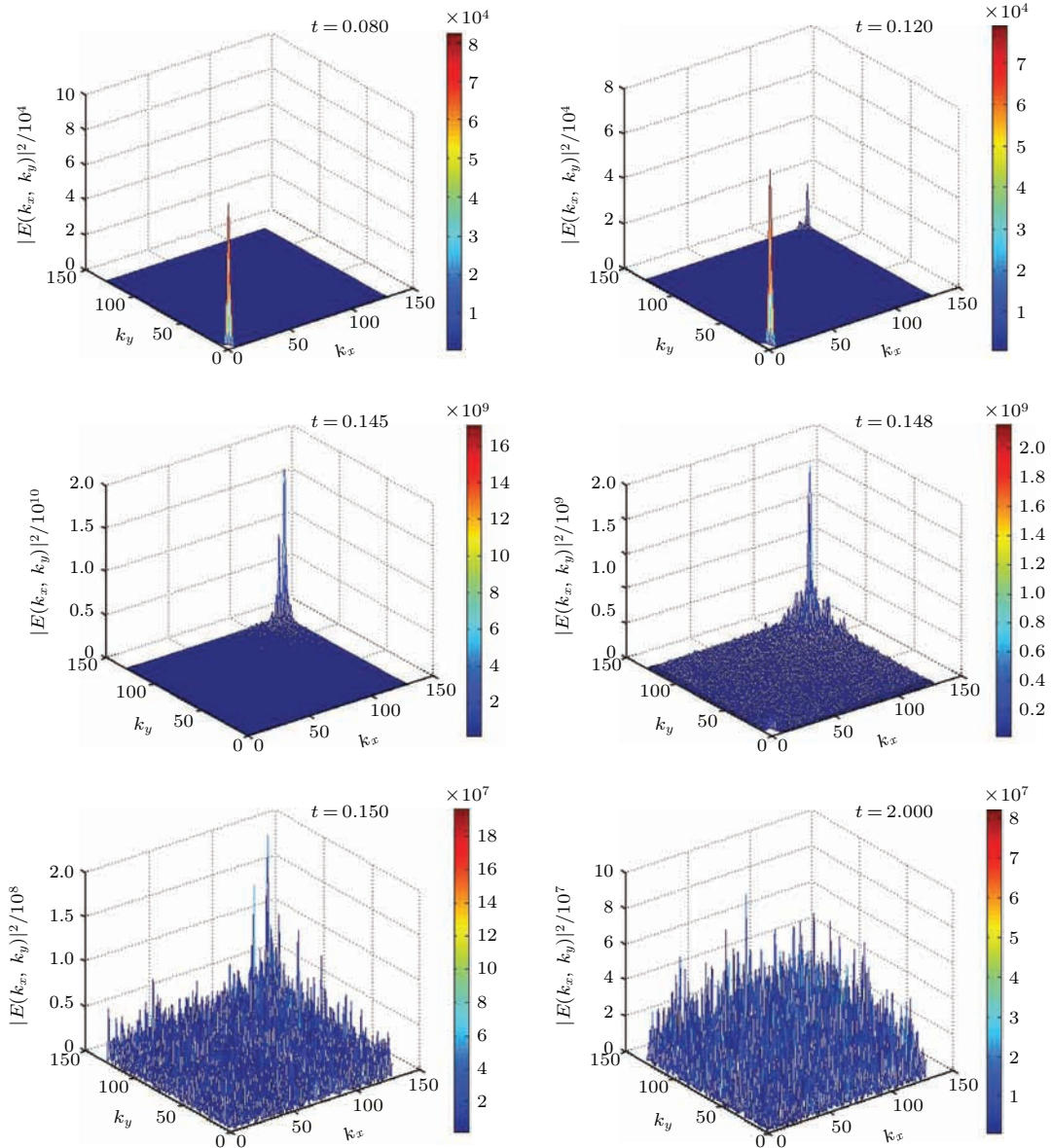


图 2 (网刊彩色) 当 $p = 1 + 0.04i, q = 10 + 0.6i$ 时系统能量谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 的演化

Fig. 2. (color online) The evolution of the spectrum $|E(k_x, k_y)|^2$ for $p = 1 + 0.04i, q = 10 + 0.6i$.

3.2 当 $p = -1 + 0.04i, q = 10 + 0.6i$ 时波场的演变

当方程 (1) 的复系数 p 的实数部分为负数时, 即选取 $p = -1 + 0.04i, q = 10 + 0.6i, q$ 的值保持

不变, 讨论色散项系数的变化对波场的不稳定性的影响. 图 3 为波场在该组参数下能量谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 在不同时刻的演化情况. 选取不同的观察时刻: $t = 0.080, 0.120, 0.140, 0.155, 0.160, 2.000$.

由图 3 可以看到: 初始扰动首先在所讨论的 \mathbf{k}

空间中波长较长 ($|\mathbf{k}|$ 值较小) 的位置上产生了非线性调制; 随着时间的推移, 当 $t = 0.120$ 时, 初始扰动的能量逐渐向波长较短 ($|\mathbf{k}|$ 值较大) 的位置上转移, 形成波坍缩, 并且初始扰动的能量逐渐增大; 当 $t = 0.140$ 时, 初始扰动的能量完全转移到波长最短的位置; 而在 $t = 0.155$ 时, 可以看到初始扰动又向波长较长 ($|\mathbf{k}|$ 值较小) 的位置的转移, 形成了逆级联, 并且初始扰动的能量也是逐渐增大的; 当 $t = 0.160$ 时, 可以看到在整个 \mathbf{k} 空间范围内出现了湍流态. 一直计算到 $t = 2.000$, 整个 \mathbf{k} 空间湍流相对比较均匀, 并且持续存在.

随后对当 $p = 1 + 0.04i$, $q = -10 + 0.6i$ 与

$p = -1 + 0.04i$, $q = -10 + 0.6i$ 以及 $p = 10 + 0.04i$, $q = 10 + 0.6i$ 时的波场演变进行了数值模拟. 通过对初始扰动的能谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 的演化进行分析得到: 首先是初始扰动的调制不稳定性出现在波长最长的位置, 随后初始扰动的能量传递到波长较短的位置, 形成波坍缩, 并在很短的时间内扰动的能量又返回向波长较长的位置传递形成逆级联, 最后在整个 \mathbf{k} 空间范围内产生湍流态. 这三组参数所产生的不稳定性的演化过程与图 2 和图 3 所描述的不稳定性的演化过程基本类似, 这里就不再一一列举演化图像.

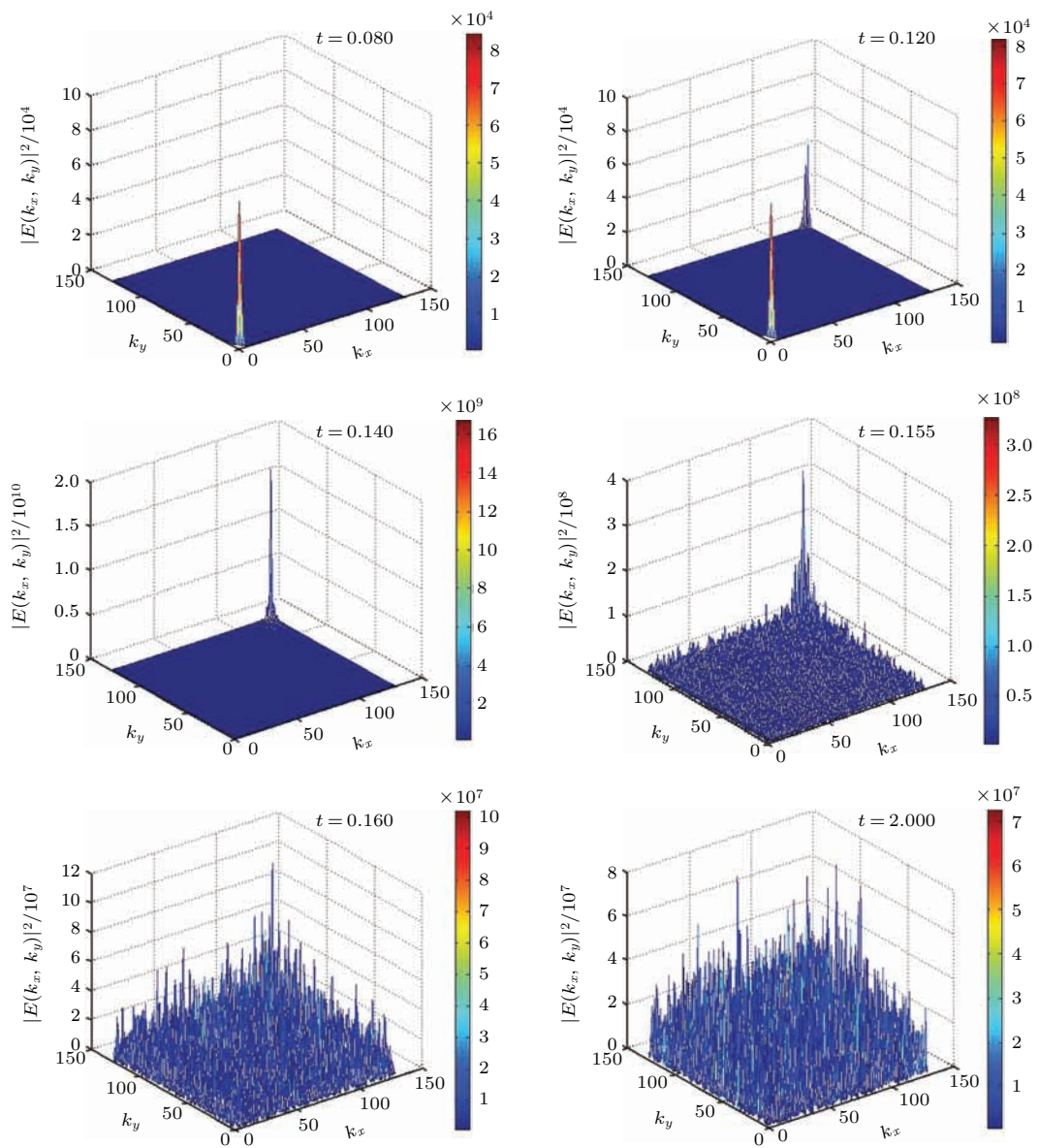


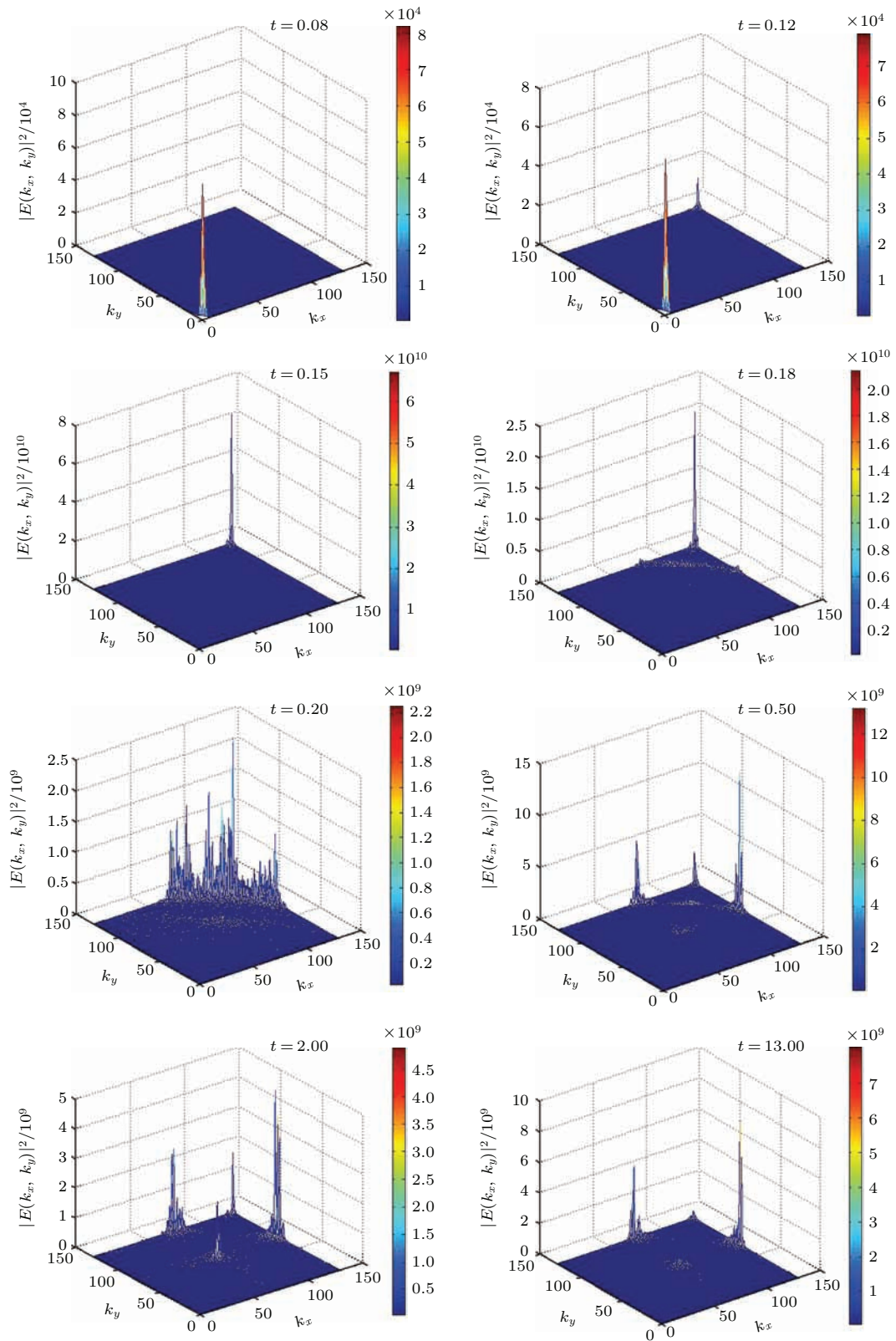
图3 (网刊彩色) 当 $p = -1 + 0.04i$, $q = 10 + 0.6i$ 时系统能谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 的演化

Fig. 3. (color online) The evolution of the spectrum $|E(k_x, k_y)|^2$ for $p = -1 + 0.04i$, $q = 10 + 0.6i$.

3.3 当 $p = 1 + 0.04i$, $q = 1 + 0.6i$ 时波场的演变

当选取方程 (1) 的复系数 $p = 1 + 0.04i$ 时, 改

变非线性频移系数的量级, 即 $q = 1 + 0.6i$, 图 4 给出了相空间中能谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 随时间增加的演化过程, 所选取的时刻为: $t = 0.08, 0.12, 0.15, 0.18, 0.20, 0.50, 2.00, 13.00, 25.00, 30.00$.



(Continued)

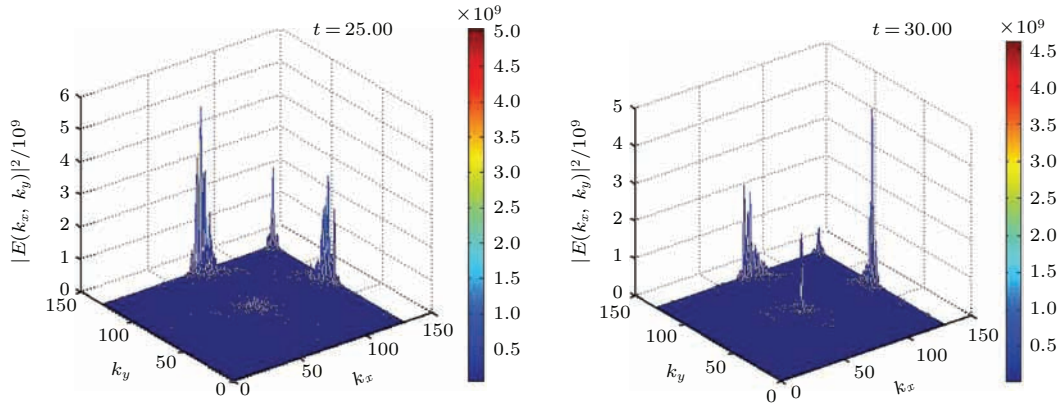


图4 (网刊彩色) 当 $p = 1 + 0.04i$, $q = 1 + 0.6i$ 时系统能谱 $|E(k_x, k_y)|^2$ 的演化

Fig. 4. (color online) The evolution of the spectrum $|E(k_x, k_y)|^2$ for $p = 1 + 0.04i$, $q = 1 + 0.6i$.

由图4可以看到, 当 $t = 0.08$ 时, 初始扰动出现了非线性调制, 能量主要凝结在 \mathbf{k} 空间中波长较长 ($|\mathbf{k}|$ 值较小) 的位置上, 同前面所描述的两种情形类似. 随着时间的增加, 当 $t = 0.12$ 时, 能量逐渐向波长较短 ($|\mathbf{k}|$ 值较大) 的位置上转移, 波坍缩现象出现, 此时初始扰动的能量逐渐增大. 当 $t = 0.15$ 时, 初始扰动的能量完全转移到波长最短的位置, 在很短的时间内, 大约在 $t = 0.18$ 时就可以看到逆级联, 与之前两种情形不同的是, 逆级联进程之后, 能量主要凝聚在 \mathbf{k} 空间中坐标 $(64, 128)$ 与 $(128, 64)$ 连线附近的位置, 而不是在整个空间位置, 并且初始扰动的能量也增大了. 当 $t = 0.20$ 时, 初始扰动的能量从短波长位置继续向长波长位置传播, $(64, 128)$ 与 $(128, 64)$ 连线处能量增强的同时, 能量又继续向中心位置传递, 此时能量主要集中在坐标 $(64, 128)$, $(128, 64)$, $(64, 64)$ 与边界点 $(128, 128)$ 所围成的区域内, 即湍流态出现在 \mathbf{k} 空间的 $1/4$ 的区域内, 并且在 $(64, 128)$ 与 $(128, 64)$ 连线处能量最强. 随着时间的进一步演化, 从 $t = 0.50$ 一直到 $t = 30.00$, 如图4所示, 我们可以发现系统的能量主要凝聚在 \mathbf{k} 空间中3个不同的波矢终端附近区域, 这里讨论的是有限区域, 边界点 $(128, 128)$ 处的扰动能量会受边界条件影响, 不考虑边界位置的情况, 即在 $(64, 128)$, $(128, 64)$, $(64, 64)$ 附近区域, 尤其在3个位置的能量较强. 一直计算到 $t = 85$, 能量始终凝聚在3个不同波矢终端位置附近.

4 结 论

本文主要讨论了非线性薛定谔方程的复系数 p 与 q 的实数部分的大小与正负对波场演变过程的影

响. 通过大量的数值计算可以发现, 当改变复系数 p 与 q 的实数部分的正负以及复系数 p 的实数部分的大小时, 波场的演变进程是一样的, 都是先在所研究的 \mathbf{k} 空间范围中波长较长的位置产生调制不稳定性, 并且出现波坍缩、逆级联以及整个空间内的湍流态. 而当讨论 $p = 1 + 0.04i$, $q = 1 + 0.6i$ 时, 即当改变非线性频移的系数时, 可以发现原来的波级联进程发生了变化: 首先是在波长最长的位置产生了调制不稳定性, 出现波坍缩现象, 逆级联出现后, 湍流刚开始只出现在一条直线范围上, 随着时间的推移, 湍流逐渐出现在了 \mathbf{k} 空间的 $1/4$ 的区域内, 随着时间进一步演化, 最终波场的能量主要凝聚在3个不同波矢终端的附近区域.

通过改变广义非线性薛定谔方程中的色散项以及色散项的非线性频移系数, 数值研究发现一个小小的初始扰动能够引起波场的调制不稳定性、波长最短位置处的波坍缩^[6-8]以及逆级联现象, 并且发现随着时间的演化, 系统的能量凝聚在3个不同波矢终端位置附近, 但仍然没有发现自组织现象^[11], 也就是说在较早的无序状态下没有比较规则的结果形成. 同时本文的工作也可以运用到材料科学、流体力学、量子力学、原子以及等离子物理学、生物学以及一些其他科学领域.

参考文献

- [1] Zhang Y D 2008 *Quantum Mechanics* (2nd Ed.) (Beijing: Science Press) p239 (in Chinese) [张永德 2008 量子力学 (第二版) (北京: 科学出版社) 第239页]
- [2] Zhao L, Sui Z, Zhu Q H, Zhang Y, Zuo Y L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4731 (in Chinese) [赵磊, 隋展, 朱启华, 张颖, 左言磊 2009 物理学报 **58** 4731]

- [3] Goldman M V 1984 *Rev. Mod. Phys.* **56** 709
- [4] Zhou C T, Yu M Y, He X T 2006 *Phys. Rev. E* **73** 026209
- [5] Zhao D, Yu M Y 2011 *Phys. Rev. E* **83** 036405
- [6] Zhao D, Tian L P, Cui S Y, Yu M Y 2012 *Phys. Scr.* **86** 035501
- [7] Cui S Y, Yu M Y, Zhao D 2013 *Phys. Rev. E* **87** 053104
- [8] Yu M Y, Cui S Y, Zhao D 2015 *Europhys. Lett.* **109** 65001
- [9] Itoh S I, Itoh K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 095201
- [10] Feng C H, Wang W H, He Y X, Gao Z, Zeng L, Zhang G P, Xie L F 2004 *Chin. Phys.* **13** 2091
- [11] Nicolis G, Prigogine I 1977 *Self-Organization in Non-equilibrium Systems: From Dissipative Structures to Order through Fluctuations* (New York: Wiley) p169

Collapse and evolution of wave field based on a generalized nonlinear Schrödinger equation*

Cui Shao-Yan[†] Lü Xin-Xin Xin Jie

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264025, China)

(Received 18 September 2015; revised manuscript received 26 October 2015)

Abstract

A generalized nonlinear Schrödinger equation is numerically studied using the split-step Fourier method. For a fixed external potential field and an initial pulse disturbance, the effects of the complex coefficients p and q in the nonlinear Schrödinger equation on the evolution of the wave field are investigated. From a large number of simulations, it is found that the evolution of the wave field remains similar for different signs of the real parts of p and q , and different values of the real part of p . The initial pulse consisting of the longest wavelength modes (in the smallest- $|\mathbf{k}|$ corner of the phase space) of the spectrum first suffers modulational instability. Collapse begins at $t \sim 0.1$, followed by inverse cascade of the shortest wavelength modes to longer wavelength ones, so that the whole \mathbf{k} space becomes turbulent. For $p = 1 + 0.04i$, and $q = 1 + 0.6i$, it is found that first modulational instability occurs in the longer wavelength regime and the wave energy is transferred to the larger $|\mathbf{k}|$ modes. Then the wave collapse appears with increasing wave energy. Next, the large- $|\mathbf{k}|$ modes condense into a smaller- $|\mathbf{k}|$ mode by inverse cascade before spreading to the center of the phase space, until a turbulent state occurs there. Finally, most of the wave energy is condensed to the neighborhoods of three modes.

Keywords: nonlinear Schrödinger equation, collapse, turbulence, inverse cascade

PACS: 02.60.Cb, 47.27.Cn, 82.40.Ck, 47.20.Gv

DOI: 10.7498/aps.65.040201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11105065, 11371183).

[†] Corresponding author. E-mail: shycui@126.com