物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

Lifshitz时空s波超导模型的关联长度和穿透深度

杨卓群　吴亚波　鲁军旺　张成园　张雪

Coherence length and magnetic penetration depth of the s-wave holographic superconductor model in Lifshitz spacetime

Yang Zhuo-Qun　Wu Ya-Bo　Lu Jun-Wang　Zhang Cheng-Yuan　Zhang Xue

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 65, 040401 (2016)　DOI: 10.7498/aps.65.040401
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.040401
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I4

Lifshitz时空s波超导模型的关联长度和穿透深度*

杨卓群[1)] 吴亚波[1)†] 鲁军旺[2)] 张成园[1)] 张雪[1)]

1) (辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

2) (黔南民族师范学院物理与电子科学系, 都匀 558000)

(2015 年 8 月 15 日收到; 2015 年 11 月 30 日收到修改稿)

在 $D = d + 2$ 维各向异性的 Lifshitz 黑洞时空背景中, 在探子极限下, 用解析方法研究了临界温度附近引力系统的微扰, 计算出超导的关联长度 $\xi \propto \dfrac{1}{T_c}\left(1-\dfrac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$, 这与平均场论的结果一致. 进一步, 考虑在该系统中加一个均匀外磁场, 计算出穿透深度 $\lambda \propto \left(T_c - T\right)^{-1/2}$, 该结果与 Ginzburg-Landau 理论相符.

关键词: 全息超导, Lifshitz 黑洞, 关联长度, 穿透深度

PACS: 04.70.Bw, 04.90.+e, 74.20.–z, 74.25.–q **DOI:** 10.7498/aps.65.040401

1 引 言

2015 年是爱因斯坦完成广义相对论一百周年. 广义相对论是非常成功的引力理论, 它不仅成功地解释了水星近日点进动和太阳引力场对星光的弯曲等问题, 而且彻底地改变了人们的时空观: 时空不再是物质运动的绝对框架, 而是一个弯曲的流形, 它可以与自身或其他物质发生相互作用. 同时, 广义相对论还预言宇宙空间中存在着一类奇特的致密天体, 它导致空间发生严重弯曲以致光线都无法逃脱其视界. 由于其类似于热力学中的黑体, 所以称为黑洞. 随后, 人们提出各种黑洞解并对黑洞这类强引力场的各方面性质展开系统研究, 尤其在热力学方面. 在通常热力学和统计物理中, 熵是一个系统的物理自由度且与体积成正比. 然而, 在 1973 年, Bekestein [1] 指出黑洞存在热力学熵并且正比于黑洞的视界面面积, 这仿佛告诉人们黑洞内部的物理可以从其表面解读出来. 1974 年, Hawking [2] 证明黑洞并不是黑的, 而是时刻向外发出热辐射, 从而说明黑洞是一个有温度的热力学系统, 同时也为 Bekestein 的面积熵提供了直接证据. 受到黑洞面积熵的启发, 1993 年, Hooft [3] 提出引力的全息原理并在 1994 年由 Susskind [4] 进一步阐述和深化, 全息原理指出: 一个 D 维引力体系的自由度等价于其 $(D-1)$ 维边界上没有引力的体系自由度.

1997 年, Maldacena [5] 通过考虑 N 张重合 $D3$ 膜的低能极限, 猜想 $AdS_5 \times S^5$ 中的 IIB 型超引力对应于其边界上的四维 SU(N)Yang-Mills (YM) 场论, 从而找到了一个引力全息原理的例子. 因为引力一边是反德西特 (AdS) 时空, 同时, 与引力对应的边界场论是一个共形场理论 (CFT), 所以这一对应又简称为 AdS/CFT 对应. 1998 年, 文献 [6, 7] 进一步独立地发展了 AdS/CFT 对应, 从数学上严格推导出了 AdS 引力与其边界共形场论中物理量的具体对应关系 (对偶字典), 尤其给出了边界场论中 n 点关联函数与引力作用量的关系. 后来, 人们又发现, AdS/CFT 对应不必要求边界场论具有超对称和共形不变性. 甚至可以说, AdS/CFT 对应不通过超弦理论也可以得到. 推广后的 AdS/CFT 对应被称为规范/引力对偶 (gauge/gravity duality). 规范/引力对偶的一个重要特征就是引力场与其对应的边界场之间的强弱对偶性: 当边界场论涉及到强相互作用时, 与它对偶的引力就是弱耦合理论,

* 国家自然科学基金 (批准号: 11175077, 11575075) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ybwu61@163.com

反之亦然. 可见, 规范/引力对偶为强耦合场论的研究提供了一个新的思路. 我们知道, 随着科技的发展, 人们不论是在实验方面还是理论方面时常遇到强耦合系统, 比较典型的情况是近年来凝聚态材料中观察到的强电子关联系统. 这种强相互作用使得传统的微扰方法无能为力, 从而阻碍着人们对物理规律的进一步探索. 然而, 现在人们可以通过规范/引力对偶把凝聚态系统中的强相互作用场论对应到弱引力体系中来, 进而通过探究弱引力相互作用来解决场论中的强相互作用.

2008年, Hartnoll等[8]首先把电磁场和带电复标量场耦合到各向同性的四维Schwarzschild AdS黑洞中, 在探子极限下通过Abelian-Higgs机制构建了全息s波超导体模型. 该模型中电磁场用来模拟相变的U(1)规范对称性, 黑洞用来实现超导体的温度, 同时, 复标量场作为超导相下的序参量. 同年, Maeda和Okamura[9]运用解析方法, 计算出了该模型下的关联长度ξ与$(1-T/T_{\rm c})^{-1/2}$成正比, 这个结果与Ginzburg-Landau理论一致, 并且强有力地证明了可以通过AdS/CFT对应, 把带电标量场耦合到黑洞中, 来构造超导相变. 之后, 人们还构建了全息p波和d波超导体模型[10−12]. 此外, 国内外学者运用数值方法和解析方法, 在非相对论引力背景中, 构建了全息超导(流)模型[13−21].

近年来, 随着对全息超导的深入研究, 人们不断提出新的模型来实现全息超导. 例如: Rogatko等在Schwarzschild黑洞全息s波超导模型的基础上又考虑了暗物质矢量对全息超导的影响, 即具体运用解析方法来研究暗物质矢量对全息超导的影响[22]、暗物质矢量对全息相变的影响[23]以及暗物质矢量存在时的全息涡旋[24]. 在Stückelberg全息超导模型[25]基础上, 通过考虑非最小微商耦合理论(即带电标量场与爱因斯坦张量相耦合), 人们研究了耦合参数对超导相变的影响, 并计算出电导率[26]. 进一步, 考虑背景反作用和通过选取标量场新的高阶修正形式, 构造了新的Stückelberg全息超导模型[27], 同时研究了模型参数以及反作用对标量场凝聚的影响, 尤其是对相变阶数的影响.

因为凝聚态系统在很多情况下表现为时空各向异性的性质, 为此人们提出了与之相对偶的引力, 如Lifshitz引力[28]. 不过, 在文献[28]中, 作者仅仅考虑了动力学临界指数$z=2$时四维时空中的情况. 为了更清楚地观察到时空各向异性对超导体凝聚的影响, 我们不仅通过数值方法考虑了任意维度Lifshitz黑洞时空中带有任意动力学临界指数z情况下的超导模型及其电导率, 而且还通过解析方法计算了相变温度以及临界点附近的凝聚情况[29]. 研究结果表明, 由解析方法所得结果与数值方法一致. 此外, 根据Ginzburg-Landau理论, 我们知道关联长度ξ和穿透深度λ是体现超导体特性的两个重要物理量. 而Lifshitz黑洞是具有洛伦兹对称性破缺的非相对论引力理论中的黑洞, 在该类黑洞时空中研究全息超导, 有助于人们对AdS/CFT对应的理解. 为此, 本文在$D=d+2$维Lifshitz黑洞时空背景中, 在探子极限下, 运用解析方法来研究临界点附近关联长度ξ和穿透深度λ的超导性质.

2 Lifshitz黑洞时空背景下的s波超导模型

在很多凝聚态材料中, 系统表现为所谓的Lifshitz定点, 该定点展现出时空的各向异性特点, 如: $t\to a^z t$, $\boldsymbol{x}\to a\boldsymbol{x}$ $(z\neq 1)$, 其中, z称为Lifshitz动力学临界指数, 表征着时空各向异性的程度. 当$z=1$时, 时空回到标准的广义相对论. 由于各向异性特点打破了Lorentz不变性, 从而使系统表现为非相对论特点. 由于通常的Einstein引力具有Lorentz不变性, 所以, 为了研究非相对论场论中的全息超导, 我们必须对Einstein引力描述加以修改.

在2008年, Kachru等[28]提出, 带有负宇宙学常数的$D=d+2$维引力可以产生对偶于Lifshitz标度的度规形式

$$\mathrm{d}s^2=L^2\Big(-r^{2z}\mathrm{d}t^2+r^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2}\Big),\qquad(1)$$

其中$0<r<\infty$, $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2=\mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_d^2$, $1\leqslant z\leqslant d$, L是几何曲率的标度. 如果普朗克长度为1, 则以上的各个量都无量纲. 此时, 标度变换的形式为$t\to a^z t$, $\boldsymbol{x}\to a\boldsymbol{x}$, $r\to r/a$. 显然, 当$z=1$时, 该几何可以约化为AdS_{d+2}时空, 具有较大的$SO(d+1,2)$对称性. 当$z>1$时, 它是带有Lifshitz标度的引力. 此外, 该Lifshitz时空(1)还可以通过一个无质量标量场耦合一个阿贝尔规范场得到, 其作用量具体形式为[30]

$$S=\frac{1}{16\pi G_{d+2}}\int\mathrm{d}^{d+2}x\sqrt{-g}\Big(R-2\varLambda-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\alpha\varphi}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}\Big).\qquad(2)$$

推广到有限温度的引力系统, (1) 式可以写为[31]

$$\mathrm{d}s^2 = L^2\Big(-r^{2z}f(r)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 f(r)} + r^2\sum_{i=1}^{d}\mathrm{d}x_i^2\Big), \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{r_{\mathrm{h}}^{z+d}}{r^{z+d}},\\ \varLambda &= -\frac{(z+d-1)(z+d)}{2L^2}, \qquad (4)\\ \mathcal{F}_{rt} &= \sqrt{2L^2(z-1)(z+d)}\,r^{z+d-1},\\ e^{a\varphi} &= r^{-2d}, \quad a^2 = \frac{2d}{z-1}. \qquad (5)\end{aligned}$$

黑洞的霍金温度为

$$T = \frac{(z+d)r_{\mathrm{h}}^{z}}{4\pi}, \tag{6}$$

r_{h} 为黑洞的视界半径. 令 $L^2 = 1$, 为了方便计算, 作变量代换, 引入一个新变量 $u = r_{\mathrm{h}}/r$, 度规 (3) 式变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\frac{\alpha^2(T)f(u)}{u^{2z}}\mathrm{d}t^2 + \frac{1}{u^2 f(u)}\mathrm{d}u^2\\ &+ \frac{r_{\mathrm{h}}^2}{u^2}\sum_{i=1}^{d}\mathrm{d}x_i^2,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $f(u) = 1 - u^{z+d}$, $\alpha(T) = \dfrac{4\pi}{(z+d)}T = r_{\mathrm{h}}^{z}$. 考虑 Abelian-Higgs 模型[8], 拉氏量密度是由一个复标量场 $\varPsi$ 和一个 Maxwell 场组成, 其具体形式为

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - |D_\mu\varPsi|^2 - m^2|\varPsi|^2, \tag{8}$$

其中, $D_\mu = \nabla_\mu - \mathrm{i}qA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, m 和 q 分别是标量场的质量和电荷. 在探子极限下 (即不考虑物质场部分对 Lifshitz 引力背景的反作用), 从 (8) 式可得出标量场和 Maxwell 场的运动方程分别为

$$D^2\varPsi - m^2\varPsi = 0, \tag{9}$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} - \mathrm{i}(\varPsi^* D_\nu\varPsi - \varPsi D_\nu^*\varPsi^*) = 0. \tag{10}$$

通过考虑拉氏量 (8) 的规范对称性, 对物质场和规范场选取如下的简单形式

$$\varPsi = \varPsi(u), \quad A_\mu = \varPhi(u)\mathrm{d}t, \tag{11}$$

则运动方程 (9) 和 (10) 式分别变成

$$\Big(u^{z+d-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{f(u)}{u^{z+d-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} - \frac{m^2}{u^2}\Big)\tilde{\varPsi} + \frac{u^{2z-2}\tilde{\varPhi}^2}{f(u)}\tilde{\varPsi} = 0, \tag{12}$$

$$f(u)\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\varPhi}}{\mathrm{d}u^2} - \frac{(d-z-1)f(u)}{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tilde{\varPhi} - \frac{2|\tilde{\varPsi}|^2}{u^2}\tilde{\varPhi} = 0, \tag{13}$$

其中, $\tilde{\varPhi} = \frac{\varPhi}{\alpha(T)}$, $\tilde{\varPsi} = L\varPsi = \varPsi(\mathrm{L{=}1})$ 都是无量纲的量. 不失一般性, 我们取 $\tilde{\varPsi}$ 是实的, 从而得到平庸解

$$\tilde{\varPsi} = 0, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varPhi} &= \frac{\mu}{\alpha(T)} - qu^{d-z} = q(1-u^{d-z}), \quad z<d;\\ \tilde{\varPhi} &= \frac{\mu}{\alpha(T)} - \frac{\rho}{\alpha(T)}\log\Big(\frac{\zeta r_{\mathrm{h}}}{u}\Big), \quad z=d,\end{aligned} \tag{15}$$

其中, ζ 是常数. 现在, 考虑物质场和规范场的边界条件. 在视界面 $(u=1)$ 处, 为保证 A_μ 的有限形式, 则要求规范场 $\varPhi(1)=0$, 而对标量场 $\varPsi(1)$ 只需要有限即可. 在无限远边界 $(u\to 0)$ 处, 根据运动方程 (12) 和 (13) 式, 它们的渐近行为表示为

$$\tilde{\varPsi} \approx \mathcal{O}_-\frac{u^{\varDelta_-}}{r_{\mathrm{h}}^{\varDelta_-}} + \mathcal{O}_+\frac{u^{\varDelta_+}}{r_{\mathrm{h}}^{\varDelta_+}} + \cdots, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varPhi} &\approx \frac{\mu}{\alpha(T)} - qu^{d-z} + \cdots, \quad z<d;\\ \tilde{\varPhi} &\approx \frac{\mu}{\alpha(T)} - \frac{\rho}{\alpha(T)}\log\Big(\frac{\zeta r_{\mathrm{h}}}{u}\Big) + \cdots, \quad z=d,\end{aligned} \tag{17}$$

其中, $\varDelta_\pm = \dfrac{1}{2}\Big((z+d)\pm\sqrt{(z+d)^2+4m^2}\Big)$. 根据 AdS/CFT 字典, μ, ρ 分别是边界场论的化学势和电荷密度, q 为无量纲常数. 当 $\mathcal{O}_-$ 对应着边界场论的源时, 渐近系数 $\mathcal{O}_+$ 对应着标度量纲 $\varDelta_+$ 的算符. 若取 $\mathcal{O}_- = 0$(或 $\mathcal{O}_+ = 0$), 则系数 $\mathcal{O}_+$ (或 $\mathcal{O}_-$)(标度量纲 $\varDelta_+$ 或 $\varDelta_-$) 就是超导序参量. 由于在 $z=d$ 时, 规范场的渐近解中会出现对数项, 从而导致很难把规范场在边界处展开, 所以本文只考虑 $z<d$ 的情况.

根据数值计算结果[29] 可知, 在临界温度 T_{c} 附近, 序参量

$$\langle\mathcal{O}_\pm\rangle \sim (1-T/T_{\mathrm{c}})^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

因此, 我们引入一个小参量 $\epsilon = (1-T/T_{\mathrm{c}})$, 在临界温度附近, (12) 和 (13) 式的非平庸解就可按 ϵ 展开.

根据连续性要求, 在临界温度处我们有

$$\tilde{\varPsi}_{\mathrm{c}} = 0, \ \tilde{\varPhi}_{\mathrm{c}} = q_{\mathrm{c}}(1-u^{d-z}). \tag{19}$$

将 $\tilde{\varPsi}$ 和 $\tilde{\varPhi}$ 展开为

$$\begin{aligned}\tilde{\varPsi}(u) &= \epsilon^{1/2}\tilde{\varPsi}_1(u) + \epsilon^{3/2}\tilde{\varPsi}_2(u) + \cdots,\\ \tilde{\varPhi}(u) &= \tilde{\varPhi}_{\mathrm{c}}(u) + \epsilon\tilde{\varPhi}_1(u) + \cdots\end{aligned} \tag{20}$$

于是可得到$\tilde{\Psi}_1$的方程

$$\mathcal{L}_\psi \tilde{\Psi}_1 = 0, \tag{21}$$

其中, 算符$\mathcal{L}_\psi$为

$$\mathcal{L}_\psi = -\left(u^{z+d-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{f(u)}{u^{z+d-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} - \frac{m^2}{u^2} + \frac{u^{2z-2}\tilde{\Phi}_\mathrm{c}}{f(u)}\right). \tag{22}$$

3 关联长度

根据Ginzburg-Landau理论, 关联长度ξ和穿透深度λ是体现超导特性的两个物理量. 我们知道关联长度ξ由序参量在Fourier空间的静态关联函数的复极点给出:

$$\left\langle \tilde{\mathrm{O}}(\boldsymbol{k})\tilde{\mathrm{O}}(-\boldsymbol{k})\right\rangle \sim \frac{1}{|\boldsymbol{k}|^2 + 1/\xi^2}. \tag{23}$$

在探子极限下, 通过给场$(\tilde{\Psi}, \tilde{\Phi})$加一个微扰, 可计算出极点$|\boldsymbol{k}|^2$, 从而计算出关联长度. 在这里我们只考虑打开$x$方向的微扰:

$$\begin{aligned}\delta A_\mu(u,x)\mathrm{d}x^\mu = {}& [A_x(u,k)\mathrm{d}x + A_y(u,k)\mathrm{d}y \\ &+ \phi(u,k)\mathrm{d}t]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\end{aligned} \tag{24}$$

$$\delta\Psi(u,x) = \frac{1}{\alpha(T)}[\psi(u,k) + \mathrm{i}\widehat{\psi}(u,k)]\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \tag{25}$$

其中, ψ和$\widehat{\psi}$都是实函数. 从而可得到关于ϕ, ψ和A_y的线性阶方程

$$\begin{aligned}\tilde{k}^2\psi = {}& \Bigg(u^{z+d-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{f(u)}{u^{z+d-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} - \frac{m^2}{u^2} \\ &+ \frac{u^{2z-2}\tilde{\Phi}^2}{f(u)}\Bigg)\psi + \frac{2u^{2z-2}\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}}{f(u)}\phi,\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\tilde{k}^2\phi = {}& \left(f(u)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} - \frac{2r_\mathrm{h}^{d-z-1}\tilde{\Psi}^2}{u^{d-z+1}}\right)\phi \\ &- \frac{4r_\mathrm{h}^{d-z-1}\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}}{u^{d-z+1}}\psi,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\tilde{k}^2 A_y = \frac{1}{r_\mathrm{h}^{2z-2}}\left(u^{z+d-3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{f(u)}{u^{z+d-3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} - \frac{2\tilde{\Psi}^2}{u^2}\right)A_y, \tag{28}$$

其中, $\tilde{k} = k/\alpha(T)$.

根据(20)式, (26)式可按ϵ展开如下

$$\begin{aligned}-\tilde{k}^2\psi = {}& \left(\mathcal{L}_\psi - \frac{2u^{2z-2}\epsilon\tilde{\Phi}_\mathrm{c}\tilde{\Phi}_1}{f(u)}\right)\psi \\ &- \frac{2u^{2z-2}\epsilon^{1/2}\tilde{\Phi}_\mathrm{c}\tilde{\Psi}_1}{f(u)}\phi,\end{aligned} \tag{29}$$

令$\phi = \epsilon^{1/2}\varphi$, 则

$$-\tilde{k}^2\psi = \mathcal{L}_\psi\psi - \epsilon\frac{2u^{2z-2}\tilde{\Phi}_\mathrm{c}}{f(u)}(\tilde{\Phi}_1\psi + \tilde{\Psi}_1\varphi). \tag{30}$$

把ψ, φ和$\tilde{k}^2$按ϵ展开如下

$$\begin{aligned}\psi &= \tilde{\Psi}_1 + \epsilon\psi_1 + O(\epsilon^2), \\ \varphi &= \varphi_0 + O(\epsilon), \\ \tilde{k}^2 &= \epsilon\tilde{k}_1^2 + O(\epsilon^2).\end{aligned} \tag{31}$$

则(30)式变为

$$-\tilde{k}_1^2\tilde{\Psi}_1 = \mathcal{L}_\psi\psi_1 - \frac{2u^{2z-2}\tilde{\Phi}_\mathrm{c}\tilde{\Psi}_1}{f(u)}(\tilde{\Phi}_1 + \varphi_0). \tag{32}$$

现在, 我们引入一个内积的定义:

$$\langle\psi_\mathrm{I}|\psi_\mathrm{II}\rangle = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2}\psi_\mathrm{I}^*(u)\psi_\mathrm{II}(u). \tag{33}$$

利用(21)式和$\mathcal{L}_\psi$的厄米特性, 则$\tilde{\Psi}_1$与(32)式的内积为

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1^2\langle\tilde{\Psi}_1|\tilde{\Psi}_1\rangle = {}& \langle\tilde{\Psi}_1|\frac{2u^{2z-2}\tilde{\Phi}_\mathrm{c}\tilde{\Psi}_1}{f(u)}\tilde{\Phi}_1\rangle \\ &+ 2\int_0^1 u^{2z-4}\mathrm{d}u\frac{\tilde{\Phi}_\mathrm{c}\tilde{\Psi}_1^2}{f(u)}\varphi_0.\end{aligned} \tag{34}$$

由于$\mathcal{L}_\psi$的厄米特性和$\tilde{\Psi}_2$的运动方程, 即

$$\mathcal{L}_\psi\tilde{\Psi}_2 = \frac{2u^{2z-2}\tilde{\Phi}_\mathrm{c}\tilde{\Psi}_1}{f(u)}\tilde{\Phi}_1, \tag{35}$$

故(34)式等号右边的第一项为零. 利用$\tilde{k}^2 = \epsilon\tilde{k}_1^2$, 在一阶近似下, 本征值$\tilde{k}$写为

$$\tilde{k}^2 = \epsilon\frac{N}{D} + O(\epsilon^2), \tag{36}$$

其中,

$$\begin{aligned}N &= 2\int_0^1 \mathrm{d}u\frac{u^{2z}\tilde{\Phi}_\mathrm{c}\tilde{\Psi}_1^2}{u^4 f(u)}\varphi_0, \\ D &= \int_0^1 \mathrm{d}u\frac{\tilde{\Psi}_1^2(u)}{u^2}.\end{aligned}$$

于是, 我们得到关联长度为

$$\xi = \frac{\epsilon^{-1/2}}{\alpha(T_\mathrm{c})}\sqrt{\frac{D}{N}} + O(\epsilon^2) \propto \frac{1}{T_\mathrm{c}}\left(1 - \frac{T}{T_\mathrm{c}}\right)^{-1/2}. \tag{37}$$

它与Ginzburg-Landau理论相符.

4 穿透深度

考虑空间中存在一个垂直于超导体表面的均匀外部磁场, 假设$\delta A_y(u,x) = b(u)x$(磁场

$F_{xy}=\partial_x\delta A_y=b(u)$), 在探子极限下, 可得到$b(u)$的运动方程

$$\left(u^{z+d-3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{f(u)}{u^{z+d-3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}-\frac{2\tilde{\Psi}^2}{u^2}\right)b(u)=0, \quad (38)$$

其中, $b(u)$满足在视界面($u=1$)处的正则性边界条件. 同时, 把$b(u)$展开如下:

$$b(u)=b_0(u)+\epsilon b_1(u)+O(\epsilon^2), \quad (39)$$

于是, 得到关于b_0, b_1的方程

$$u^{z+d-3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{f(u)}{u^{z+d-3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}b_0(u)=0, \quad (40)$$

$$u^{z+d-3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{f(u)}{u^{z+d-3}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}b_1(u)-\frac{2\tilde{\Psi}_1^2}{u^2}b_0(u)=0, \quad (41)$$

其中, $b_0(u)=C$(C为常数). 进而可得

$$\frac{\mathrm{d}b_1}{\mathrm{d}u}=-\frac{2Cu^{z+d-3}}{f(u)}\int_u^1\mathrm{d}u_0\frac{\tilde{\Psi}_1^2(u_0)}{u_0^{z+d-1}}. \quad (42)$$

根据(42)式和b_0为常数, 可得

$$b(u)=B-2\epsilon B\int_0^u\mathrm{d}u_1\frac{u_1^{z+d-3}}{f(u_1)}\int_{u_1}^1\mathrm{d}u_0\frac{\tilde{\Psi}_1^2(u_0)}{u_0^{z+d-1}}+O(\epsilon^2). \quad (43)$$

从而, 我们得到

$$\delta A_y(u,x)=\delta A_y^{(0)}(x)\left(1-2\epsilon\int_0^u\mathrm{d}u_1\frac{u_1^{z+d-3}}{f(u_1)}\times\int_{u_1}^1\mathrm{d}u_0\frac{\tilde{\Psi}_1^2(u_0)}{u_0^{z+d-1}}\right), \quad (44)$$

其中,

$$B=\lim_{u\to0}b(u),\quad \delta A_y^{(0)}(x)=\lim_{u\to0}\delta A_y(u,x).$$

根据AdS/CFT对偶字典, 在临界温度T_c附近, 电流的期望值$\langle J_y(x)\rangle$为

$$\langle J_y(x)\rangle\sim-\epsilon T_\mathrm{c}\delta A_y^{(0)}(x). \quad (45)$$

进一步, 根据London方程

$$\boldsymbol{J}=-\frac{e_*^2}{m_*}\psi^2\boldsymbol{A}=-e_*n_\mathrm{s}\boldsymbol{A}, \quad (46)$$

其中, e_*, m_*分别是序参量的有效电荷和有效质量, n_s是超流数密度. 比较(45)和(46)式, 我们可得到在临界温度附近, 超流数密度为

$$n_\mathrm{s}\sim\epsilon T_\mathrm{c}\sim\left(T_\mathrm{c}-T\right). \quad (47)$$

再者, 由Ginzburg-Landau理论可知, 穿透深度为

$$\lambda\sim1/\sqrt{n_\mathrm{s}}. \quad (48)$$

于是, 我们给出临界温度附近的穿透深度

$$\lambda\propto\left(T_\mathrm{c}-T\right)^{-1/2}. \quad (49)$$

可见, 此结果与Ginzburg-Laudau理论一致.

5 讨论与结论

我们在$D=d+2$维各向异性的Lifshitz黑洞时空背景中, 在探子极限下, 用解析方法分别研究了关联长度和穿透深度这两个物理量在超导相变点附近的性质. 结果表明关联长度$\xi\propto\dfrac{1}{T_\mathrm{c}}\left(1-\dfrac{T}{T_\mathrm{c}}\right)^{-1/2}$, 而穿透深度$\lambda$与$(T_\mathrm{c}-T)^{-1/2}$成正比, 这些与Ginzburg-Landau理论相符.

值得指出的是, 上述结果是在探子极限下研究所得. 为了更真实地反映系统的物理性质, 在未来的工作中, 我们将考虑物质场和磁场对背景时空的反作用, 即考虑偏离探子极限下的全息超导模型的情况.

参考文献

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2333
[2] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
[3] Hooft G T 1993 arXiv:gr-qc/9310026
[4] Susskind L 1995 *J. Math. Phys.* **36** 6377
[5] Maldacena J M 1999 *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1113
[6] Witten E 1998 *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253
[7] Gubser S S, Klebanov I R, Polyakov A M 1998 *Phys. Lett. B* **428** 105
[8] Hartnoll S A, Herzog C P, Horowitz G T 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 031601
[9] Maeda K, Okamura T 2008 *Phys. Rev. D* **78** 106006
[10] Gubser S S, Pufu S S 2008 *J. High Energy Phys.* **11** 033
[11] Cai R G, Li L, Li L F 2014 *J. High Energy Phys.* **01** 032
[12] Chen J W, Kao Y J, Maity D, Wen W Y, Yeh C P 2010 *Phys. Rev. D* **81** 106008
[13] Cai R G, He S, Li L, Li L F 2013 *J. High Energy Phys.* **12** 036
[14] Nie Z Y, Cai R G, Gao X, Zeng H 2013 *J. High Energy Phys.* **11** 087
[15] Horowitz G T, Roberts M M 2008 *Phys. Rev. D* **78** 126008
[16] Cai R G, Li L F, Wang Y Q 2013 *J. High Energy Phys.* **09** 074
[17] Cai R G, Nie Z Y and Zhang H Q 2010 *Phys. Rev. D* **82** 066007
[18] Ling Y, Niu C, Wu J P, Xian Z Y, Zhang H B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 091602
[19] Zeng X X, Liu X M, Liu W B 2014 *J. High Energy Phys.* **03** 031
[20] Wu Y B, Lu J W, Zhang C Y, Zhang N, Zhang X, Yang Z Q, Wu S Y 2015 *Phys. Lett. B* **741** 138

[21] Wu Y B, Lu J W, Liu M L, Lu J B, Zhang C Y, Yang Z Q 2014 *Phys. Rev. D* **89** 106006
[22] Nakonieczny L, Rogatko M 2014 *Phys. Rev. D* **90** 106004
[23] Nakonieczny L, Rogatko M, Wysokinski K 2015 *Phys. Rev. D* **92** 066008
[24] Franco S, Garcia-Garcia A M, Rodriguez-Gomez D 2010 *J. High Energy Phys.* **04** 092
[25] Rogatko M, Wysokinski K 2015 arXiv:1510.06137[hep-th]
[26] Chen S B, Pan Q Y, JIng J L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 040403
[27] Peng Y, Deng F A, Liu G H, Yang K F 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 157401 (in Chinese) [彭严, 邓方安, 刘国华, 杨凯凡 2015 物理学报 **64** 157401]
[28] Kachru S, Liu X, Mulligan M 2008 *Phys. Rev. D* **78** 106005
[29] Lu J W, Wu Y B, Qian P, Zhao Y Y, Zhang X, Zhang N 2014 *Nucl. Phys. B* **887** 112
[30] Taylor M 2008 arXiv:0812.0530[hep-th]
[31] Pang D W 2014 *Commun. Theor. Phys.* **62** 265

Coherence length and magnetic penetration depth of the s-wave holographic superconductor model in Lifshitz spacetime*

Yang Zhuo-Qun[1)] Wu Ya-Bo[1)†] Lu Jun-Wang[2)] Zhang Cheng-Yuan[1)] Zhang Xue[1)]

1) (*School of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China*)

2) (*Department of Physics, Qiannan Normal College for Nationalities, Duyun 558000, China*)

(Received 15 August 2015; revised manuscript received 30 November 2015)

Abstract

The (anti-de Sitter/conformal field theory, AdS/CFT) duality provides us a powerful guidance to study the strong-coupled conformal field theory by using its dual weak-coupled gravity. One of the interesting applications of the duality is to study high temperature superconductors, which are supposed to be a strongly coupled system. According to Ginzburg-Landau theory, a superconductor can be characterized by only two parameters, coherence length ξ and the magnetic penetration length λ; therefore, it is important to determine the two parameters. In this paper in the $D = d + 2$-dimensional Lifshitz black hole, we analytically study the static fluctuation of the scalar field with nonzero spatial momentum along one spatial coordinate of the boundary, and investigate the perturbation of the gravitational system near the critical temperature T_{c}. Working in the probe limit (the gauge field and scalar field do not backreact on the original metric), we obtain the superconducting coherence length ξ via AdS/CFT correspondence, which is $\xi \propto \dfrac{1}{T_{\mathrm{c}}}\left(1-\dfrac{T}{T_{\mathrm{c}}}\right)^{-1/2}$. Moreover, in the probe limit (the magnetic field does not backreact to the background spacetime), we have calculated the diamagnetic current induced by a homogeneous external magnetic field perpendicular to the surface of the superconductor. Then, we obtain the magnetic penetration depth $\lambda \propto \left(T_{\mathrm{c}}-T\right)^{-1/2}$, which agrees with the result in Ginzburg-Landau theory. And these results strongly support the idea that a superconductor can be described by a charged scalar field on the Lifshitz black hole via AdS/CFT duality.

Keywords: holographic superconductor, Lifshitz black hole, coherence length, magnetic penetration depth

PACS: 04.70.Bw, 04.90.+e, 74.20.–z, 74.25.–q **DOI:** 10.7498/aps.65.040401

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11175077, 11575075).

† Corresponding author. E-mail: ybwu61@163.com