

临界转动恒星 Achernar 的斜压结构与引力昏暗的精细研究

邰丽婷 宋汉峰 王江涛

Detail investigation of the inclined pressure structure and gravity darkening in critical rotating star Achernar

Tai Li-Ting Song Han-Feng Wang Jiang-Tao

引用信息 Citation: [Acta Physica Sinica](#), 65, 049701 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.049701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.049701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I4>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

转动潮汐变形双星理论模型研究

[Theoretical model of the rotationally and tidally distorted binaries](#)

物理学报.2015, 64(8): 089701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.089701>

辐射压对非同步转动双星系统洛希势函数的影响

[The effect of the radiative pressure on the potential function in asynchronous rotational binary](#)

物理学报.2013, 62(5): 059701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.059701>

考虑非牛顿引力下的快速转动混合星性质

[Properties of rapidly rotating hybrid stars with non-Newtonian gravity](#)

物理学报.2012, 61(20): 209701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.209701>

# 临界转动恒星 Achernar 的斜压结构与引力昏暗的 精细研究\*

邰丽婷<sup>1)</sup> 宋汉峰<sup>1)2)3)†</sup> 王江涛<sup>1)</sup>

1) (贵州大学理学院物理系, 贵阳 550025)

2) (中国科学院天体结构与演化重点实验室, 昆明 650011)

3) (中国科学院国家天文台-贵州大学天文联合研究中心, 贵阳 550025)

(2015年8月27日收到; 2015年12月6日收到修改稿)

转动和潮汐效应是影响恒星结构和演化的非常重要的物理因素. 根据对 Achernar 的观测数据, 用扰动理论推导了临界转动恒星 Achernar 分别作为单星和双星的斜压结构的特征, 给出 Achernar 等压面上的密度等物理量的分布. 利用考虑转动和潮汐及形变效应的单、双星模型研究了 Achernar 的引力昏暗现象. 结果表明正剪切增强离心力、减小赤道的重力加速度和温度, 反剪切结果则与之相反. 反剪切和刚性转动情况并不符合对 Achernar 的引力昏暗观测结果. 发现转动双星模型比单星模型虽更符合 Achernar 赤道和极半径之比的观测值, 但理论计算的角速度比观测值小. 对比理论计算和观测结果发现, 当 Achernar 的自转角速度为  $4.65 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , 正剪切率  $\Omega/\Omega_s$  为 0.7851 时, Achernar 的极点温度为 16041 K, 赤道温度为 12073 K. 所有理论计算与观测值的相对误差不超过 7%.

**关键词:** 转动, 潮汐, 斜压结构, 引力昏暗

**PACS:** 97.10.Cv, 97.10.Kc, 97.20.Ec, 97.80.Fk

**DOI:** 10.7498/aps.65.049701

## 1 引言

近年来, 很多研究者逐渐认识到转动效应是影响恒星结构和演化的非常重要的物理因素<sup>[1-10]</sup>. 1924 年, von Zeipel<sup>[11]</sup> 假设当恒星以角速度  $\omega$  转动并且处于辐射平衡时, 发现恒星表面的辐射流与有效重力加速度  $g_{\text{eff}}$  成正比,  $F = -\frac{L(P)}{4\pi GM_*(P)} g_{\text{eff}}$ , 即 von Zeipel 原理. 这表明辐射流将随重力加速度的增大而增大, 称为引力昏暗效应.

在当今的理论模型中, 对引力昏暗的模拟通常是按照洛希模型进行计算, 即将恒星当作球形, 其全部质量集中在中心当作点质量处理. 然而, 转动恒星引力昏暗的计算往往并不符合洛希模型的条

件. 例如 de Souza 等<sup>[12]</sup> 发现 Achernar ( $\alpha$  Eridani, HD10144) 质量为  $7M_s$  ( $M_s$  为太阳质量) 左右, 光谱型为 B6 Vpe<sup>[13]</sup>, 是一颗转动速度接近临界速度 ( $0.99v_{\text{crit}}$ ,  $v_{\text{crit}}$  为临界崩溃速度, 赤道离心力与引力相平衡时的速度) 的高速转动恒星. 赤道半径和极半径之比为 1.56<sup>[14]</sup>. 极高的恒星扁率及极点和赤道的温度差, 充分表明该恒星表面重力加速度不能用球对称的洛希模型处理, 应考虑形变, 不然会造成重力加速度的计算错误<sup>[15]</sup>. 最近的观测表明, Achernar 有偏心率轨道运动的伴星<sup>[16]</sup>, 伴星 Achernar B 质量约为  $2M_s$ , 其远星点轨道周期为 14—15 年. 要精细模拟它的引力昏暗规律, 应该充分考虑潮汐形变造成的影响.

Zorec 等<sup>[17]</sup> 认为 Achernar 是一颗表面转动角

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11463002)、中国科学院天体结构与演化重点实验室开放课题 (批准号: OP201405) 和贵州大学研究生创新基金 (批准号: 研理工 2015055) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sci.hfsong@gzu.edu.cn

速度和核心角速度不同的斜压恒星. 斜压结构产生的原因是: 转动恒星内的子午环流是传输角动量的最主要的物理因素. 恒星演化初期, 子午环流以热时标由恒星外向内传输角动量, 使恒星内部的角动量和角速度变大; 相反, 外部的角速度变小, 产生角速度梯度, 形成有剪切的较差转动(即  $\Omega = \Omega(r, \theta)$ ). 当流体剪切运动的 Richardson 数小于临界 Richardson 数 (0.25) 时, 会产生动力学剪切不稳定性, 相应的湍流为剪切湍流<sup>[15]</sup>. 在大质量恒星中, 当热扩散时标远小于角动量扩散时标(黏性时标)时, 这时的不稳定性以热时标进行, 称为长期剪切不稳定, 因为剪切湍流的水平分量远远大于垂直分量<sup>[15]</sup>. 水平剪切湍流能有效地消除恒星转动角速度和化学元素在等压面上的差异, 使恒星转动状态变为“shellular rotation”(即  $\Omega = \Omega(r)$ ). 这时的等压面和等密度面不重合, 产生斜压结构

$$\left( \nabla \frac{1}{\rho} \times \nabla p = -\frac{\nabla \rho}{\rho} \times \mathbf{g}_e = \nabla \Omega^2 \times \mathbf{s} \neq 0 \right).$$

斜压结构会对恒星结构的演化产生重要影响.

詹琮等<sup>[18]</sup>建立了转动潮汐变形双星的理论模型. 本文虽是该工作的后续工作, 但是有以下不同.

1) 由于恒星内子午环流传输角动量, 产生较差转动. 较差转动使恒星由正压流体变成斜压流体. 转动正压恒星的光球层是等势面, 在等势面上, 密度、压强为常数. 而转动斜压恒星的表面是等压面, 等压面上密度等物理量并不是常数. 在斜压结构下等势面和等压面不重合, 快速转动下, 两者相差很大<sup>[19]</sup>. 詹琮等<sup>[18]</sup>主要研究正压流体情况下 V478 Cyg 的结构演化和拱线运动, 而本文侧重于斜压结构造成的引力昏暗的精细计算. 对于临界斜压转动恒星 Achernar 而言, 斜压和正压结构的计算方法和结果的差别是明显不同的(见附录(A1)—(A28)式).

2) 斜压结构对恒星光球层的有效重力加速度的贡献增加了  $\Omega s^2 \frac{d\Omega}{dP} \nabla P$  这一项. 在等压面上密度、压强(附录(A9)和(A24)式)的扰动量的计算是根据斜压结构情况下势函数的多极子扰动展开. 找出等压面上各级密度扰动量与各级转动和潮汐扰动势函数的联系, 利用球坐标系下3个分量的流体静力学平衡方程, 精确算出压强梯度(方法和思路见附录(A1)—(A28)式). 这是本文提出的新方法.

3) 从转动速度大小的影响来看, 詹琮等<sup>[18]</sup>讨论的自转速度比较小, 在观测点约为 125 km/s, 而

本文 Achernar 的速度达到约 340 km/s. 利用这两种情况的离心势和转动变形势得到的力分布等对恒星形变、临界扁率、温度和表面有效重力加速度的贡献是完全不同的.

本文利用对 Achernar 星的观测数据, 根据包括转动潮汐形变的势函数, 研究了快速转动恒星 Achernar 的形变特征和斜压结构. 研究了它作为转动单星和双星时系统中光球层的重力加速度、引力昏暗、内部转动较差转动状况. 本文第二部分介绍理论模型, 第三部分给出数值计算结果, 第四部分给出结论.

## 2 转动恒星的势函数及重力加速度

### 2.1 斜压转动单星变形的势函数修正及重力加速度的计算

以恒星中心为坐标原点, 赤道平面为  $xoy$ , 在赤道平面上任一条曲线为  $x$  轴, 与之垂直的为  $y$  轴, 自转角速度  $\Omega$  方向为  $z$  轴, 与赤道平面垂直. 假设恒星内部为刚性转动, 恒星质量为  $M$ , 恒星中心到点  $P$  的矢径为  $\mathbf{r}$ , 则包含转动的洛希模型的势函数为

$$\psi = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (1)$$

(1) 式等号右端第一项为恒星自引力势, 第二项为自转离心势.

实际上由于自转离心力的作用, 恒星将由球对称变为旋转椭球体, 应考虑四极矩对势函数的贡献, 这时总的势函数可修正为<sup>[20]</sup>

$$\psi = \frac{GM_\psi}{r} + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta - \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \times \int_0^{r_0} \rho \frac{r_0'^7}{M_\psi} \Omega^2 \frac{5 + \eta_2(r_0)}{2 + \eta_2(r_0)} dr_0', \quad (2)$$

(2) 式等号右边第三项为转动变形修正产生的势函数. 这里,  $r_0$  为变形椭球体的平均半径,  $M_\psi$  是以  $r_0$  为平均半径的等势面、等体积的“等价球”所具有的质量,  $r_\psi$  为“等价球”的半径.  $r$  用  $r_0$  按球谐函数展开有

$$r(r_0, \theta) = r_0 \left( 1 + \sum_{i,j} Y_j^i(r_0, \theta) \right) = r_0 (1 - A(r_0) P_2(\cos \theta)), \quad (3)$$

式中的  $A(r_0)$  可以表示为

$$A(r_0) = \frac{\Omega^2 r_0^3}{3GM_\psi} \frac{5}{2 + \eta_2}. \quad (4)$$

变形恒星对应的等价球的半径可以表示为

$$r_\psi = r_0 \left(1 + \frac{3}{5} A^2\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5)$$

定义  $\eta_j(r_0) = \frac{r_0}{Y_j} \frac{\partial Y_j}{\partial r_0}$ , 且  $\eta_j(r_0)$  满足 Clairaut-Radau 方程:

$$r_0 \frac{d\eta_j}{dr_0} + 6 \frac{\rho(r_0)}{\bar{\rho}(r_0)} (\eta_j + 1) + \eta_j (\eta_j - 1) = j(j + 1), \quad (6)$$

边界条件为  $\eta_j(0) = j - 2$ . (6) 式中的  $\rho$  为局地密度,  $\bar{\rho}$  为半径  $r_0$  内的等价球的平均密度. 根据势函数的多极子展开方程

$$\psi = \frac{GM_\psi}{r} \left(1 - \sum_{l=2}^{\infty} J_l P_l(\cos \theta)\right) + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (7)$$

对比可以得到四阶矩  $J_2$ ,

$$J_2 = \frac{4\pi}{3GMr_0^2} \int_0^{r_0} \rho \frac{r_0'}{M_\psi} \Omega^2 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr_0'. \quad (8)$$

根据势函数方程 (2), 变形恒星的重力加速度为

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (9)$$

式中,

$$\begin{aligned} g_{\text{eff},r} &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ &= -\left(-\frac{GM_\psi}{r^2} + \Omega^2 r \sin^2 \theta\right. \\ &\quad + \frac{4\pi}{r^4} P_2(\cos \theta) \int_0^{r_0} \rho \frac{\Omega^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr_0' \\ &\quad - \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \rho \frac{\Omega^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} \frac{dr_0}{dr} \\ &\quad \left. + \Omega r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{dr}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} g_{\text{eff},\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ &= -\frac{1}{r} \left(\Omega^2 r \sin \theta \cos \theta + \Omega r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Omega}{dr} \cdot \frac{1}{r} \frac{dr}{dP} \frac{dP}{d\theta}\right. \\ &\quad - \frac{4\pi}{3r^3} P_2'(\cos \theta) \int_0^{r_0} \rho \frac{\Omega^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr_0' \\ &\quad \left. - \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \rho \frac{\Omega^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} \frac{dr_0}{d\theta}\right), \end{aligned} \quad (11)$$

其中,

$$\frac{\partial r_0}{\partial r} = \frac{1}{1 - 4A(r_0)P_2(\cos \theta)}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial r_0}{\partial \theta} = \frac{r_0(A(r_0)P_2(\cos \theta))_\theta}{1 - 4A(r_0)P_2(\cos \theta)}, \quad (13)$$

$$g_{\text{eff}} = \sqrt{g_{\text{eff},r}^2 + g_{\text{eff},\theta}^2}. \quad (14)$$

(11) 式中斜压转动单星  $\frac{dP}{dr}, \frac{dP}{d\theta}$  的计算见附录 B.

## 2.2 斜压转动潮汐变形双星的势函数修正及重力加速度的计算

以主星中心为坐标原点, 主、次星中心连线为  $x$  轴, 轨道平面上与  $x$  轴垂直为  $y$  轴, 主星自转角速度  $\Omega_1$  方向为  $z$  轴 (参见文献 [18] 图 1). 假设初始时自转角速度  $\Omega_1$  与轨道角速度  $\Omega$  平行, 但并不相等. 假设两子星内部为刚性转动. 主、次星质量分别为  $M_1$  和  $M_2$ , 双星间距为  $R$ , 主星中心到点  $P$  的矢径为  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$  为次星中心到点  $P$  的矢径, 则不考虑形变转动和潮汐形变的势函数为 [21]

$$\begin{aligned} \psi_p &= \frac{GM_1}{r} + \frac{GM_2}{r'} + \frac{1}{2} \Omega_1^2 r^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} \Omega^2 \frac{M_2^2 R^2}{(M_1 + M_2)^2} \\ &\quad - \frac{GM_2}{R^2} r \sin \theta \cos \varphi, \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式等号右端第一、第二项分别为主、次星的引力势; 第三、第四项分别为自、公转离心势, 系统的公转角速度  $\Omega^2 = G(M_1 + M_2)/R^3$ ; 由于次星对主星质量中心的引力, 使各质点相对于主星质量中心产生一个反向加速度, 分量为  $(-GM_2/R^2, 0, 0)$ , 此加速度所对应的势函数可表示为  $\psi_t = (GM_2/R^2)r \sin \theta \cos \varphi$ , 即方程 (15) 右端第五项 [11].

实际上由于自转力和潮汐力的联合作用, 恒星将由球对称变为变形的三轴椭球体, 应考虑四极矩对势函数的贡献, 这时总的势函数可修正为 [22-25]

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{GM_\psi}{r} + \frac{1}{2} \Omega_1^2 r^2 \sin^2 \theta \\ &\quad + \frac{GM_2}{R} \left[1 + \sum_{j=2}^4 \left(\frac{r_0}{R}\right)^j P_j(\lambda)\right] \\ &\quad - \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \int_0^{r_0} \rho \frac{\Omega_1^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2(r_0)}{2 + \eta_2(r_0)} dr_0' \\ &\quad + 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j(\lambda)}{(rR)^{j+1}} \int_0^{r_0} \rho \frac{r_0'^{2j+3}}{M_\psi} \\ &\quad \times \frac{j + 3 + \eta_2(r_0)}{j + \eta_2(r_0)} dr_0', \end{aligned} \quad (16)$$

(16) 式等号右边第四、第五项分别为转动、潮汐变形修正产生的势函数. 这里,  $\lambda = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $r_0$  为变形椭球体的平均半径,  $M_\psi$  为以  $r_0$  为平均半径的等势面、等体积的“等价球”所具有的质量,  $r_\psi$  为

“等价球”的半径,  $r$  用  $r_0$  按球谐函数展开有 [18,26,27]

$$\begin{aligned} & r(r_0, \theta, \varphi) \\ &= r_0 \left( 1 + \sum_{i,j} Y_j^i(r_0, \theta, \varphi) \right) \\ &= r_0 (1 - A(r_0)P_2(\cos \theta) + B(r_0)P_2(\lambda) \\ &\quad + C(r_0)P_3(\lambda) + D(r_0)P_4(\lambda)), \end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式中  $A, B, C, D$  的表示见附录 C. 变形恒星对应的等价球的半径可以表示为

$$\begin{aligned} r_\psi = r_0 & \left( 1 + \frac{3}{5}A^2 + \frac{3}{5}AB + \frac{3}{5}B^2 + \frac{3}{7}C^2 \right. \\ & - \frac{2}{35}A^3 - \frac{3}{35}A^2B + \frac{9}{140}A^2D + \frac{3}{35}AB^2 \\ & + \frac{2}{35}AC^2 + \frac{2}{35}B^3 + \frac{10}{231}AD^2 + \frac{6}{35}ABD \\ & + \frac{6}{35}B^2D + \frac{4}{35}BC^2 + \frac{6}{77}C^2D + \frac{20}{231}BD^2 \\ & \left. + \frac{18}{1001}D^3 + \frac{1}{3}D^2 \right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (18)$$

由方程 (15), 重力加速度的 3 个分量可以表示为

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = -\nabla\psi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad (19)$$

其中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial r} = & -\frac{GM_\psi}{r^2} + \Omega_1^2 r \sin^2 \theta \\ & + \frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^4 \frac{j r_0^{j-1}}{R^j} P_j(\lambda) \frac{dr_0}{dr} \\ & + \frac{4\pi}{r^4} P_2(\cos \theta) \int_0^{r_0} \rho \frac{\Omega_1^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr_0' \\ & - \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \rho \frac{\Omega_1^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} \frac{dr_0}{dr} \\ & - 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{(j+1)P_j(\lambda)}{r^{j+2}R^{j+1}} \\ & \times \int_0^{r_0} \rho \frac{r_0'^{2j+3}}{M_\psi} \frac{j+3+\eta_2}{j+\eta_2} dr_0' \\ & + 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j(\lambda)}{(rR)^{j+1}} \frac{r_0'^{2j+3}}{M_\psi} \frac{j+3+\eta_2}{j+\eta_2} \frac{dr_0}{dr} \\ & + \Omega_1^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Omega_1}{dr}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = & \Omega_1^2 r^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^4 \left(\frac{r_0}{R}\right)^j P_j'(\lambda) \theta \\ & + \frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^4 \frac{j r_0^{j-1}}{R^j} P_j(\lambda) \frac{dr_0}{d\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{4\pi}{3r^3} P_2'(\cos \theta) \int_0^{r_0} \rho \frac{\Omega_1^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr_0' \\ & - \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \rho \frac{\Omega_1^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} \frac{dr_0}{d\theta} \\ & + 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j'(\lambda)\theta}{(rR)^{j+1}} \\ & \times \int_0^{r_0} \rho \frac{r_0'^{2j+3}}{M_\psi} \frac{j+3+\eta_2}{j+\eta_2} dr_0' \\ & + 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j(\lambda)}{(rR)^{j+1}} \rho \frac{r_0'^{2j+3}}{M_\psi} \\ & \times \frac{j+3+\eta_2}{j+\eta_2} \frac{dr_0}{d\theta} \\ & + \Omega_1^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Omega_1}{dr} \frac{1}{r} \frac{dr}{dP} \frac{dP}{d\theta}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = & \frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^4 \left(\frac{r}{R}\right)^j P_j'(\lambda) \varphi \\ & + \frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^4 \frac{j r_0^{j-1}}{R^j} P_j(\lambda) \frac{dr_0}{d\varphi} \\ & - \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \rho \frac{\Omega_1^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} \frac{dr_0}{d\varphi} \\ & + 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j'(\lambda)\varphi}{(rR)^{j+1}} \int_0^{r_0} \rho \frac{r_0'^{2j+3}}{M_\psi} \\ & \times \frac{j+3+\eta_2}{j+\eta_2} dr_0' \\ & + 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j(\lambda)}{(rR)^{j+1}} \rho \frac{r_0'^{2j+3}}{M_\psi} \\ & \times \frac{j+3+\eta_2}{j+\eta_2} \frac{dr_0}{d\varphi} \\ & + \Omega_1^2 r^2 \sin^2 \theta \frac{d\Omega_1}{dr} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dr}{dP} \frac{dP}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (22)$$

斜压结构造成的  $\frac{\partial r_0}{\partial r}, \frac{\partial r_0}{\partial\theta}, \frac{\partial r_0}{\partial\varphi}, \frac{dP}{dr}, \frac{dP}{d\theta}, \frac{dP}{d\varphi}$ ,  $P_j(\lambda), P_j'(\lambda)$  等的计算见附录 A 和 C.

$$g_{\text{eff}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2}. \quad (23)$$

### 2.3 转动恒星的引力昏暗效应

目前对转动恒星的引力昏暗现象的观测和理论研究都是针对恒星光球的 [28-30]. 根据 von Zeipal 原理 [11], 转动恒星光球上一点的辐射通量和



重力加速度  $g_{\text{eff}}(\Omega, \theta)$  可以表示为

$$\mathbf{F}(\Omega, \theta) = -\chi \nabla T(\Omega, \theta), \quad (24)$$

其中  $\chi = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho}$ .

根据流体静力学平衡方程, (24) 式变为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\Omega, \theta) &= -\chi \frac{dT}{dP} \nabla P(\Omega, \theta) \\ &= -\rho\chi \frac{dT}{dP} \mathbf{g}_{\text{eff}}(\Omega, \theta), \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $\rho\chi \frac{dT}{dP}$  在给定的等势面上为常数.

因为恒星总光度可表示为

$$\begin{aligned} L(\Omega) &= \int_{\Sigma} \mathbf{F}(\Omega, \theta) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \rho\chi \frac{dT}{dP} \int_{\Sigma} \nabla \Psi(\Omega, \theta) \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (26)$$

根据高斯定理  $\nabla^2 \Psi = 4\pi G\rho - 2\Omega^2$ , (26) 式变为

$$\begin{aligned} L(\Omega) &= \left(\rho\chi \frac{dT}{dP}\right) \int_V \nabla^2 \Psi(\Omega, \theta) dV \\ &= \left(\rho\chi \frac{dT}{dP}\right) \int_V (4\pi G\rho - 2\Omega^2) dV. \end{aligned} \quad (27)$$

因此, 常数

$$\rho\chi \frac{dT}{dP} = \frac{L(\Omega)}{4\pi GM_* \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G\bar{\rho}_M}\right)}. \quad (28)$$

将(28)式代入(25)式, 恒星光球上的辐射流可以表示为

$$\mathbf{F}(\theta, \varphi) = -\frac{L(P)}{4\pi GM_*(P)} \mathbf{g}_{\text{eff}}^\beta(\theta, \varphi), \quad (29)$$

其中有效质量  $M_* = M \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{2\pi G\bar{\rho}_M}\right)$ , 平均密度  $\bar{\rho}_M = 3M/(4\pi r^3)$ .

根据斯特藩-玻尔兹曼定律, 恒星的光球层温度分布可以表示为

$$T_{\text{eff}}(\theta, \varphi) = \left(\frac{L}{4\pi\sigma GM_*}\right)^\beta g_{\text{eff}}^\beta(\theta, \varphi), \quad (30)$$

其中,  $\beta$  为引力昏暗指数, 它的取值对引力昏暗结果有非常重要的影响, 当恒星表层为辐射平衡区时,  $\beta$  取 0.25 [11], 当恒星表层为对流区时,  $\beta$  取 0.08 [15]. de Souza 等 [12] 统计了六颗快速转动的恒星, 给出  $\beta$  的计算公式为

$$\beta \approx 0.25 - 0.328 \left(1 - \frac{R_p}{R_{\text{eq}}}\right). \quad (31)$$

根据(31)式, 本文取  $\beta$  为 0.151.

表 1 恒星 Achernar 的理论计算值与观测值的对比

Table 1. Comparison between theoretical calculation and observation of stellar Achernar (de Souza et al. [12,30]).

	观测值	理论值	观测与理论值 相对误差/%
极半径 $R_p(R_S)$	6.78 [30]	6.79	0.15
$R_{\text{eq}}/R_p$	1.56 [12]	1.5189	2.63
$V_{\text{eq}}/\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$	343.29 [12]	333.3	2.91
$V_{\text{eq}}/V_k$	0.9693 [30]	0.9274	4.32
极点温度 $T_p/\text{K}$	17124 [30]	16041	6.32
赤道温度 $T_{\text{eq}}/\text{K}$	12673 [30]	12073	4.73
光度 $\log L(L_S)$	3.480 [30]	3.497	0.49
极点重力加速度 $\log g_p$	3.561 [30]	3.6138	1.48
赤道重力加速度 $\log g_{\text{eq}}$	2.772 [30]	2.7959	0.86
转动周期 $P_{\text{rot}}/\text{h}$	37.25 [30]	37.534	0.76

### 3 数值计算与结果

我们采用 Cambridge 大学的 Eggleton 教授所编写的 2005 年版 TWIN CODE 进行计算, 初始模型均为零龄主序. 初始参数为: 恒星质量为  $7 M_\odot$ , 初始自转角速度为 0.65 d. 为了考察恒星在双星系统的引力昏暗情况, 取次星质量为  $2 M_\odot$ . 因 Achernar 有短周期性光变和吸积盘, Kervella 等 [16] 指出, Achernar 物质抛射的物理机理是: 伴星 Achernar B 经过椭圆轨道近日点时, 潮汐力拉扯 Achernar A 赤道表层物质, 使赤道半径变长, 增加了离心力, 从而产生大量物质抛射. 我们估算其在近日点的轨道周期应小于 3 d, 否则潮汐力太弱, 不足以产生物质抛射. 本文取椭圆轨道近星点轨道周期为 2.5 d, 各种模型采用标准太阳金属丰度  $X_H = 0.7$ ,  $Z = 0.02$ , 混合长参数取 1.0. 采用 Vink 等 [31] 提出的星风公式计算 Achernar 的质量和角动量损失.

因为 Achernar 具有斜压结构, 本文分三种情况讨论斜压结构对引力昏暗的影响. 正剪切为  $\frac{d\Omega_a}{dr} \sim \frac{\Omega_s - \Omega}{R_s} > 0$ ,  $\frac{\Omega_s}{\Omega} > 1$ , 其中  $\Omega$  为 Achernar 的核心角速度,  $\Omega_s$  为 Achernar 的表面角速度,  $\frac{d\Omega_a}{dr}$  为恒星 Achernar 内的角速度梯度. 反剪切时则  $\frac{\Omega_s}{\Omega} < 1$ ; 刚性转动时  $\frac{\Omega_s}{\Omega} = 1$ . 刚性转动为

保守转动, 流体为正压结构. 本文中  $\frac{\Omega_s}{\Omega} \neq 1$ , 为斜压结构, 内部为“shellular rotation”.

图 1(a) 和图 1(b) 分别为转动单星模型演化至极点半径为  $6.79R_S$  时的表面重力加速度和温度分布.  $x$  轴表示余纬角,  $y$  轴分别表示  $g_{\text{eff}}$  和有效温度  $T_{\text{eff}}$  的大小. 结果表明, 当恒星表面自转角速度为  $4.89 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  时 (比观测自转角速度  $4.69 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  大 4.09%), 随着剪切率  $\Omega/\Omega_s$  从 1 (即刚性转动) 反剪切增至 1.7121 时, 恒星两极点的重力加速度和温度不变. 原因是转动单星增加反剪切率, 并不改变恒星的极半径, (2) 式的第三项的贡献不超过 5%, 极点的重力加速度为  $GM/R_p^2$ . 但赤道的重力加速度从  $1717.79 \text{ cm/s}^2$  减至  $574.06 \text{ cm/s}^2$ , 减小量为 66.58%. 同时赤道温度从  $14061 \text{ K}$  降至  $11916 \text{ K}$ , 减少量达到 15.25%. 这说明: 1) 斜压结构 (剪切率) 对引力昏暗有非常重要的影响; 2) 因反剪切的作用 ((10) 式括号最后一项) 与离心力符号相反, 存在反剪切可使赤道的重力加速度和温度增加, 从图 1 可以看出反剪切越大, 赤道的重力加速度和温度越高.

当恒星为刚性转动时, 赤道的重力加速度的理论值虽与观测值较符合 (理论值与观测值的相对误差为 2.88%), 但比观测的角速度大 4%. 事实上对 Achernar 而言, 刚性转动的情况是不太可能的, 原因是: 1) 恒星的内部存在着角动量转移, 快速转动恒星的内部存在快的子午环流, 它传输角动量在恒星内部产生角速度梯度 [13]; 2) 临界转动的

Achernar 存在着吸积盘, 观测表明 Achernar 有约为 5 年的周期性光变 [32], 说明 Achernar 与吸积盘之间存在周期性的物质吸积和喷射过程, Achernar 吸积和喷射伴随着半径 (光度) 收缩和膨胀, 根据角动量守恒, 产生角速度梯度; 3) Achernar 若存在刚性转动, 其内部必然有强的耦合效应, 磁耦合是最可能的一种方式, 但目前并没有观测到 Achernar 有磁活动.

图 2(a) 和图 2(b) 表明当恒星表面转角速度为  $4.65 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  时, 随着剪切率  $\Omega/\Omega_s$  从 1 (即刚性转动) 减小到 0.2374: 恒星极点的重力加速度和温度不变; 赤道的重力加速度从  $917.94 \text{ cm/s}^2$  减至  $117.95 \text{ cm/s}^2$ , 减小量为 87.15%; 同时赤道温度从  $12791 \text{ K}$  降至  $9383.2 \text{ K}$ , 减少量达到 26.64%. 这说明正剪切作用与离心力同号, 增强离心力, 进而减小赤道的重力加速度. 研究发现当 Achernar 为刚性转动时, 赤道重力加速度和温度的理论值与观测相对误差分别为 6.88% 和 9.88%. 当剪切率  $\Omega/\Omega_s$  为 0.7851 时, 极点重力加速度和温度的相对误差分别为 1.48% 和 6.32%, 赤道重力加速度和温度的相对误差为 0.86% 和 4.73% (见表 1). 结果表明, 考虑斜压结构的正剪切情况的结果与 de Souza 等 [30] 的观测值最符合. 这意味着吸积盘的物质正在落向 Achernar 上, 加速 Achernar 到临界转动, 由于盘物质具有较高的角动量, 落到恒星表层后向内传输角动量, 产生正剪切角速度.

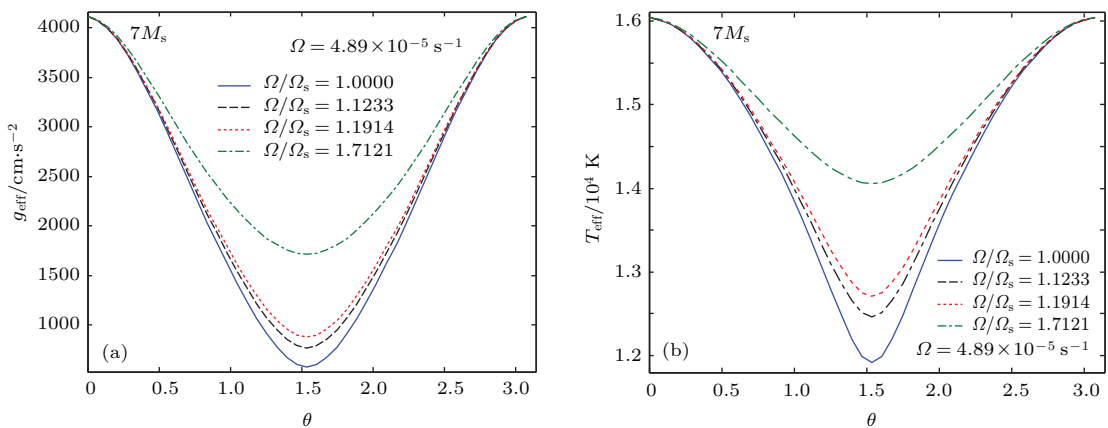


图 1 (网刊彩色)  $\Omega = 4.89 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  时恒星的表面重力加速度和温度分布 ( $x$  轴表示余纬度,  $y$  轴表示  $g_{\text{eff}}$  与有效温度大小) (a) 转动单星的表面重力加速度分布; (b) 转动单星的表面温度分布

Fig. 1. (color online) The distributions of (a) the effective gravitational acceleration and (b) the effective temperature at the surface of the rotating single star ( $\Omega = 4.89 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ).  $x$  axis represents latitude angle, and  $y$  denotes the quantity  $g_{\text{eff}}$  and the effective temperature  $T_{\text{eff}}$ , respectively.

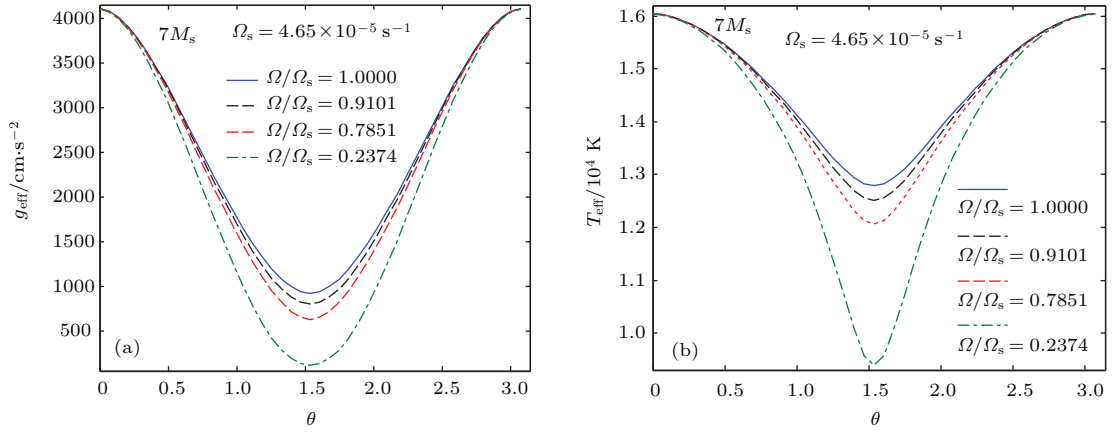


图2 (网刊彩色)  $\Omega_s = 4.65 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  时恒星的表面重力加速度和温度分布 ( $x$  轴表示余纬度,  $y$  轴表示  $g_{\text{eff}}$  与有效温度大小) (a) 转动单星的表面重力加速度分布; (b) 转动单星的表面温度分布

Fig. 2. (color online) The distributions of (a) the effective gravitational acceleration and (b) the effective temperature at the surface of the rotating single star ( $\Omega_s = 4.65 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ).  $x$  axis represents latitude angle, and  $y$  denotes the quantity  $g_{\text{eff}}$  and the effective temperature  $T_{\text{eff}}$ , respectively.

在转动形变的单星模型中, 临界转动时赤道半径与极半径之比的理论值为  $R_{\text{eq}}/R_{\text{p}} = 1.5 + 2.1k_2$ ,  $k_2$  为拱线运动常数,  $k_2$  在主序阶段典型值为 0.01—0.001, 赤道半径与极半径之比最大约为 1.525 (零龄主序值), 实际理论值为 1.5189 (见表 1), 远小于 1.56 的观测值, 考虑到 Achernar 有伴星, 因此尝试用转动双星模型解释 Achernar 的引力昏暗效应.

图 3(a) 和图 3(b) 分别为刚性转动 ( $\Omega/\Omega_s = 1$ ) 时双星中的主星演化至极点半径为  $6.79R_{\text{S}}$  时恒星的表面重力加速度和温度分布. 此时恒星刚性转动角速度  $\Omega_s = 3.95 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (比观测值  $4.69 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  小), 发现有效重力加速度  $g_{\text{eff}}$  在两极 (见文献 [18] 图 1 中  $E$  点和  $F$  点) 处最大, 数值可达  $4437.43 \text{ cm/s}^2$ , 在赤道上正对次星 ( $A$  点) 处 (本文中所提及的  $A, B, C, D$  点见文献 [18] 图 1)  $g_{\text{eff}}$  达到最小值  $815.81 \text{ cm/s}^2$ , 而在背对次星 ( $C$  点) 处达到次极小值  $1274.47 \text{ cm/s}^2$ . 最小值与次极小值的差别主要是由于次星的引力势

$$\psi(r_1) = -\frac{GM_2}{r_2} = -G\frac{M_2}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_1}{R}\right)^n P_n(\cos \chi)$$

( $\chi$  为  $r_1$  与双星间距  $R$  之间的夹角) 中  $n > 2$  的高阶项所引起.

如图 3(a) 所示: 与转动单星相比 (图 1 中实线), 有效重力加速度  $g_{\text{eff}}$  在两极点处增大 0.92%; 在赤道上正对次星 ( $A$  点) 处比转动单星模型增加了 5.53%, 在  $B, D$  两点处增加了 20.14%, 原因是

$B, D$  两点的离心力与潮汐力方向相反, 导致重力加速度较大; 而在背对次星 ( $C$  点) 处比转动单星极小值增加了 12.56%. 即在赤道处考虑转动潮汐作用后的双星模型的  $g_{\text{eff}}$  值比单星模型的值大. 物理原因是在赤道面上, 由于潮汐力 ( $j = 2$  项) 与离心力同号, 减小了恒星达到临界转动的角速度, 使赤道半径比转动单星时的值稍小造成的.

由于潮汐力的作用, Achernar 临界转动时赤道半径与极半径之比为  $R_{\text{eq}}/R_{\text{p}} \approx (1.5 + 2.1k_2)(1 + B(r_0)/2) \approx 1.5456$ , 说明转动双星模型可以通过潮汐力压缩极半径来提高赤道半径与极半径之比.

另外, 由图 3(b) 发现, 温度在两极点处为  $1.6227 \times 10^4 \text{ K}$ , 赤道  $A$  点处为  $1.2565 \times 10^4 \text{ K}$ ,  $B, D$  两点处为  $1.4455 \times 10^4 \text{ K}$ ,  $C$  点处为  $1.3441 \times 10^4 \text{ K}$ , 赤道温度的平均值约为  $1.3729 \times 10^4 \text{ K}$ . 这说明使用转动双星模型, 由于潮汐力的作用, 使赤道上各点的温度发生了变化, 温度差必将产生从高温到低温的气体流动, 这一点有待观测证实.

图 4(a) 和图 4(b) 分别为转动双星的主星演化至极点半径为  $6.79R_{\text{S}}$  时, 恒星表面重力加速度和温度分布图. 此时恒星表面转动角速度为  $\Omega_s = 3.95 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  (比观测值  $4.69 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  小), 正剪切率取为 0.7107, 发现有效重力加速度  $g_{\text{eff}}$  在两极点处 ( $E$  点和  $F$  点) 最大, 数值可达  $4359.48 \text{ cm/s}^2$ ,  $g_{\text{eff}}$  比刚性转动 (图 4(a)) 在两极点处增大 0.21%.



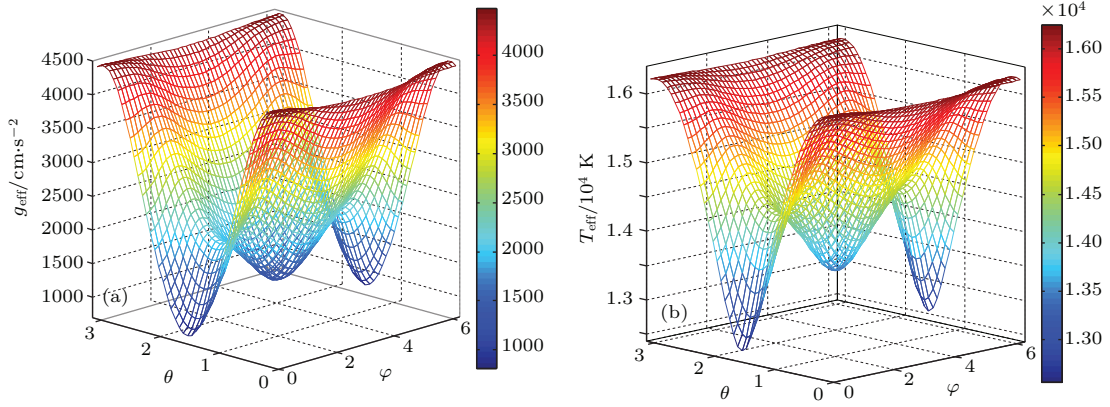


图3 (网刊彩色) 转动双星模型中, 恒星为刚性转动, 其表面转动角速度  $\Omega_s = 3.95 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  时, 恒星的表面重力加速度和温度分布 ( $\varphi$  轴表示赤经角,  $\theta$  轴表示余纬度,  $z$  轴表示  $g_{\text{eff}}$  与有效温度大小) (a) 转动双星模型主星的表面重力加速度分布; (b) 转动双星模型主星的表面温度分布

Fig. 3. (color online) In rotational binary model, when the star surface rotation angular velocity is  $\Omega_s = 3.85 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  and shear rate  $\Omega/\Omega_s = 1$ , the distributions of (a) the effective gravitational acceleration and (b) the effective temperature at the surface of the primary star.  $\varphi$  represents longitude angle,  $\theta$  represents latitude angle,  $z$  denotes the quantity  $g_{\text{eff}}$  and the effective temperature, respectively.

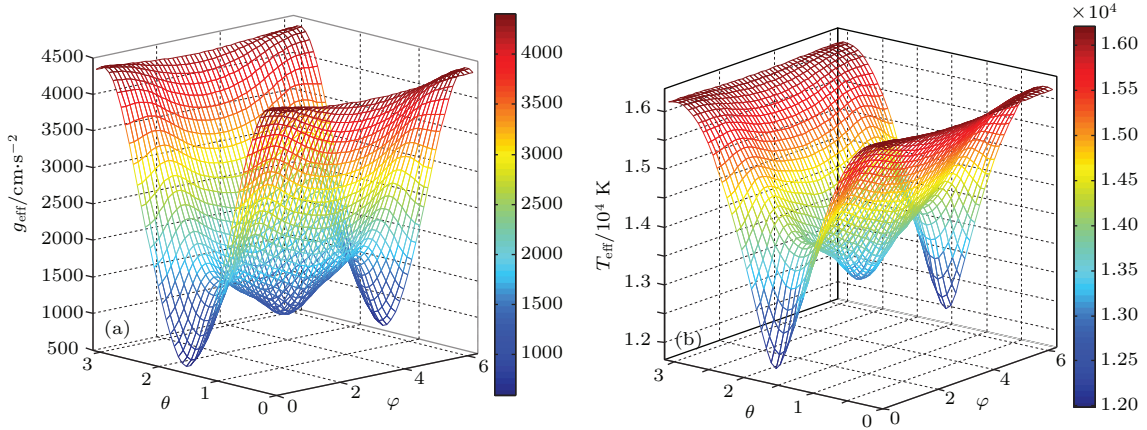


图4 (网刊彩色) 转动双星模型中, 当恒星的表面转动角速度为  $\Omega_s = 3.95 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , 剪切为  $\Omega/\Omega_s = 0.7107$  时的表面重力加速度和温度分布 ( $\varphi$  轴表示赤经角,  $\theta$  轴表示余纬度,  $z$  轴分别表示  $g_{\text{eff}}$  与有效温度大小) (a) 转动双星模型主星的表面重力加速度分布; (b) 转动双星模型主星的表面温度分布

Fig. 4. (color online) In rotational binary model, when the star surface rotation angular velocity is  $\Omega_s = 3.95 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  and shear rate  $\Omega/\Omega_s = 0.7107$ , the distributions of (a) the effective gravitational acceleration and (b) the effective temperature at the surface of the primary star.  $\varphi$  represents longitude angle,  $\theta$  represents latitude angle,  $z$  denotes the quantity  $g_{\text{eff}}$  and the effective temperature, respectively.

在赤道上正对次星(A点)处  $g_{\text{eff}}$  达到最小值  $594.8 \text{ cm/s}^2$ , 比刚性转动模型在A点的  $g_{\text{eff}}$  减小了4.71%。而在背对次星(C点)处达到次极小值  $1029.96 \text{ cm/s}^2$ , 与刚性转动的C点减小了2.98%。在B、D两点处比刚性转动的B、D点减小3.1%, 即在赤道处, 考虑正剪切后的双星模型的  $g_{\text{eff}}$  值比刚性转动的值小。物理原因是正剪切的作用减小了赤道处的重力加速度, 趋向与观测保持一致。

另外, 发现温度在两极点处为  $1.6184 \times 10^4 \text{ K}$ , 与刚性转动双星模型相比几乎保持不变。赤道A

点处为  $1.198 \times 10^4 \text{ K}$ , 比刚性转动双星模型减小4.66%; B、D点处为  $1.3948 \times 10^4 \text{ K}$ , 与刚性转动双星模型相比减小3.51%; C点处为  $1.3016 \times 10^4 \text{ K}$ , 与刚性转动双星模型相比减小3.16%。平均赤道温度约为  $13328 \text{ K}$ 。发现斜压结构正剪切的双星模型比刚性转动(正压结构)双星模型更符合观测结果。但双星模型是在伴星于椭圆轨道的近星点获得的。伴星在远星点的轨道周期为14—15年, 潮汐力非常弱, 几乎为零, Achernar 临界转动的赤道半径与极半径之比及引力昏暗与单星模型一致。伴星仅在

近星点附近对引力昏暗有明显的影响. 因而使用双星模型不具有普遍意义.

## 4 结 论

1) 数值模拟了斜压结构的正剪切和反剪切两种情况下 Achernar 的引力昏暗. 发现正剪切增强离心力, 减小赤道的重力加速度和温度, 反剪切则与之相反. 反剪切情况并不符合对 Achernar 的引力昏暗观测结果.

2) 刚性转动也不符合对 Achernar 的观测结果. 原因是: 刚性转动情况下有效重力角速度的理论计算值要与观测值接近, 理论计算的角速度需比观测值大; 由于恒星刚性转动的条件是恒星内部必然存在强的磁耦合效应, 目前并没有观测到其表面有磁活动; Achernar 有短周期光变, 说明其与吸积盘有频繁的物质交流和半径收缩, 产生角速度梯度.

3) 理论计算和观测对比发现, Achernar 很可能处于正剪切情况. 这意味着吸积盘的物质正在落向 Achernar 上, 加速 Achernar 到临界转动, 由于盘物质具有较高的角动量, 落到恒星表层后向内传输角动量, 产生正剪切角速度.

4) 使用斜压结构转动单星模型, 当自转角速度为  $4.65 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , 正剪切率  $\Omega/\Omega_s$  为 0.7851 时, Achernar 的极点温度为 16041 K, 赤道温度为 12073 K. 使用斜压结构的转动双星模型得到 Achernar 的极点温度为  $2.193 \times 10^4 \text{ K}$ , 赤道温度在  $1.1929 \times 10^4 \text{ K}$  与  $1.4177 \times 10^4 \text{ K}$  之间, 平均赤道温度约为 13328 K. 比较极点温度后发现, 斜压转动单星模型结果与观测结果更符合, 其观测值与理论值相对误差不超过 7%, 由表 1 列出. 因此, 考虑斜压结构更符合 Achernar 的引力昏暗观测结果.

5) 使用转动形变势函数的单星模型得到 Achernar 赤道半径与极半径之比为 1.5248—1.5074, 而洛希模型得到的两者之比最大为 1.5, 说明考虑转动形变的单星模型比洛希模型更符合观测结果. 由于潮汐力可以压缩极半径, 使用转动潮汐形变势函数的双星模型, 当次星在椭圆轨道近星点时, 可得到 Achernar 临界转动的赤道半径与极半径之比约为 1.5456, 当次星在椭圆轨道远星点时, Achernar 临界转动的赤道半径与极半径之比与单星模型一致. 使用转动潮汐形变的双星模型在椭圆轨道近星点虽能得到接近观测的赤道

半径与极半径之比 (1.56), 但理论计算的自转角速度比观测值小. 此外, 伴星仅在 Achernar 近星点附近时对引力昏暗有明显影响. 因此使用双星模型不具有普遍意义.

附录 A 斜压转动双星中  $\frac{dP}{dr}$ ,  $\frac{dP}{d\theta}$ ,  $\frac{dP}{d\varphi}$  的计算

在等压面将势函数  $\psi$  改写成如下形式:

$$\begin{aligned} \psi &= \Phi_0 + \Phi_2(r)P_2(\cos\theta) + \Phi_2'(r)P_2(\sin\theta\cos\varphi) \\ &\quad + \Phi_2''(r)P_2(\sin\theta\cos\varphi) + \Phi_3'(r)P_3(\sin\theta\cos\varphi) \\ &\quad + \Phi_3''(r)P_3(\sin\theta\cos\varphi) + \Phi_4'(r)P_4(\sin\theta\cos\varphi) \\ &\quad + \Phi_4''(r)P_4(\sin\theta\cos\varphi) \\ &= \Phi_0 + \Phi_2(r)P_2(\cos\theta) \sum_{j=2}^4 (\Phi_j'(r) + \Phi_j''(r)) \\ &\quad \times P_j(\sin\theta\cos\varphi), \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

其中,

$$\Phi_2(r) = -\frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos\theta) \int_0^{r_0} \rho \frac{\Omega_1^2 r_0'^7}{M_\psi} \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr_0', \quad (\text{A2})$$

$$\Phi_2'(r) = \frac{GM_2}{R} \left(\frac{r_0}{R}\right)^2, \quad (\text{A3})$$

$$\Phi_2''(r) = 4\pi GM_2 \frac{1}{(rR)^3} \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^7 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr_0', \quad (\text{A4})$$

$$\Phi_3'(r) = \frac{GM_2}{R} \left(\frac{r_0}{R}\right)^3, \quad (\text{A5})$$

$$\Phi_3''(r) = 4\pi GM_2 \frac{1}{(rR)^4} \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^9 \frac{6 + \eta_3}{3 + \eta_3} dr_0', \quad (\text{A6})$$

$$\Phi_4'(r) = \frac{GM_2}{R} \left(\frac{r_0}{R}\right)^4, \quad (\text{A7})$$

$$\Phi_4''(r) = 4\pi GM_2 \frac{1}{(rR)^5} \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^{11} \frac{7 + \eta_4}{4 + \eta_4} dr_0'. \quad (\text{A8})$$

同理

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho_2(r)P_2(\cos\theta) + \rho_2'(r)P_2(\sin\theta\cos\varphi) \\ &\quad + \rho_2''(r)P_2(\sin\theta\cos\varphi) + \rho_3'(r)P_3(\sin\theta\cos\varphi) \\ &\quad + \rho_3''(r)P_3(\sin\theta\cos\varphi) + \rho_4'(r)P_4(\sin\theta\cos\varphi) \\ &\quad + \rho_4''(r)P_4(\sin\theta\cos\varphi). \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

而离心力

$$f_c = f_r \mathbf{e} + f_\theta \mathbf{e}, \quad (\text{A10})$$

其中,

$$\begin{aligned} f_r &= a_0 + a_0 P_2(\cos\theta), \\ f_\theta &= -b_0 - b_2 \frac{dP_2}{d\theta}(\cos\theta), \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = -\nabla\Phi + f_c. \quad (\text{A12})$$

在径向上:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} + a_0 + a_2 P_2(\cos\theta). \quad (\text{A13})$$

因为  $\rho'_2(r), \rho''_2(r), \dots$  无穷小,  $P'_2, P''_2, \dots$  也无穷小, 故 (A13) 式可以化简为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{\partial P_2}{\partial r} + \frac{\partial P'_2}{\partial r} + \frac{\partial P''_2}{\partial r} + \frac{\partial P'_3}{\partial r} + \frac{\partial P''_3}{\partial r} \right. \\ & \left. + \frac{\partial P'_4}{\partial r} + \frac{\partial P''_4}{\partial r} \right) - \left( \frac{\rho_2}{\rho_0^2} + \frac{\rho'_2}{\rho_0^2} + \frac{\rho''_2}{\rho_0^2} + \frac{\rho'_3}{\rho_0^2} + \frac{\rho''_3}{\rho_0^2} \right. \\ & \left. + \frac{\rho'_4}{\rho_0^2} + \frac{\rho''_4}{\rho_0^2} \right) \frac{\partial P_0}{\partial r} \\ = & - \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \frac{\partial \Phi'_2}{\partial r} + \frac{\partial \Phi''_2}{\partial r} + \frac{\partial \Phi'_3}{\partial r} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \Phi''_3}{\partial r} + \frac{\partial \Phi'_4}{\partial r} + \frac{\partial \Phi''_4}{\partial r} \right) + a_0 + a_2 P_2(\cos \theta). \end{aligned} \quad (A14)$$

化简整理可得

$$\frac{\partial P_2(r)}{\partial r} = -g_0 \rho_2(r) - \rho_0 \frac{\partial \Phi_2(r)}{\partial r} + \rho_0 a_2, \quad (A15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P'_2(r)}{\partial r} + \frac{\partial P''_2(r)}{\partial r} \\ = & -\rho_0 \left( \frac{\partial \Phi'_2(r)}{\partial r} + \frac{\partial \Phi''_2(r)}{\partial r} \right) - g_0 (\rho'_2(r) + \rho''_2(r)), \end{aligned} \quad (A16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P'_3(r)}{\partial r} + \frac{\partial P''_3(r)}{\partial r} \\ = & -\rho_0 \left( \frac{\partial \Phi'_3(r)}{\partial r} + \frac{\partial \Phi''_3(r)}{\partial r} \right) - g_0 (\rho'_3(r) + \rho''_3(r)), \end{aligned} \quad (A17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial P'_4(r)}{\partial r} + \frac{\partial P''_4(r)}{\partial r} \\ = & -\rho_0 \left( \frac{\partial \Phi'_4(r)}{\partial r} + \frac{\partial \Phi''_4(r)}{\partial r} \right) - g_0 (\rho'_4(r) + \rho''_4(r)). \end{aligned} \quad (A18)$$

对于  $\theta$  方向:

$$\frac{1}{r} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + f_\theta, \quad (A19)$$

得出

$$P_2(r) = -\rho_0 \Phi_2(r) - b_2 \rho_0 r, \quad (A20)$$

$$P'_2(r) + P''_2(r) = -\rho_0 (\Phi'_2(r) + \Phi''_2(r)), \quad (A21)$$

$$P'_3(r) + P''_3(r) = -\rho_0 (\Phi'_3(r) + \Phi''_3(r)), \quad (A22)$$

$$P'_4(r) + P''_4(r) = -\rho_0 (\Phi'_4(r) + \Phi''_4(r)). \quad (A23)$$

斜压转动下, 在等压面上的压强为常数. 但由于转动和潮汐形变, 将等压面上的压强按照球对称压强和非球对称扰动展开为

$$\begin{aligned} P = & P_0 + P_2(r) P_2(\cos \theta) \\ & + (P'_2(r) + P''_2(r)) P_2(\sin \theta \cos \varphi) \\ & + (P'_3(r) + P''_3(r)) P_3(\sin \theta \cos \varphi) \\ & + (P'_4(r) + P''_4(r)) P_4(\sin \theta \cos \varphi), \end{aligned} \quad (A24)$$

故

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P_0}{\partial r} + \frac{\partial P_2(r)}{\partial r} P_2(\cos \theta) + \frac{\partial P'_2(r)}{\partial r} P_2(\sin \theta \cos \varphi)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial P''_2(r)}{\partial r} P_2(\sin \theta \cos \varphi) + \frac{\partial P'_3(r)}{\partial r} P_3(\sin \theta \cos \varphi) \\ & + \frac{\partial P''_3(r)}{\partial r} P_3(\sin \theta \cos \varphi) + \frac{\partial P'_4(r)}{\partial r} P_4(\sin \theta \cos \varphi) \\ & + \frac{\partial P''_4(r)}{\partial r} P_4(\sin \theta \cos \varphi) \\ = & -\rho_0 g_0 - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \left[ \Phi_2 + \sum_{j=2}^4 (\Phi'_j + \Phi''_j) \right] \\ & - \rho_0 \left[ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} + \sum_{j=2}^4 \left( \frac{\partial \Phi'_j}{\partial r} + \frac{\partial \Phi''_j}{\partial r} \right) \right] + H \\ = & H - \rho_0 g_0 - \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \left[ -\frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\ & \times \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0'^7 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr'_0 \\ & + \frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^4 \left( \frac{r_0}{R} \right)^j P_j(\lambda) + 4\pi GM_2 \sum_{j=2}^4 \frac{P_j(\lambda)}{(rR)^{j+1}} \\ & \times \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^{2j+3} \frac{j+3 + \eta_2}{j + \eta_2} dr'_0 \left. \right] \\ & - \rho_0 \left( -\frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \right. \\ & \times \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0'^7 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr'_0 \\ & + \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0'^7 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} \frac{dr_0}{dr} \\ & \left. + \frac{GM_2}{R} \sum_{j=2}^4 \frac{j r^{j-1}}{R^j} P_j(\lambda) \right), \end{aligned} \quad (A25)$$

其中,

$$\begin{aligned} H = & \left[ \frac{2}{3} \Omega_1^2 r \rho_0 + \frac{2}{3} \Omega_1 r^2 \rho_0 \frac{d\Omega_1}{dr} + \frac{2}{3} \Omega_1^2 r \frac{d\rho_0}{dr} \right] P_2(\cos \theta), \\ \lambda = & \sin \theta \cos \varphi; \end{aligned} \quad (A26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} = & P_2(r) P'_2(\cos \theta) + \frac{\partial P_2(r)}{\partial \theta} P'_2(\cos \theta) \\ & + \sum_{j=2}^4 (P'_j(r) + P''_j(r)) \frac{dP_j(\lambda)}{d\theta} \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{j=2}^4 [P'_j(r) + P''_j(r)] \right) P_j(\lambda) \\ = & -\rho_0 \left( -\frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0'^7 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr'_0 \right. \\ & - \frac{4\pi}{3r^3} P'_2(\cos \theta) \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0'^7 \frac{5 + \eta_2}{2 + \eta_2} dr'_0 \left. \right) \\ & - \rho_0 \left[ \sum_{j=2}^4 \frac{GM_2}{R} \left( \frac{r_0}{R} \right)^j + \sum_{j=2}^4 \frac{4\pi GM_2}{(rR)^{j+1}} \right. \\ & \times \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^{2j+3} \frac{j+3 + \eta_2}{j + \eta_2} dr'_0 \left. \right] \frac{dP_j(\lambda)}{d\theta} \\ & - \rho_0 P_j(\lambda) \left[ \sum_{j=2}^4 \frac{GM_2}{R} \frac{j r_0^{j-1}}{R^j} \frac{dr_0}{d\theta} \right. \\ & \left. + \sum_{j=2}^4 \frac{4\pi GM_2}{(rR)^{j+1}} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^{2j+3} \frac{j+3 + \eta_2}{j + \eta_2} \frac{dr_0}{d\theta} \right] \\ & + \frac{1}{3} \Omega_1^2 r^2 \rho_0 P'_2(\cos \theta); \end{aligned} \quad (A27)$$

同理

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \varphi} &= \sum_{j=2}^4 (P'_j(r) + P''_j(r)) \frac{\partial P_j(\lambda)}{\partial \varphi} \\ &+ P_j(\lambda) \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_{j=2}^4 (P'_j(r) + P''_j(r)) \\ &= - \sum_{j=2}^4 \rho_0 \left[ \frac{GM_2}{R} \left( \frac{r_0}{R} \right)^j + \frac{4\pi GM_2}{rR^{j+1}} \right. \\ &\times \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^{2j+3} \frac{j+3+\eta_j}{j+\eta_j} dr_0' \left. \right] \frac{dP_j(\lambda)}{d\varphi} \\ &- \rho_0 P_j(\lambda) \left( \sum_{j=2}^4 \frac{GM_2}{R} \frac{j_0^{j-1}}{R^j} \frac{dr_0}{d\varphi} \right. \\ &\left. + \frac{4\pi GM_2}{rR^{j+1}} \frac{\rho}{M_\psi} r_0'^{2j+3} \frac{j+3+\eta_j}{j+\eta_j} \frac{dr_0}{d\varphi} \right). \quad (\text{A28}) \end{aligned}$$

附录 B: 斜压转动单星  $\frac{dP}{dr}$ ,  $\frac{dP}{d\theta}$  的计算

计算方法见附录 A, 最终计算得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \left( \frac{2}{3} \Omega_1^2 r \rho_0 + \frac{2}{3} \Omega_1 r^2 \rho_0 \frac{d\Omega_1}{dr} \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} \Omega_1^2 r \frac{d\rho_0}{dr} \right) P_2(\cos \theta) - \rho_0 g_0 \\ &+ \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0' \frac{5+\eta_2}{2+\eta_2} dr_0' \\ &+ \rho_0 \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0' \frac{5+\eta_2}{2+\eta_2} dr_0' \\ &+ \rho_0 \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0' \frac{5+\eta_2}{2+\eta_2} \frac{dr_0}{dr}, \quad (\text{B1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= \frac{1}{3} \Omega_1^2 r^2 \rho_0 P_2(\cos \theta) + \rho_0 \frac{4\pi}{3r^3} P_2(\cos \theta) \\ &\times \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0' \frac{5+\eta_2}{2+\eta_2} dr_0' + \rho_0 \frac{4\pi}{3r^3} P'_2(\cos \theta) \\ &\times \int_0^{r_0} \frac{\rho}{M_\psi} \Omega_1^2 r_0' \frac{5+\eta_2}{2+\eta_2} dr_0'. \quad (\text{B2}) \end{aligned}$$

附录 C: 斜压转动双星中  $\frac{\partial r_0}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial r_0}{\partial \theta}$  和  $\frac{\partial r_0}{\partial \varphi}$  的计算

$$A(r_0) = \frac{\Omega_1^2 r_0^3}{3GM_\psi} \frac{5}{2+\eta_2}, \quad (\text{C1})$$

$$B(r_0) = \frac{M_2}{M_\psi} \left( \frac{r_0}{R} \right)^3 \frac{5}{2+\eta_2}, \quad (\text{C2})$$

$$C(r_0) = \frac{M_2}{M_\psi} \left( \frac{r_0}{R} \right)^4 \frac{7}{3+\eta_3}, \quad (\text{C3})$$

$$D(r_0) = \frac{M_2}{M_\psi} \left( \frac{r_0}{R} \right)^5 \frac{9}{4+\eta_4}, \quad (\text{C4})$$

式中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial r} &= 1/[1 - 4A(r_0)P_2(\cos \theta) + 4B(r_0)P_2(\lambda) \\ &+ 5C(r_0)P_3(\lambda) + 6D(r_0)P_4(\lambda)], \quad (\text{C5}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial \theta} &= [r_0(A(r_0)P'_2(\cos \theta)_\theta - B(r_0)P'_2(\lambda)_\theta \\ &- C(r_0)P'_3(\lambda)_\theta - D(r_0)P'_4(\lambda)_\theta) \\ &\times [1 - 4A(r_0)P_2(\cos \theta) + 4B(r_0)P_2(\lambda) \\ &+ 5C(r_0)P_3(\lambda) + 6D(r_0)P_4(\lambda)]^{-1}, \quad (\text{C6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} &= - [r_0(B(r_0)P'_2(\lambda)_\varphi + C(r_0)P'_3(\lambda)_\varphi \\ &+ D(r_0)P'_4(\lambda)_\varphi) \times [1 - 4A(r_0)P_2(\cos \theta) \\ &+ 4B(r_0)P_2(\lambda) + 5C(r_0)P_3(\lambda) \\ &+ 6D(r_0)P_4(\lambda)]^{-1}. \quad (\text{C7}) \end{aligned}$$

$P'_2(\cos \theta)_\theta, P'_2(\lambda)_\theta, P'_3(\lambda)_\theta, P'_4(\lambda)_\theta$  为相应的 Legendre 多项式对  $\theta$  的偏导数;  $P'_2(\lambda)_\varphi, P'_3(\lambda)_\varphi, P'_4(\lambda)_\varphi$  为相应的 Legendre 多项式对  $\varphi$  的偏导数. 即

$$P'_2(\cos \theta)_\theta = -3 \cos \theta \sin \theta, \quad (\text{C8})$$

$$P'_2(\sin \theta \cos \varphi)_\theta = 3 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi, \quad (\text{C9})$$

$$\begin{aligned} P'_3(\sin \theta \cos \varphi)_\theta &= \frac{1}{2} (15 \sin^2 \theta \cos \theta \cos^3 \varphi \\ &- 3 \cos \theta \cos \varphi), \quad (\text{C10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_4(\sin \theta \cos \varphi)_\theta &= \frac{1}{2} (35 \sin^3 \theta \cos \theta \cos^4 \varphi \\ &- 15 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin^2 \varphi), \quad (\text{C11}) \end{aligned}$$

$$P'_2(\cos \theta)_\varphi = 0, \quad (\text{C12})$$

$$P'_2(\sin \theta \cos \varphi)_\varphi = -3 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi, \quad (\text{C13})$$

$$\begin{aligned} P'_3(\sin \theta \cos \varphi)_\varphi &= -\frac{1}{2} (15 \sin^3 \theta \cos^2 \varphi \sin \varphi \\ &- 3 \sin \theta \sin \varphi), \quad (\text{C14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'_4(\sin \theta \cos \varphi)_\varphi &= -\frac{1}{2} (35 \sin^4 \theta \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ &- 15 \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi). \quad (\text{C15}) \end{aligned}$$

## 参考文献

- [1] Huang R Q, Yu K N 1998 *Stellar Astrophysics* (New York: Springer Verlag) p313
- [2] Paczynski B 1971 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **9** 183
- [3] Kippenhahn R, Thomas H C 1970 *Proceedings of IAU Colloq. 4* Columbus, USA, September 8–11, 1969 p20
- [4] Endal A S, Sofia S 1976 *Astrophys. J.* **210** 184
- [5] Pinsonneault M H, Kawaler S D, Sofia S, Demarque P 1989 *Astrophys. J.* **338** 424
- [6] Pinsonneault M H, Kawaler S D, Demarque P 1990 *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **74** 501
- [7] Pinsonneault M H, Deliyannis C P, Demarque P 1991 *Astrophys. J.* **367** 239
- [8] Song H F, Zhang B, Zhang J, Wu H B, Peng Q H 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 2084

- [9] Wen D H, Zhou Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 080401
- [10] Zhang J, Wang B, Zhang B, Han Z W 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 019701
- [11] von Zeipel H 1924 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **84** 665
- [12] de Souza D A, Kervella P, Jankov S, Abe L, Vakili F, di Folco E, Paresce F 2003 *Astron. Astrophys.* **407** L47
- [13] Nazé Y 2009 *Astron. Astrophys.* **506** 1055
- [14] Jackson S, MacGregor K B, Skumanich A 2004 *Astrophys. J.* **606** 1196
- [15] Maeder A, Stahler S 2009 *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Germany: Springer-Verlag) pp22–24
- [16] Kervella P, Domiciano de Souza A D, Bendjoya P 2008 *Astron. Astrophys.* **484** 13
- [17] Zorec J, Domiciano de Souza A D, Frémat Y, Vakili F 2005 *Semaine de l'Astrophysique Française* Strasbourg, France, June 27–July 1, 2005 p363
- [18] Zhan Q, Song H F, Tai L T, Wang J T 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 089701 (in Chinese) [詹琼, 宋汉峰, 邵丽婷, 王江涛 2015 物理学报 **64** 089701]
- [19] Zahn J P 2010 *Astron. Astrophys.* **517** A7
- [20] Kopal Z 1959 *Close Binary Systems* (1st Ed.) (New York: Wiley) p30
- [21] Song H F, Wang J Z, Li Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 059701 (in Chinese) [宋汉峰, 王靖洲, 李云 2013 物理学报 **62** 059701]
- [22] Song H F, Zhong Z, Lu Y 2009 *Astron. Astrophys.* **504** 161
- [23] Song H F, Lu Y, Wang J Z 2011 *Publ. Astron. Soc. Jap.* **63** 835
- [24] Song H F, Maeder A, Meynet G, Huang R Q, Ekström S, Granada A 2013 *Astron. Astrophys.* **556** A100
- [25] Landin N R, Mendes L T S, Vaz P R 2009 *Astron. Astrophys.* **494** 209
- [26] Zhou K, Yang Z Y, Zou D C, Yue R H 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020401
- [27] Maeder A 1999 *Astron. Astrophys.* **347** 185
- [28] Espinosa Lara F, Rieutord M 2011 *Astron. Astrophys.* **533** A43
- [29] Claret A 2012 *Astron. Astrophys.* **538** A3
- [30] de Souza D A, Kervella P, Moser Faes D, Dalla Vedova G, Mérand A, Le Bouquin J B, Espinosa Lara F, Rieutord M, Bendjoya P, Carciofi A C, Hadjara M, Millour F, Vakili F 2014 *Astron. Astrophys.* **569** A10
- [31] Vink J S, de Koter A, Lamers H J G L M 2001 *Astron. Astrophys.* **369** 574
- [32] Goss K J F, Karoff C, Chaplin W J, Elsworth Y, Stevens I R 2011 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **411** 162



# Detail investigation of the inclined pressure structure and gravity darkening in critical rotating star Achernar\*

Tai Li-Ting<sup>1)</sup> Song Han-Feng<sup>1)2)3)†</sup> Wang Jiang-Tao<sup>1)</sup>

1) (Department of Physics, College of Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

2) (Key Laboratory for the Structure and Evolution of Celestial Objects, Chinese Academy of Sciences, Kunming 650011, China)

3) (Joint Research Centre for Astronomy, National Astronomical Observatory-Guizhou University, Guiyang 550025, China)

( Received 27 August 2015; revised manuscript received 6 December 2015 )

## Abstract

Rotation and tide are two important factors that have very important impacts on the stellar structure and evolution. Based on the observational data of Achernar, we have derived the inclined pressure structure in a single rotating star or as a member in the binaries. We have given the distributions of the physical quantities on the isobaric surface and these distributions are derived from the Legendre series of expansions. We have also found the relationship between all levels of perturbation potential functions (including rotational and tidal distortions) and the distributions of density and pressure under the condition of inclined pressure structure. In particular, the gravitational darkening with the models including the effects of rotation and tide is investigated. We have found that the critical ratio of equatorial radius to the polar radius is consistent with the observations in rotating binaries better than that in single rotating model. The reason is that the tidal force can make the polar radius shortened because the tidal force exerts an inward force to the two polar points. However, the theoretical angular velocity in binaries is smaller than that observed. It is also shown that the positive shear enhances the centrifugal force and decreases the mean effective gravitational acceleration and effective temperatures whereas the negative shear plays a role to strengthen the effective gravitational acceleration. Moreover, the solid body rotation has not been supported inside Achernar because magnetic fields have not been detected through observations. Furthermore, the theoretical angular velocity in rigid rotation is higher than the angular velocity observed. Achernar has a periodic variation of light curves due to mass outburst, which also supports differential rotation. A positive shear indicates that the mass in accretion disks is falling to Achernar and the Achernar is spun up to critical rotation according to current observations. By comparing the theoretical results with observations, it can be seen that when the theoretical spin angular velocity of Achernar is  $4.65 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  and the positive shears  $\Omega/\Omega_s$  are 0.7851, the temperature of the polar points is 16041 K and that of equatorial sphere is 12073 K. Relative errors between the theoretical values and observations are less than 3% and are listed in the text. This model is the best and is the most possible one for Achernar.

**Keywords:** rotation, tide, inclined pressure structure, gravitational darkening

**PACS:** 97.10.Cv, 97.10.Kc, 97.20.Ec, 97.80.Fk

**DOI:** 10.7498/aps.65.049701

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11463002), the Key Laboratory for the Structure and Evolution of Celestial Objects, Chinese Academy of Science (Grant No. OP201405), and the Graduate Innovation Fund in Guizhou University, China (Grant No. 2015055).

† Corresponding author. E-mail: [sci.hfsong@gzu.edu.cn](mailto:sci.hfsong@gzu.edu.cn)