

分数阶时滞反馈对 Duffing 振子动力学特性的影响

温少芳 申永军 杨绍普

Dynamical analysis of Duffing oscillator with fractional-order feedback with time delay

Wen Shao-Fang Shen Yong-Jun Yang Shao-Pu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 65, 094502 (2016) DOI: 10.7498/aps.65.094502

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.094502>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2016/V65/I9>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基础激励下分数阶线性系统的响应特性分析

Response property of a factional linear system under the base excitation

物理学报.2016, 65(8): 084501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.084501>

EI-Nabulsi 动力学模型下非 Chetaev 型非完整系统的精确不变量与绝热不变量

Exact invariants and adiabatic invariants for nonholonomic systems in non-Chetaev's type based on EI-Nabulsi dynamical models

物理学报.2015, 64(3): 034502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034502>

EI-Nabulsi 动力学模型下 Birkhoff 系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量

Perturbation to Noether symmetries and adiabatic invariants for Birkhoffian systems based on EI-Nabulsi dynamical models

物理学报.2014, 63(10): 104501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.104501>

非保守动力学系统 Noether 对称性的摄动与绝热不变量

Perturbation to Noether symmetries and adiabatic invariants for nonconservative dynamic systems

物理学报.2013, 62(16): 164501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.164501>

不同周期信号激励下分数阶线性系统的响应特性分析

The response property of one kind of factional-order linear system excited by different periodical signals

物理学报.2013, 62(2): 024501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.024501>

分数阶时滞反馈对Duffing振子动力学特性的影响*

温少芳¹⁾ 申永军^{2)†} 杨绍普²⁾

1)(石家庄铁道大学交通运输学院, 石家庄 050043)

2)(石家庄铁道大学机械工程学院, 石家庄 050043)

(2015年12月17日收到; 2016年1月8日收到修改稿)

研究了含分数阶时滞耦合反馈的Duffing自治系统, 通过平均法得到了系统周期解的一阶近似解析形式, 定义了以反馈系数、分数阶阶次、时滞参数表示的等效刚度和等效阻尼系数, 发现分数阶时滞耦合反馈同时具有速度时滞反馈和位移时滞反馈的作用. 比较了三种参数条件下近似解析解与数值积分的结果, 二者的吻合精度都很高, 证明了近似解析解的正确性和准确性. 分析了反馈系数、分数阶阶次和非线性刚度系数等参数对系统分岔点、周期解稳定性、周期解的存在范围、零解的稳定性以及稳定性切换次数等系统动力学特性的影响.

关键词: 分数阶微分, Duffing 振子, 时滞, 平均法

PACS: 45.10.Hj, 02.30.Ks

DOI: 10.7498/aps.65.094502

1 引言

随着计算机技术的发展, 近年来, 关于分数阶微积分及其应用的研究引起了不同领域科研人员的广泛关注, 很多学者对分数阶微积分的基本特性进行了研究, 在基础理论方面取得了很大的进展^[1-4]. 在工程领域中, 很多问题可以用分数阶方程来更好地描述, 所以研究分数阶微积分方程中的典型力学特性和分数阶参数对动力系统的影响很有意义, 大量学者进行着这方面的研究^[5-7].

目前对分数阶动力系统的研究大致分为定性分析、数值计算和解析研究三方面: 定性分析侧重分析解的数目和稳定性的变化; 数值计算侧重于计算方法的精度和速度; 解析研究则主要是得到系统的近似解并进行定量分析. 典型工作如Wang等^[8,9]研究了含分数阶微分项的线性振动系统的稳定性, 利用稳定性切换原理证明了强迫激励下含

分数阶微分项的单自由度线性振子的解可以分为两部分. Shen等^[10-14]用平均法对多种含有分数阶微分项的线性和非线性振子的动力学特性进行了研究, 发现分数阶微分项可以等效为线性刚度和线性阻尼, 并分析了分数阶参数对系统动力学行为的影响. Li和Deng^[15,16]在分数阶微积分的数学理论方面进行了大量研究, 比较了三种分数阶微积分的区别与联系, 给出了Caputo型分数阶微积分的sequential特性, 并且建立了一些高效数值算法. Li等^[17]利用数值分析的方法对分数阶系统进行了混沌动力学分析. Chen等^[18]利用随机平均法研究了随机激励下分数阶微分振子的动力学特性. Wahi和Chatterjee^[19]利用平均法研究了一个特殊的线性单自由度分数阶微分振子, 分析了分数阶微分项对系统自由振动的影响. 银花和陈宁^[20]提出了一种利用有限元法求解分数阶导数黏弹性模型的方法, 提高了处理分数阶导数黏弹性问题的效率和精度. Xu等^[21]研究了随机激励下分数阶Duffing

* 国家自然科学基金(批准号: 11372198)、河北省高等学校创新团队领军人才计划(批准号: LJRC018)、河北省高等学校高层次人才科学研究项目(批准号: GCC2014053)和河北省高层次人才资助项目(批准号: A201401001)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shenyongjun@126.com

振子的动力学行为, 利用蒙特卡罗法分析了该系统的统计响应. Zhang 和 Yang [22] 对分数阶广义 Lorenz 系统的混沌行为和系统的同步问题进行了研究. Xu 等 [23] 对在高斯白噪声激励下的分数阶 Duffing-Rayleigh 系统进行了响应分析. 除了以上这些偏重于理论的基础研究以外, 分数阶微积分在解决工程问题方面还有其独特之处. 相比于传统的整数阶控制, 分数阶控制具有抗噪能力强、鲁棒性好、控制精度高等优点, 因此分数阶微积分的工程应用也具有较大的研究价值.

时滞是自然界中普遍存在的现象, 在控制系统中更是常见, 而且不可避免. 时滞的存在往往会导致系统失稳, 并且随时滞的变化, 系统平衡态的稳定性会发生切换, 在切换点处一般会有分岔现象 [24-27]. 目前已有一些对分数阶时滞系统的研究, 如 Shi 和 Wang [28] 研究了分数阶时滞系统的稳定性, 得到了分数阶时滞系统 BIBO 稳定性的判定方法. Babakhani 等 [29] 证明了一类典型的分数阶时滞微分方程在平衡点附近周期解的存在, 并研究了系统的 Hopf 分岔. Çelik 和 Demir [30] 利用最大 Lyapunov 指数研究了分数阶时滞非线性自治系统产生混沌的条件. 以上分析偏重于单独含有时滞反馈或分数阶微分项的系统动力学的基础理论研究, 关于分数阶时滞耦合反馈系统的研究还很少. 本文以含分数阶时滞耦合反馈的 Duffing 振子为对象, 研究分数阶时滞反馈项系数和阶次等参数的变化对分岔点、周期解的存在性和周期解的最大幅值等复杂动力学特性的影响, 发现分数阶时滞耦合反馈既有速度时滞反馈又有位移时滞反馈的作用, 对分岔点位置和稳定性切换等动力学特性有重要影响.

2 近似解析解

研究如下含分数阶时滞负反馈的 Duffing 振子

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + c\dot{x}(t) + \alpha_1 x^3(t) = K_1 D^p[x(t - \tau)], \quad (1)$$

其中 $m, k, c(c \geq 0)$ 和 α_1 分别为系统的质量、线性刚度、线性阻尼和非线性刚度; τ 为控制过程中引入的时间滞后; $D^p[x(t - \tau)]$ 为 $x(t - \tau)$ 关于 t 的 p 阶导数 ($0 \leq p \leq 1$); $K_1(K_1 < 0)$ 为分数阶反馈的系数.

引入

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\varepsilon\mu = \frac{c}{m},$$

$$\varepsilon\alpha = \frac{\alpha_1}{m}, \quad \varepsilon k_1 = \frac{K_1}{m}, \quad (2)$$

(1) 式可以变换为

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + 2\varepsilon\mu\dot{x}(t) + \varepsilon\alpha x^3(t) = \varepsilon k_1 D^p[x(t - \tau)]. \quad (3)$$

假设 (3) 式存在频率为 ω 的周期运动, 令 $\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\sigma$ ($\sigma = O(1)$ 为调谐参数), 则 (3) 式可变为

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon\{k_1 D^p[x(t - \tau)] + \sigma x(t) - 2\mu\dot{x}(t) - \alpha x^3(t)\}. \quad (4)$$

设 $\varphi = \omega t + \theta$, 则 (4) 式的解可假设为

$$x(t) = a \cos \varphi, \quad (5a)$$

$$\dot{x}(t) = -a\omega \sin \varphi, \quad (5b)$$

$$x(t - \tau) = a \cos(\varphi - \omega\tau). \quad (5c)$$

(5a) 式对 t 求导, 可以得到

$$\dot{x}(t) = \dot{a} \cos \varphi - a(\omega + \dot{\theta}) \sin \varphi.$$

与 (5b) 式结合, 可知

$$\dot{a} \cos \varphi - a\dot{\theta} \sin \varphi = 0. \quad (6)$$

(5b) 式对 t 求导, 可以得到

$$\ddot{x}(t) = -\dot{a}\omega \sin \varphi - a\omega(\omega + \dot{\theta}) \cos \varphi. \quad (7)$$

将 (5) 和 (7) 式代入到 (4) 式, 得到

$$\begin{aligned} & \dot{a} \sin \varphi + a\dot{\theta} \cos \varphi \\ &= -\frac{1}{\omega} [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta, \tau)], \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$P_1(a, \theta) = \varepsilon[\sigma a \cos \varphi + 2\mu a \omega \sin \varphi - \alpha a^3 \cos^3 \varphi],$$

$$P_2(a, \theta, \tau) = \varepsilon k_1 D^p[a \cos(\varphi - \omega\tau)].$$

将 (6) 式和 (8) 式联合起来可以得到

$$\dot{a} = -\frac{1}{\omega} [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta, \tau)] \sin \varphi, \quad (9a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{1}{\omega} [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta, \tau)] \cos \varphi. \quad (9b)$$

根据平均法, 可以对 (9) 式在区间 $[0, T]$ 之间进行积分平均, 从而可以得到振幅 a 和相位 θ 的近似形式

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{1}{T\omega} \int_0^T [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta, \tau)] \\ &\quad \times \sin \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{1}{T\omega} \int_0^T [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta, \tau)]$$

$$\times \cos \varphi d\varphi. \quad (10b)$$

积分平均时, 因为 $P_1(a, \theta)$ 是周期函数, 可取 $T = 2\pi$; $P_2(a, \theta, \tau)$ 是非周期函数则取 $T = \infty$. 对 (10) 式第一部分积分得到

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} P_1(a, \theta) \sin \varphi d\varphi \\ &= -\varepsilon\mu a, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\theta}_1 &= -\frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} P_1(a, \theta) \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{3\varepsilon\alpha a^3}{8\omega} - \frac{\varepsilon a\sigma}{2\omega}. \end{aligned} \quad (11b)$$

对 (10) 式第二部分积分

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\omega} \int_0^T P_2(a, \theta, \tau) \sin \varphi d\varphi \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-\varepsilon k_1}{T\omega} \int_0^T D^p[a \cos(\varphi - \omega\tau)] \\ &\quad \times \sin \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\theta}_2 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T\omega} \int_0^T P_2(a, \theta, \tau) \cos \varphi d\varphi \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-\varepsilon k_1}{T\omega} \int_0^T D^p[a \cos(\varphi - \omega\tau)] \\ &\quad \times \cos \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (12b)$$

这里采用 Caputo 型分数阶微积分定义

$$D^p[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t \frac{x'(u)}{(t-u)^p} du, \quad (13)$$

其中 $\Gamma(y)$ 为 Gamma 函数, 具有 $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$ 的特性. 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= \frac{\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \int_0^T \left\{ \int_0^t \left[\frac{\sin(\omega u + \theta - \omega\tau)}{(t-u)^p} du \right] \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\omega t + \theta) \right\} dt. \end{aligned} \quad (14)$$

引入 $s = t - u$ 和 $ds = -du$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= \frac{\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \int_0^T \left\{ \int_0^t \left[\frac{\sin(\omega t + \theta - \omega s - \omega\tau)}{s^p} ds \right] \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\omega t + \theta) \right\} dt \\ &= \frac{\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\cos \omega s}{s^p} ds \right] \sin(\omega t + \theta - \omega\tau) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. \times \sin(\omega t + \theta) \right\} dt - \frac{\varepsilon a k_1}{\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \int_0^T \left\{ \left[\int_0^t \frac{\sin \omega s}{s^p} ds \right] \cos(\omega t + \theta - \omega\tau) \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\omega t + \theta) \right\} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

将 (15) 式中的第一部分定义为 \dot{a}_{21} , 第二部分定义为 \dot{a}_{22} , 进行分部积分得到

$$\begin{aligned} \dot{a}_{21} &= \frac{\varepsilon a k_1}{4\omega\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \left\{ \frac{2\omega t \cos(\omega t) - \sin(2\omega t + 2\theta - \omega\tau)}{T} \right. \\ &\quad \times \left[\int_0^t \frac{\cos \omega s}{s^p} ds \right] \Big|_0^T \\ &\quad - \frac{\varepsilon a k_1}{4\omega\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \int_0^T \left\{ [2\omega t \cos(\omega t) - \sin(2\omega t + 2\theta - \omega\tau)] \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\cos \omega t}{t^p} \right\} dt, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_{22} &= \frac{-\varepsilon a k_1}{4\omega\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \left\{ \frac{2\omega t \sin(\omega t) + \cos(2\omega t + 2\theta - \omega\tau)}{T} \right. \\ &\quad \times \left[\int_0^t \frac{\cos \omega s}{s^p} ds \right] \Big|_0^T \\ &\quad + \frac{\varepsilon a k_1}{4\omega\Gamma(1-p)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \int_0^T \left\{ [2\omega t \sin(\omega t) + \cos(2\omega t + 2\theta - \omega\tau)] \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\cos \omega t}{t^p} \right\} dt. \end{aligned} \quad (16b)$$

引入两个基本公式^[12-14]

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin(\omega t)}{t^p} dt \\ &= \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\cos(\omega t)}{t^p} dt \\ &= \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (17b)$$

将 (17) 式代入 (16) 式可以得到

$$\dot{a}_{21} = \frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \cos \omega\tau, \quad (18a)$$

$$\dot{a}_{22} = \frac{-\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \sin \omega\tau. \quad (18b)$$

因此

$$\dot{a}_2 = \frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \sin\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right). \quad (19a)$$

根据同样的计算过程,可以得到

$$a\dot{\theta}_2 = \frac{-\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \cos\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right). \quad (19b)$$

将(11)式和(19)式联合起来,可得

$$\dot{a} = -\varepsilon\mu a + \frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \sin\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right), \quad (20a)$$

$$a\dot{\theta} = \frac{3\varepsilon\alpha a^3}{8\omega} - \frac{\varepsilon a \sigma}{2\omega} - \frac{\varepsilon a k_1 \omega^{p-1}}{2} \cos\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right). \quad (20b)$$

将原系统参数代入(20)式得到

$$\dot{a} = -\frac{ca}{2m} + \frac{aK_1\omega^{p-1}}{2m} \sin\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right), \quad (21a)$$

$$a\dot{\theta} = \frac{3\alpha_1 a^3}{8m\omega} - \frac{\omega a}{2} + \frac{ka}{2m\omega} - \frac{aK_1\omega^p}{2m\omega} \cos\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right). \quad (21b)$$

这样我们就得到了系统的近似解析解.对(21)式进行整理得到:

$$\dot{a} = -\frac{a}{2m} C_e(p), \quad (22a)$$

$$a\dot{\theta} = \frac{3\alpha_1 a^3}{8m\omega} - \frac{\omega a}{2} + \frac{a}{2m\omega} K_e(p), \quad (22b)$$

其中

$$C_e(p) = c - K_1\omega^{p-1} \left[\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \cos(\omega\tau) - \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \sin(\omega\tau) \right], \quad (23a)$$

$$K_e(p) = k - K_1\omega^p \left[\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) \cos(\omega\tau) + \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \sin(\omega\tau) \right], \quad (23b)$$

分别定义为等效阻尼和等效刚度.

分析(22)和(23)式可知,反馈系数 K_1 、分数阶的阶次 p 和时滞参数 τ 对等效阻尼和等效刚度都有重要影响.反馈系数 K_1 与等效阻尼和等效刚度成线性关系,因此反馈系数 K_1 的大小影响着系统响应的幅值和共振频率的大小.对于分数阶阶次 p ,当分数阶阶次 $p \neq 0$ 时,分数阶时滞反馈既能起到位移时滞反馈的作用,同时也能起到速度时滞反馈的作用;当分数阶阶次 $p \rightarrow 0$ 时,分数阶时滞反馈几乎等同于位移时滞反馈;当分数阶阶次 $p \rightarrow 1$ 时,

分数阶时滞反馈几乎等同于速度时滞反馈, p 等于0或1的分析结果与文献[25]完全相同.对于时滞参数 τ ,当 $\tau = 0$ 时,(23)式定义的等效线性阻尼和等效线性刚度的结果与文献[13]完全一致,当 τ 逐渐增大时, τ 以 $2\pi/\omega$ 为周期,循环影响着系统响应的幅值和共振频率.

3 定常解分析

3.1 零解

从(21)式容易看出 $a = 0$ 是方程的解.当满足下式时,零解是渐近稳定的,

$$-\frac{c}{2} + \frac{K_1\omega^{p-1}}{2} \sin\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right) < 0. \quad (24)$$

也就是说分数阶时滞反馈带来的阻尼效应小于系统固有的线性阻尼系数,即等效阻尼 $C_e(p) > 0$.从(24)式可以看出,当 $-c\omega < K_1\omega^p < c\omega$ 时,对于所有的 τ ,零解都是渐近稳定的.当 $K_1\omega^p < -c\omega$ 时,零解的稳定性满足文献[26]所述的稳定性切换过程.

3.2 非零解

下面研究非零定常解.在(21)式中,令 $\dot{a} = 0$ 和 $\dot{\theta} = 0$.当 $a \neq 0$ 时,(21)式变为

$$-c + K_1\omega^{p-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right) = 0, \quad (25a)$$

$$(m\omega^2 - k) + K_1\omega^p \cos\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right) - \frac{3\alpha_1 \bar{a}^2}{4} = 0, \quad (25b)$$

从上式中消去谐波项,可以得到幅频曲线方程

$$\left(m\omega^2 - k - \frac{3\alpha_1 \bar{a}^2}{4}\right)^2 + (c^2\omega^2 - K_1^2\omega^{2p}) = 0. \quad (26)$$

当 $|K_1\omega^p| > c\omega$ 时,可以得到两个解

$$\bar{a}_{1,2} = \sqrt{\frac{4}{3\alpha_1}(\omega^2 - 1 \mp \sqrt{K_1^2\omega^{2p} - c^2\omega^2})}. \quad (27)$$

从3.1和3.2节的分析中可以得出,当 $-c\omega < K_1\omega^p < c\omega$ 时,不存在非零解,此时系统只有零解,且是渐近稳定的;当 $K_1\omega^p < -c\omega < 0$ 时,系统有两个非零解和一个零解,下面研究这种条件下解的情况,此时

$$\cos\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right) = -\frac{1}{K_1\omega^p}\left(\omega^2 - 1 - \frac{3\alpha_1\bar{a}_{1,2}^2}{4}\right) = \pm \frac{1}{|K_1\omega^p|}\sqrt{K_1^2\omega^{2p} - c^2\omega^2}, \quad (28)$$

$$\tau = \begin{cases} \tau_{1,n} = \frac{1}{\omega}\left[\frac{p\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{c}{K_1\omega^{p-1}}\right) + 2n\pi\right] & \bar{a} = a_1, \\ \tau_{2,n} = \frac{1}{\omega}\left\{\frac{p\pi}{2} + \pi + \arcsin\left(\frac{c}{K_1\omega^{p-1}}\right) + 2n\pi\right\} & \bar{a} = a_2, \end{cases} \quad (29)$$

这里 $n = 0, 1, 2 \dots$, 因此在某些频率范围内的周期运动有无数个迟滞时间可以与之对应. 因为本文研究 $\omega^2 = 1 + \varepsilon\sigma$ 部分频率的周期运动, 下面只验证 $n = 0$ 和 1 时的时滞. 对这些周期解进行稳定性分析, 从而判定哪些解在工程实际中能够实现. 将 (21) 式在 $(\bar{a}, \bar{\theta})$ 处进行线性化处理, 形成关于扰动量 Δa 和 $\Delta\theta$ 的自治微分方程:

$$\begin{cases} \frac{d\Delta a}{dt} = \left[-\frac{c}{2} + \frac{K_1\omega^{p-1}}{2}\sin\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right)\right]\Delta a, \\ \frac{d\Delta\theta}{dt} = \left[\frac{9\alpha_1\bar{a}^2}{8\omega} - \frac{(\omega^2 - 1)}{2\omega} - \frac{K_1\omega^p}{2\omega}\cos\left(\frac{p\pi}{2} - \omega\tau\right)\right]\Delta a. \end{cases} \quad (30)$$

利用 (25) 式, 得到特征方程

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

说明此系统近似解的一阶线性展开不能判定非零解的稳定性. 下面利用数值仿真进行分析.

4 仿真分析

为了分析本文研究结果的正确性, 将本文所得解析结果与数值积分结果进行比较, 其中数值积分采用文献 [31] 中介绍的迭代方法, 该方法的计算公式为

$$D^p[x(t_l)] \approx h^{-p} \sum_{j=0}^l C_j^p x(t_{l-j}), \quad (31)$$

其中 $t_l = lh$ 为时间采样点, h 为时间步长, C_j^p 为分数阶二项式系数, 具有如下迭代关系

$$C_0^p = 1, \quad C_j^p = \left(1 - \frac{1+p}{j}\right)C_{j-1}^p. \quad (32)$$

因为 (1) 式中的分数阶微积分项含有时滞, 所以不能直接使用 (31) 式. 令 $\tau = i \times h$, i 为自然数, 则有

$$D^p[x(t - \tau)] = D^p[x(t - ih)]. \quad (33)$$

根据 (31), (32) 和 (33) 式, 可以得出 (1) 式的数值迭代格式

$$Z_1(t_l) = Z_2(t_{l-1})h - \sum_{j=1}^l C_j^1 Z_1(t_{l-j}), \quad (34a)$$

$$Z_2(t_l) = [K_1 Z_3(t_{l-1-i}) - \alpha_1(t_{l-1})^3 - cZ_2(t_{l-1}) - kZ_1(t_{l-1})]h - \sum_{j=1}^l C_j^1 Z_2(t_{l-j}), \quad (34b)$$

$$Z_3(t_l) = Z_2(t_{l-1})h^{1-p} - \sum_{j=1}^l C_j^{1-p} Z_3(t_{l-j}), \quad (34c)$$

其中 Z_1 为位移, Z_2 为速度, Z_3 为 p 阶分数阶微分项. 计算过程中 $h = 0.002$, 计算时间为 300 s, 在接近于 $\tau_{1,0}, \tau_{2,0}$ 等特殊点时, 计算时间选择为 1000 s. 将计算结果的前 80% 响应略去, 取后 20% 响应的最大值作为稳态响应的幅值. (29) 式给出了时滞和周期运动频率的解析关系, 将结果示于图 1, 图 3 和图 5 中; (27) 式给出了幅频曲线的解析解, 联立 (29) 式, 即可得出时滞和周期运动幅值的解析关系, 结果示于图 2, 图 4 和图 6 中. 从三组参数下的图形中可以看出: 无论是时滞和周期运动频率的解析关系图, 还是时滞和周期运动幅值的解析关系图, 曲线中实线部分对应的非零解与数值解得到的结果都几乎完全重合, 证明了本文分析的周期解近似解析结果的正确性和准确性; 同时说明了实线部分对应的非零解是稳定的, 而虚线部分对应的非零解是不稳定的.

4.1 选取三组参数验证

4.1.1 第一组参数

选取第一组基本参数: $m = 1, k = 1, p = 1$ (即分数阶时滞反馈相当于速度时滞反馈), $c = 0, \alpha_1 = 0.1, K_1 = -0.5$ (这组参数与文献 [25] 完全相同). 将这组参数代入 (27) 式, 可以得到

$$a_1 = \sqrt{\frac{4}{0.3}(\omega^2 - 1 - 0.5\omega)}, \quad (35a)$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{4}{0.3}(\omega^2 - 1 + 0.5\omega)}. \quad (35b)$$

将(35a)式中解得的频率记为 $\omega_{10} = 1.281$, (35b)式解得的频率记为 $\omega_{20} = 0.781$, 分别代入(29)式, 可以得到对应的分岔点: $\tau_{1,n} = 1.2264, 6.1321, 11.0378, 15.9435, \dots$, 和 $\tau_{2,n} = 6.0355, 14.0826, 22.1297, \dots$. 将这些分岔的时滞点从小到大排列:

$$0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,2} < \tau_{1,3} < \dots$$

通过文献[26]稳定性的切换原理分析发现: 零解在 $\tau \in (0, \tau_{10})$ 和 $\tau \in (\tau_{20}, \tau_{11})$ 稳定, 在 $\tau \in (\tau_{10}, \tau_{20})$ 和 $\tau \in (\tau_{11}, +\infty)$ 是不稳定的, 随着时滞的增加零解经历了三次稳定性切换. 部分数值积分结果和解析结果示于图1和图2中, 说明 $\tau \in (0, \tau_{10})$ 的非零解 a_1 不稳定, $\tau \in (0, \tau_{20})$ 的非零解 a_2 是渐近稳定的; 零解在 $\tau \in (0, \tau_{10})$ 和 $\tau \in (\tau_{20}, \tau_{11})$ 稳定, 在 $\tau \in (\tau_{10}, \tau_{20})$ 是不稳定的. 这与文献[25]的结果完全相同, 间接证明了本文研究结果的正确性.

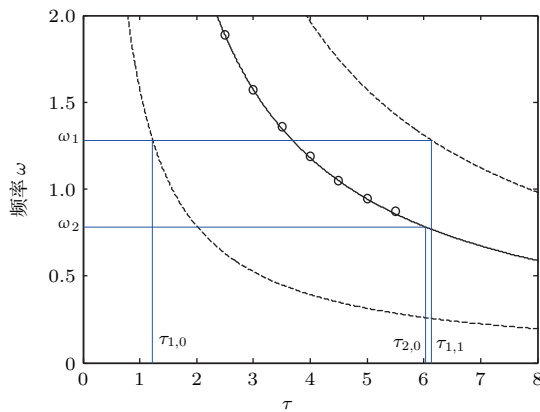


图1 时滞与周期运动频率的关系

Fig. 1. Delay-frequency relation of periodic motions.

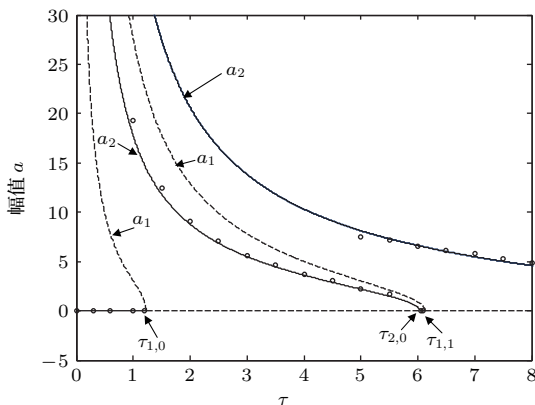


图2 时滞与周期运动幅值的关系

Fig. 2. Delay-amplitude relation of periodic motions.

4.1.2 第二组参数

在分数阶时滞反馈的阶次不为1时, 选取第二组基本参数 $m = 1, k = 1, c = 0.1, \alpha_1 = 0.1, K_1 = -0.5, p = 0.5$. 同样将这些参数代入(27)式和(29)式中, 得到: $\omega_{10} = 1.242, \omega_{20} = 0.756$, 对应的分岔点为: $\tau_{1,n} = 0.8132, 5.8713, 10.9294, 15.9435, \dots$, 和 $\tau_{2,n} = 4.9626, 13.2726, 21.5826, \dots$. 将这些分岔的时滞点从小到大排列:

$$0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,1} < \tau_{1,3} < \dots$$

零解在 $\tau \in (0, \tau_{10})$ 和 $\tau \in (\tau_{20}, \tau_{11})$ 稳定, 在 $\tau \in (\tau_{10}, \tau_{20})$ 和 $\tau \in (\tau_{11}, +\infty)$ 是不稳定的, 随着时滞的增加零解同样经历了三次稳定性切换, 图4中零解的仿真也说明了这个结论. 从图3和图4中可以看出, 数值积分结果和解析结果吻合度很高, 在较大时滞范围内, 非零解 a_1 不稳定, 非零解 a_2 是渐近稳定的.

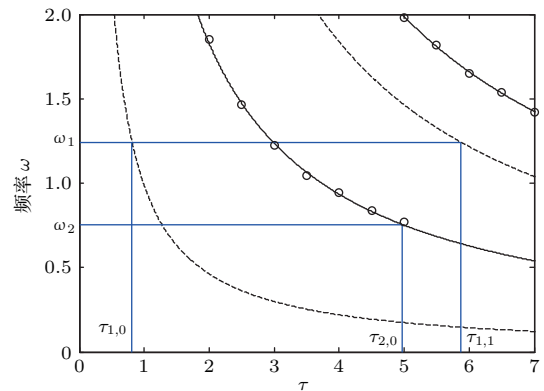


图3 时滞与周期运动频率的关系

Fig. 3. Delay-frequency relation of periodic motions.

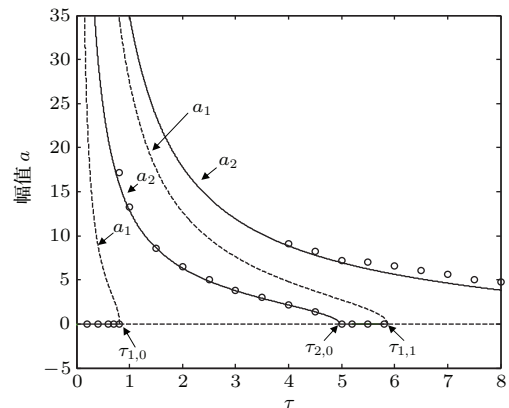


图4 时滞与周期运动幅值的关系

Fig. 4. Delay-amplitude relation of periodic motions.

4.1.3 第三组参数

选取第三组基本参数: 非线性刚度系数取为 $\alpha_1 = -0.1$, 其他参数的取值与第二组参数相同, 即 $m = 1, k = 1, c = 0.1, K_1 = -0.5, p = 0.5$. 将这些参数代入 (27) 式和 (29) 式中, 得到 $\omega_{10} = 1.2422, \omega_{20} = 0.7561$, 对应的分岔点为 $\tau_{1,n} = 0.8132, 5.8713, 10.9294, 15.9435, \dots$, 和 $\tau_{2,n} = 4.9626, 13.2726, 21.5826, \dots$. 做解析结果和数值积分结果的对比, 从图 5 可以看出数值积分结果和解析结果在分岔点附近的吻合度很高, 分岔点与第二组参数下的相同, 但是非零解的稳定性发生了转换, 非零解 a_1 渐近稳定, 非零解 a_2 是不稳定.

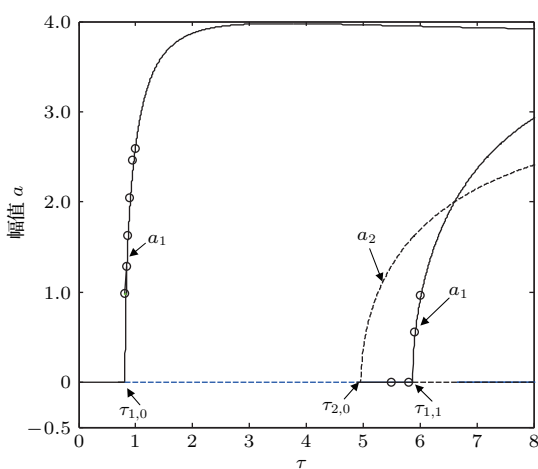


图 5 时滞与周期运动幅值的关系

Fig. 5. Delay-amplitude relation of periodic motions.

4.2 分数阶参数的影响

下面研究分数阶时滞反馈项中阶次对分岔点的影响, 选取 (29) 式中 $n = 0$ 的情况进行分析. 当分数阶阶次 p 分别选取 0.2, 0.5, 0.8 时, $m = 1$,

$k = 1, c = 0.1, \alpha_1 = 0.1, K_1 = -0.5$. 时滞与周期运动幅值的关系曲线见图 6. 可以看出, 当 p 逐渐增大时, 时滞与周期运动的幅值曲线向右偏移. 从数值解的仿真分析来看, 各周期解的稳定性并没有发生变化, 都是非零解 a_1 不稳定, 非零解 a_2 是稳定的, 这说明阶次的变化并不改变非零解的稳定性, 只是定量上改变了非零解的大小. 分岔点的变化情况详见表 1. 从表 1 中可以看出: 当 p 逐渐增大时, 分岔点 $\tau_{10}, \tau_{11}, \dots$, 和 τ_{20}, \dots 等均变大, 零解稳定性切换次数均为 3 次, 各分岔点对应的周期运动的频率也在变大. 这说明分数阶阶次的变化对分岔情况定性上没有影响, 只是改变了分岔参数的位置.

下面分析分数阶时滞反馈项系数对分岔点的影响. 当反馈系数 K_1 分别选取 $-0.12, -0.2, -0.4$ 时, 其他参数为 $m = 1, k = 1, c = 0.1, \alpha_1 = 0.1, p = 0.5$, 时滞与周期运动幅值的关系曲线见图 7. 可以看出, 当 K_1 逐渐减小时, 时滞与周期运动的幅值曲线向上变大, 以拓扑结构的骨架曲线为中心向两侧范围变大, 即非零解的范围变大.

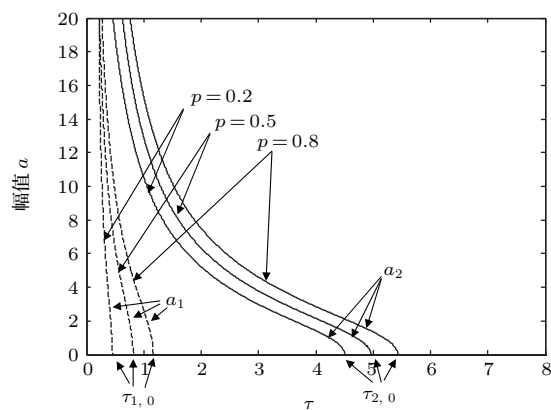


图 6 分数阶阶次变化时时滞与周期运动幅值的关系

Fig. 6. Delay-amplitude relation of periodic motions under different fractional orders.

表 1 分数阶阶次变化时各分岔点的分布

Table 1. The locations of bifurcation points under different fractional orders.

p	ω_{10}	ω_{20}	$\tau_{1,n}(n = 0, 1, 2 \dots)$	$\tau_{2,n}(n = 0, 1, 2 \dots)$	零解稳定性切换次数
0.2	1.227	0.732	0.4498, 5.5706, ...	4.5072, 13.091, ...	3 次
分岔的时滞点从小到大排列: $0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,1} < \tau_{1,3} < \dots$					
0.5	1.242	0.756	0.8132, 5.8713, ...	4.9626, 13.2726, ...	3 次
分岔的时滞点从小到大排列: $0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,1} < \tau_{1,3} < \dots$					
0.8	1.242	0.756	0.8132, 5.8713, ...	4.9626, 13.2726, ...	3 次
分岔的时滞点从小到大排列: $0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,1} < \tau_{1,3} < \dots$					

表2 反馈系数变化时各分岔点的分布
Table 2. The locations of bifurcation points under different feedback coefficients.

K_1	ω_{10}	ω_{20}	$\tau_{1,n}(n=0,1,2\cdots)$	$\tau_{2,n}(n=0,1,2\cdots)$	零解稳定性切换次数
-0.12	1.031	0.965	1.739, 7.8333, ...	3.076, 9.5871, ...	27次
分岔的时滞点从小到大排列: $0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{2,1} < \cdots < \tau_{1,13} < \tau_{1,14} < \tau_{2,13} < \cdots$					
-0.2	1.085	0.912	1.229, 7.02, ...	3.768, 10.6575, ...	7次
分岔的时滞点从小到大排列: $0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{2,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,2} < \tau_{1,3} < \tau_{1,4} < \tau_{2,3} < \cdots$					
-0.4	1.191	0.806	0.8915, 6.1671, ...	4.591, 12.3865, ...	3次
分岔的时滞点从小到大排列: $0 < \tau_{1,0} < \tau_{2,0} < \tau_{1,1} < \tau_{1,2} < \tau_{2,1} < \tau_{1,3} < \cdots$					

从数值解的仿真分析来看, 各周期解的稳定性并没有发生变化, 都是非零解 a_1 不稳定, 非零解 a_2 是稳定的, 这说明反馈系数 K_1 并不改变非零解的稳定性, 但是对非零解的量值有很大影响, 分岔点的变化情况详见表2. 从表2中可以看出: 当 K_1 逐渐减小时, 分岔点 $\tau_{1,0}, \tau_{1,1}, \cdots$ 在变小, 对应的周期运动的频率在变大, 而 $\tau_{2,0}, \tau_{2,1}, \cdots$ 等在变大, 对应的周期运动的频率在变小, 零解稳定性切换次数也在逐渐变少. 这说明反馈系数的变化影响非零解的存在范围, 对零解的稳定性也有很大的影响.

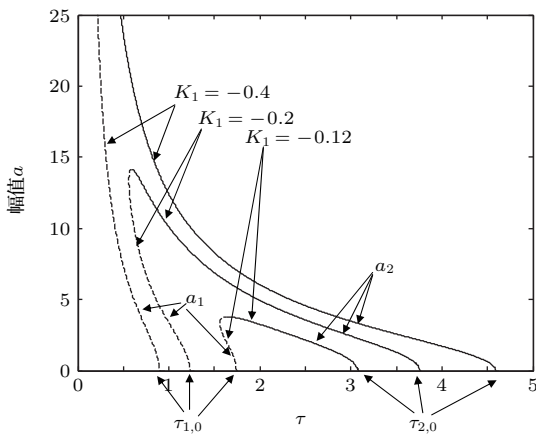


图7 反馈系数变化时时滞与周期运动的幅值关系
Fig. 7. Delay-amplitude relation of periodic motions under different feedback coefficients.

4.3 非线性刚度系数的影响

下面分析非线性刚度系数变化对分岔点的影响. 当Duffing系数 α_1 分别选取0.2, 0.1, 0.05, -0.05, -0.1, -0.2时, 其他参数为 $m = 1, k = 1, c = 0.1, p = 0.5, K_1 = -0.5$, 时滞与周期运动幅值的关系曲线见图8. 可以看出: 时滞参数的分岔点不变, 但是时滞与周期运动幅值的关系曲线发生了

变化. 当Duffing系数 α_1 为正值时曲线向左弯曲, 而且 α_1 越大向左弯曲越大, 此时非零解 a_1 不稳定, 非零解 a_2 是稳定的; 当Duffing系数 α_1 为负值时曲线向右弯曲, 而且 α_1 的绝对值越大向右弯曲越大, 此时非零解的稳定性发生了转换, 非零解 a_1 稳定, 非零解 a_2 是不稳定的. 这说明改变Duffing系数 α_1 的符号, 会改变时滞与周期运动幅值关系曲线的方向和非零解的稳定性; 改变Duffing系数 α_1 的大小, 会相应改变曲线的弯曲程度; 而且不管 α_1 怎样变化分岔点不变, 零解的稳定性也不会受到影响.

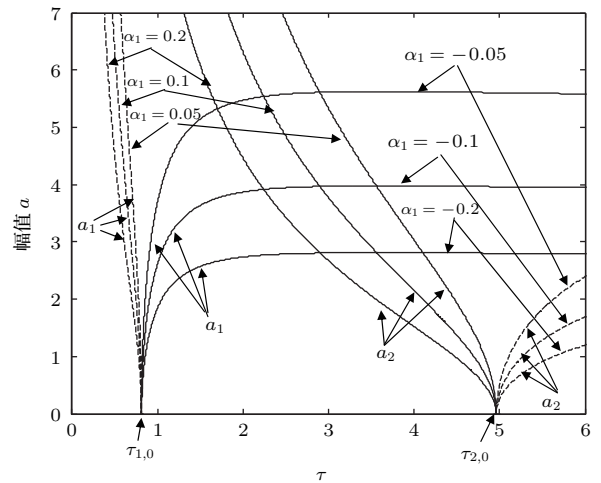


图8 非线性刚度系数变化时时滞与周期运动幅值的关系
Fig. 8. Delay-amplitude relation of periodic motions under different nonlinear stiffness coefficients.

5 结 论

研究了一个含有分数阶时滞耦合反馈的Duffing振子, 利用平均法得到了系统的一阶近似解, 定义了以反馈系数、分数阶阶次、时滞参数表示的等效刚度和等效阻尼系数. 分析了分数阶和时滞耦合作用下, 反馈系数和分数阶阶次等参数对系统动力

学的影响,发现分数阶时滞反馈能同时起到位移时滞反馈和速度时滞反馈的作用.进一步研究发现,反馈系数和分数阶阶次的变化对时滞参数的分岔点有很大的影响,也影响着周期解的最大幅值以及周期解的存在范围等. Duffing系数的正负和大小,会改变时滞与周期运动幅值关系曲线的方向、周期解的稳定性以及曲线的弯曲程度,而分岔点不变.这些结果对系统的动力学行为有着重要影响,对系统的优化有着重要意义,为分析类似的含有分数阶时滞的动力系统提供了参考.

参考文献

- [1] Gorenflo R, Abdel-Rehim E A 2007 *J. Comput. Appl. Math.* **205** 871
- [2] Jumarie G 2006 *Comput. Math. Appl.* **51** 1367
- [3] Ishteva M, Scherer R, Boyadjiev L 2005 *Math. Sci. Res. J.* 2005 **9** 161
- [4] Agnieszka B M, Delfim F M T 2011 *Fract. Calc. Appl. Anal.* **14** 523
- [5] Leung A Y T, Guo Z J, Yang H X 2012 *J. Sound Vib.* **331** 1115
- [6] Yang J H, Zhu H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 024501 (in Chinese) [杨建华, 朱华 2013 物理学报 **62** 024501]
- [7] Zhou Y, Ionescu C, Machado J A T 2015 *Nonlinear Dyn.* **80** 1661
- [8] Wang Z H, Hu H Y 2009 *Sci. China G: Phys. Mech. Astron.* **39** 1495 (in Chinese) [王在华, 胡海岩 2009 中国科学 G 辑: 物理学力学天文学 **39** 1495]
- [9] Wang Z H, Du M L 2011 *Shock Vib.* **18** 257
- [10] Shen Y J, Wei P, Yang S P 2014 *Nonlinear Dyn.* **77** 1629
- [11] Shen Y J, Yang S P, Xing H J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 150503 (in Chinese) [申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 150503]
- [12] Shen Y J, Yang S P, Xing H J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110505 (in Chinese) [申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 110505]
- [13] Shen Y J, Yang S P, Xing H J, Gao G S 2012 *Commun. Nonlinear Sci.* **17** 3092
- [14] Shen Y J, Yang S P, Xing H J, Ma H X 2012 *Int. J. Nonlin. Mech.* **47** 975
- [15] Li C P, Deng W H 2007 *Appl. Math. Comput.* **187** 777
- [16] Deng W H, Li C P 2008 *Phys. Lett.* **372** 401
- [17] Li Q D, Chen S, Zhou P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010502
- [18] Chen L C, Hu F, Zhu W Q 2013 *Fract. Calc. Appl. Anal.* **05** 189
- [19] Wahi P, Chatterjee A 2004 *Nonlinear Dyn.* **38** 3
- [20] Yin H, Chen N 2012 *Chin. J. Comput. Mech.* **29** 966 (in Chinese) [银花, 陈宁 2012 计算力学学报 **29** 966]
- [21] Xu Y, Li Y G, Liu D 2013 *Nonlinear Dyn.* **74** 745
- [22] Zhang R X, Yang S P 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3295
- [23] Zhang R R, Xu W, Yang G D 2015 *Chin. Phys. B* **24** 020204
- [24] Hale J K, Lunel S M V 1993 *Introduction to Functional Differential Equations* (New York: Springer-Verlag) p6
- [25] Hu H Y, Wang Z H 2002 *Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback* (Berlin: Springer) p213
- [26] Wang Z H, Hu H Y 2000 *J. Sound Vib.* **233** 215
- [27] Wang H L, Hu H Y 2003 *Nonlinear Dyn.* **33** 379
- [28] Shi M, Wang Z H 2011 *Automatica* **47** 2001
- [29] Babakhani A, Baleanu D, Khanbabaie R 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 721
- [30] Çelik V, Demir Y 2014 *Signal Image Video P.* **8** 65
- [31] Petras I 2011 *Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation* (Beijing: Higher Education Press) p19

Dynamical analysis of Duffing oscillator with fractional-order feedback with time delay*

Wen Shao-Fang¹⁾ Shen Yong-Jun^{2)†} Yang Shao-Pu²⁾

1) (Transportation Institute, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

2) (Department of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China)

(Received 17 December 2015; revised manuscript received 8 January 2016)

Abstract

With increasingly strict requirements for control speed and system performance, the unavoidable time delay becomes a serious problem. Fractional-order feedback is constantly adopted in control engineering due to its advantages, such as robustness, strong de-noising ability and better control performance. In this paper, the dynamical characteristics of an autonomous Duffing oscillator under fractional-order feedback coupling with time delay are investigated. At first, the first-order approximate analytical solution is obtained by the averaging method. The equivalent stiffness and equivalent damping coefficients are defined by the feedback coefficient, fractional order and time delay. It is found that the fractional-order feedback coupling with time delay has the functions of both delayed velocity feedback and delayed displacement feedback simultaneously. Then, the comparison between the analytical solution and the numerical one verifies the correctness and satisfactory precision of the approximately analytical solution under three parameter conditions respectively. The effects of the feedback coefficient, fractional order and nonlinear stiffness coefficient on the complex dynamical behaviors are analyzed, including the locations of bifurcation points, the stabilities of the periodic solutions, the existence ranges of the periodic solutions, the stability of zero solution and the stability switch times. It is found that the increase of fractional order could make the delay-amplitude curves of periodic solutions shift rightwards, but the stabilities of the periodic solutions and the stability switch times of zero solution cannot be changed. The decrease of the feedback coefficient makes the amplitudes and ranges of the periodic solutions become larger, and induces the stability switch times of zero solution to decrease, but the stabilities of the periodic solutions keep unchanged. The sign of the nonlinear stiffness coefficient determines the stabilities and the bending directions of delay-amplitude curves of periodic solutions, but the bifurcation points, the stability of zero solution and the stability switch times are not changed. It could be concluded that the primary system parameters have important influences on the dynamical behavior of Duffing oscillator, and the results are very helpful to design, analyze or control this kind of system. The analysis procedure and conclusions could provide a reference for the study on the similar fractional-order dynamic systems with time delays.

Keywords: fractional-order derivative, Duffing oscillator, time delay, averaging method

PACS: 45.10.Hj, 02.30.Ks

DOI: [10.7498/aps.65.094502](https://doi.org/10.7498/aps.65.094502)

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11372198), the Cultivation plan for Innovation Team and Leading Talent in Colleges and Universities of Hebei Province, China (Grant No. LJRC018), the Program for Advanced Talent in the Universities of Hebei Province, China (Grant No. GCC2014053), and the Program for Advanced Talent in Hebei Province, China (Grant No. A201401001).

† Corresponding author. E-mail: shenyongjun@126.com