

相位型三头薛定谔猫态的量子统计属性

林惇庆 朱泽群 王祖俭 徐学翔

Quantum statistical properties of phase-type three-headed Schrodinger cat state

Lin Dun-Qing Zhu Ze-Qun Wang Zu-Jian Xu Xue-Xiang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, **66**, 104201 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.104201

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.104201>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I10>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于 von Neumann 熵的双路径纠缠量子微波信号生成质量评估方法

A method of evaluating the quality of dual-path entangled quantum microwave signal generated based on von Neumann entropy

物理学报.2016, 65(11): 114204 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.114204>

利用破坏对称性的超导体人造原子制备 χ 型四比特纠缠态

The χ -type four-particle entangled state generated by using superconducting artificial atoms with broken symmetry

物理学报.2015, 64(18): 184207 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.184207>

腔光力学系统中的量子测量

Quantum measurement with cavity optomechanical systems

物理学报.2015, 64(16): 164211 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.164211>

结构库中二能级原子与自发辐射场间的纠缠演化

Evolution of entanglement between a two-level atom and spontaneous emission field in structured reservoir

物理学报.2014, 63(12): 124201 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.124201>

飞秒脉冲正交位相压缩光的产生

Generation of femtosecond pulsed quadrature phase squeezed light

物理学报.2013, 62(16): 164206 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.62.164206>

相位型三头薛定谔猫态的量子统计属性*

林惇庆¹⁾ 朱泽群¹⁾ 王祖俭¹⁾ 徐学翔^{1)2)†}

1) (江西师范大学物理与通信电子学院, 南昌 330022)

2) (江西师范大学, 量子科学与技术中心, 南昌 330022)

(2016年12月25日收到; 2017年3月8日收到修改稿)

本文详细研究了一种相位型三头薛定谔猫态的一些量子统计属性, 包括光子数分布、平均光子数、亚泊松分布、压缩效应以及Wigner函数等. 我们发现, 三头猫态的Wigner函数都可以出现负值, 与二、四头猫态一样, 说明它们都可以体现出非经典特性. 与二头猫态不同, 三头猫态在一定参数范围内可以呈现亚泊松分布, 这点与四头猫态相类似, 但弱于四头猫态. 另外, 三头猫态和四头猫态都没有压缩属性, 但二头猫态具有压缩属性.

关键词: 薛定谔猫态, 三头猫态, 非经典性, Wigner函数

PACS: 42.50.Dv, 03.65.-w

DOI: 10.7498/aps.66.104201

1 引言

在量子力学中, 态叠加原理是一个最基本的原理, 也是量子态的不同表象的理论基础^[1,2]. 理论上可以将一些已有的或成熟的量子态通过叠加, 构造出不同类型的新量子态, 以满足工程和技术需要^[3-5]. 国内外科研人员对量子态叠加开展了大量的理论和实验的研究, 特别是近几十年来, 薛定谔猫态引起了人们的广泛关注和极大兴趣. 因为薛定谔猫态光场, 就是指由若干个截然不同的、并且在宏观上完全可以分辨的量子光场态的线性叠加所组成的新的叠加态光场^[6].

根据所参与叠加的量子态的幅度和相位的不同, 可将薛定谔猫态分为幅度型薛定谔猫态(光场)、相位型薛定谔猫态(光场)以及幅度-相位混合型薛定谔猫态(光场). 同时, 根据所参与叠加的量子态的数目多少, 可将薛定谔猫态区分为多少头猫态. 众所周知, 相干态是量子光学领域中的一种典型量子态^[7]. 叠加不同相干态, 已经成为研究大

量基本问题(如宏观叠加态的退相干)的重要工具. 比如, 最早“猫态”(2HCS)的概念, 来自量子力学的奠基人之一薛定谔在1935年提出的一个著名的“佯谬”, 即箱子里面的一只猫不是死的也不是活的, 而是同时处于死和活的状态. 这种薛定谔猫态可由两个相位相差 π 的相干态叠加而成, 即 $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$, 我们可以称之为相位型的二头猫态, 这种量子态在量子信息技术中得到了广泛应用^[8].

近几年, 有些研究已将这种量子叠加延伸到包含更多数目的相干态叠加. 实际上, “薛定谔猫态”在宏观世界是不存在的, 然而在微观世界科学家们可以用光子或者原子来制备这些“猫态”. Yukawa等^[9]提出了一种实验方案, 成功地产生了三种光子数态的叠加, 同时也考虑了两种和三种不同相位的相干态的叠加情况. Vlastakis等^[10]利用腔场电动力学成功实现了由高达四种不同相位的相干态的叠加而成的量子态. 再比如, Raimond等^[11]制备了形如 $(|4\rangle + |4i\rangle + |3e^{i\frac{5\pi}{4}}\rangle + |0\rangle)/2$ 的量子态.

实际上, 不同的叠加量子态表现出不同的干涉

* 国家自然科学基金(批准号: 11665013)、江西省高等学校教学改革研究课题(批准号: JXJG-16-2-2)和江西师范大学团队高原计划项目资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xuxuexiang@jxnu.edu.cn

性和非经典性. 最近, Lee 等^[12]研究了由四种不同相干态叠加而成的四头猫态 $|\alpha\rangle + |i\alpha\rangle + |-\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle$, 并应用于进行量子相位估计. 他们展示了该量子态的非经典性特点, 可以提高相位估计的分辨率. 然而, 对于三头猫态的研究, 尽管有文献提及甚至实验实现, 但都没给出详细的理论研究. 基于这些原因, 我们拟对一种相位型三头猫态的量子统计属性进行详细的理论研究, 并与相干态、二头猫态和四头猫态进行对比分析.

本文首先定义描述三头猫态光场的量子态矢, 给出其密度算符和归一化系数; 接着研究其量子统计属性, 包括光子数分布、平均光子数和亚泊松分布以及压缩特点等; 特别研究了该量子态的 Wigner 函数及其负部体积; 最后进行简单的总结.

2 三头猫态

考虑由三个相位差为 $\frac{2\pi}{3}$ 的相干态叠加所得的形式为

$$|\psi_{3\text{HCS}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}(|\alpha\rangle + |\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\rangle + |\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}\rangle) \quad (1)$$

的量子态, 这里 N 为归一化系数, 复数 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, 其幅度 $|\alpha| \neq 0$, 辐角主值 $\arg \alpha = \theta$ 可以任取, 注意 $\alpha + \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} + \alpha e^{i\frac{4\pi}{3}} = 0$. 由于参与叠加的三个相干态的“幅度”相同而“相位”不同, 因此我们将其命名为相位型三头薛定谔猫态. 很显然, 其共轭可表示为

$$\langle\psi_{3\text{HCS}}| = \frac{1}{\sqrt{N}}(\langle\alpha| + \langle\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}| + \langle\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}|), \quad (2)$$

其密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_{3\text{HCS}} = & \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{13} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{23} \\ & + \rho_{31} + \rho_{32} + \rho_{33}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_{11} = & \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{N}, \quad \rho_{12} = \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}|}{N}, \\ \rho_{13} = & \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}|}{N}, \\ \rho_{21} = & \frac{|\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\rangle\langle\alpha|}{N}, \quad \rho_{22} = \frac{|\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\rangle\langle\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}|}{N}, \\ \rho_{23} = & \frac{|\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}\rangle\langle\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}|}{N}, \\ \rho_{31} = & \frac{|\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}\rangle\langle\alpha|}{N}, \quad \rho_{32} = \frac{|\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}\rangle\langle\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}}|}{N}, \end{aligned}$$

$$\rho_{33} = \frac{|\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}\rangle\langle\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}}|}{N}. \quad (4)$$

由于 $\text{Tr}(\rho_{3\text{HCS}}) = 1$, 根据相干态的内积关系

$$\langle z_1 | z_2 \rangle = \exp\left(-\frac{|z_1|^2}{2} - \frac{|z_2|^2}{2} + z_1^* z_2\right), \quad (5)$$

可得归一化系数为

$$N = 3 + 3e^{-|\alpha|^2(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})} + 3e^{-|\alpha|^2(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})}. \quad (6)$$

接下来, 我们对相干态、二头猫态和四头猫态, 分析研究三头猫态的量子统计属性. 附录中给出了二头猫态和四头猫态的一些量子属性的解析表达式.

3 量子统计属性

3.1 光子数分布

相干态 $|\alpha\rangle$ 的光子数分布 $P^{(1)}(n) = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n} / n!$, 含每一种光子数成分. 二头猫态分布满足 $P^{(2)}(n) = \frac{4e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{N_2 n!} \delta_{n,2k}$, 只含偶数的光子成分. 对于三头猫态, 其光子数分布函数可定义为 $P(n) = |\langle n | \psi_{3\text{HCS}} \rangle|^2$, 利用 (1) 式和相干态的粒子数表象展开公式 $\langle n | \alpha \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n / \sqrt{n!}$ 可得,

$$P^{(3)}(n) = \frac{9e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{N_4 n!} \delta_{n,3k}, \quad (7)$$

这里 $\delta_{n,3k}$ (k 为非负整数) 为 Kronecher 符号, 很显然, 该三头猫态只含是 3 的整数倍的光子成分, 且与 θ 无关. 同样, 四头猫态只含是 4 的整数倍的光子成分, 即分布满足 $P^{(4)}(n) = \frac{16e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{N n!} \delta_{n,4k}$.

3.2 平均光子数

平均光子数定义为 $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$. 我们知道, 相干态 $|\alpha\rangle$ 的平均光子数 $\langle n \rangle^{(1)} = |\alpha|^2$. 参考附录中三头猫态期望值 $\langle a^{\dagger k} a^k \rangle$ 的一般表达式, 通过计算得到三头猫态的平均光子数为

$$\begin{aligned} \langle n \rangle^{(3)} = & \frac{|\alpha|^2}{N} \left(3 + 3e^{-i\frac{2\pi}{3} - |\alpha|^2(1-e^{-i\frac{2\pi}{3}})} \right. \\ & \left. + 3e^{i\frac{2\pi}{3} - |\alpha|^2(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

另外, 二头猫态和四头猫态的平均光子数的表达式见附录.

图 1 给出了相干态、二头猫态、三头猫态和四头猫态的平均光子数 $\langle n \rangle$ 随 $|\alpha|$ 的变化情形. 结果

发现, 当幅度 $|\alpha| \in [0, 1.5]$ 的情况下, 相干态、二头猫态、三头猫态和四头猫态的平均光子数依次减小; 而当 $|\alpha| \in [1.5, 2.2]$ 的情况下, 相干态、二头猫态、三头猫态和四头猫态的平均光子数依次增大. 对于大幅度 $|\alpha|$ 的情况下, 这几种量子态的平均光子数几乎是相等的.

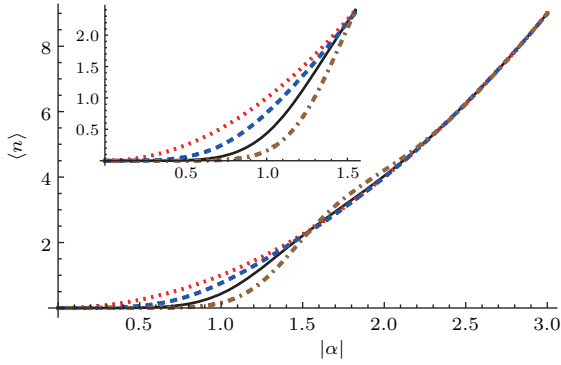


图1 相干态(点线)、二头猫态(划线)、三头猫态(实线)和四头猫态(点划线)的平均光子数 $\langle n \rangle$ 随 $|\alpha|$ 的变化
Fig. 1. Average photon numbers as the function of the amplitude $|\alpha|$ for CS (dotted line), 2HCS (dashed line), 3HCS (solid line) and 4HCS (dot-dashed line).

3.3 亚泊松统计

光场的非经典性可以通过观察其是否具有亚泊松分布的特点来判断. 亚泊松分布的特点可以借助 Mandel 提出的 Q_M 参数^[13] 来表征, 其定义为

$$Q_M = \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle a^{\dagger} a \rangle^2} - \langle a^{\dagger} a \rangle, \quad (9)$$

该参数反映了所考虑的光场与具有泊松分布特征的相干态光场光子数分布偏离情况. 当 $Q_M = 0$ 时, 光场为泊松分布, 而当 $Q_M > 0$ (或 $Q_M < 0$) 时, 则称光场具有超 (或亚) 泊松分布. 对于相干态, 易知 $Q_M = 0$, 这也表明相干态具有泊松统计分布的特点.

在图2给出了二头猫态、三头猫态以及四头猫态的 Q_M 参数随 $|\alpha|$ 变化的图形. 从图2(a)可见三头猫态 Q_M 参数的负值部分出现在一个特殊的区域范围, 即 $|\alpha| \in [1.77, 2.55]$, 也就是说, 当在该范围取参数, 三头猫态呈现亚泊松统计的非经典特点. 而且, 最小的 Q_M 值大约为 -0.05 , 当 $|\alpha|$ 大约取 1.95 时. 二头猫态则不同, 因为二头猫态对于任何的 $|\alpha|$, 都不能出现亚泊松分布的特点, 见图2(b). 但与四头猫态相对比, 似乎具有类似的结论, 但四头猫态最小的 Q_M 值大约为 -0.225 , 当 $|\alpha|$ 大约取 2 时, 见图2(c).

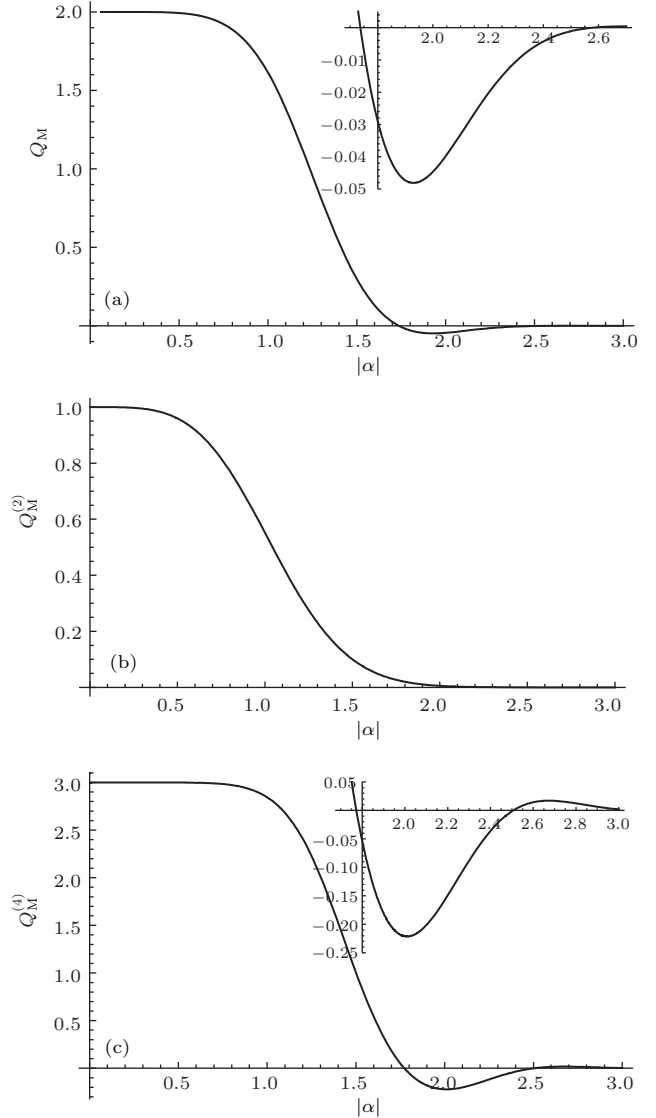


图2 Q_M 参数随 $|\alpha|$ 的变化 (a) 三头猫态; (b) 二头猫态; (c) 四头猫态
Fig. 2. Mandel Q parameter as a function of $|\alpha|$ for (a) 3HCS, (b) 2HCS, (c) 4HCS.

3.4 正交压缩效应

接下来, 我们研究另一种非经典效应, 即某正交分量的压缩^[14]. 定义正交算符 $X = (a + a^{\dagger})/\sqrt{2}$ 和 $P = (a - a^{\dagger})/(\sqrt{2}i)$, 它们所对应的方差可以分别表达为

$$\Delta X^2 = \langle a^{\dagger} a \rangle - \langle a^{\dagger} \rangle \langle a \rangle + \frac{1}{2} + \frac{\langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^{\dagger} \rangle^2}{2} + \frac{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}{2} \quad (10)$$

和

$$\Delta P^2 = \langle a^{\dagger} a \rangle - \langle a^{\dagger} \rangle \langle a \rangle + \frac{1}{2} - \frac{\langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle a^{\dagger} \rangle^2}{2} - \frac{\langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2}{2}, \quad (11)$$

且满足不确定性关系 $\Delta X^2 \Delta P^2 \geq 1/4$. 对于真空态(或相干态), $\Delta X^2|_{|0\rangle,|\alpha\rangle} = \Delta P^2|_{|0\rangle,|\alpha\rangle} = 1/2$. 如果某个量子态的 ΔX^2 和 ΔP^2 二者之一小于 $1/2$, 那么该量子态就是压缩态. 另外, 我们可以通过 $dB[X] = 10 \log_{10}(\Delta X^2/\Delta X^2|_{|0\rangle})$ 和 $dB[P] = 10 \log_{10}(\Delta P^2/\Delta P^2|_{|0\rangle})$, 用分贝(dB)的形式来描述量子压缩特点. 也就是说, 如果 $dB[X]$ 和 $dB[P]$ 二者之一小于 0, 那么该量子态就是压缩态.

经过计算, 我们发现所考虑的三头猫态的

$$\begin{aligned}
 (\Delta X^2)^{(3)} &= (\Delta P^2)^{(3)} \\
 &= \Xi - 2\Xi e^{i\frac{\pi}{3}}|\alpha|^2 + \Xi(1 + 2|\alpha|^2)e^{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}|\alpha|^2} \\
 &\quad + \Xi(1 + 2ie^{i\frac{\pi}{6}}|\alpha|^2)e^{i\sqrt{3}|\alpha|^2}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

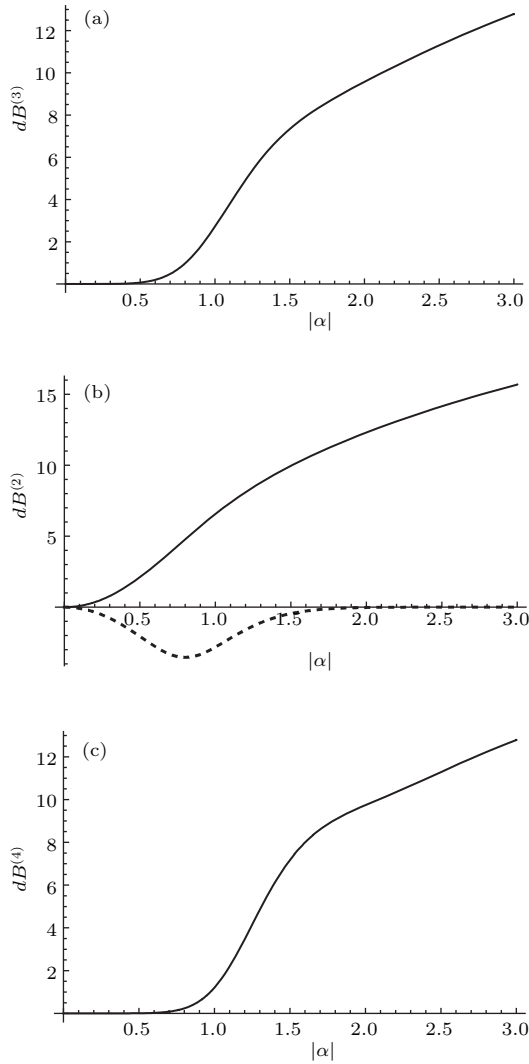


图3 压缩 dB 参数随 $|\alpha|$ 的变化 (a) 三头猫态; (b) 二头猫态; (c) 四头猫态.

Fig. 3. Squeezed dB parameters as a function of $|\alpha|$ for (a) 3HCS, (b) 2HCS, (c) 4HCS.

这里 $\Xi^{-1} = 2(1 + e^{i\sqrt{3}|\alpha|^2} + e^{(2+(-1)^{2/3})|\alpha|^2})$. 结果表明, 三头猫态的正交成分方差总是相等的, 且总是大于或等于 $1/2$, 如图 3(a) 显示三头猫态的 $dB[X]$ 和 $dB[P]$ 都不可能小于 0. 这意味着这种三头猫态不是压缩态, 而且相比相干态或真空态, 其涨落有所增大. 另外, 随着 $|\alpha|$ 的增大, 涨落也有所增强. 无论如何选取参数, 三头猫态不会呈现压缩效应. 但是二头猫态在一定参数区间是具有压缩效应的, 如图 3(b) 所示, 而且当 $|\alpha| \sim 0.8$ 时, 压缩最强; 当 $|\alpha| \gtrsim 2$ 时, 压缩效应也将会消失. 我们还发现, 四头猫态也具有三头猫态类似的属性特点, 如图 3(c) 所示, 说明四头猫态也不是压缩态.

4 Wigner 函数

Wigner 函数是量子相空间理论的重要组成部分 [15]. 由于其非正定性特点, 故不能成为一个真正意义上的概率分布函数. 通常, 我们可以根据量子态的 Wigner 负值来判断其非经典性特点 [16,17].

4.1 Wigner 函数的推导

我们首先推导出其 Wigner 函数的解析表达式. 根据公式 [18]

$$W(z) = \frac{2}{\pi} \langle D(z)(-1)^{a^\dagger a} D^\dagger(z) \rangle, \quad (13)$$

这里需要说明的是, $(-1)^{a^\dagger a}$ 为奇偶宇称算符, $D(z) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ 为平移算符, 且 $z = (x + ip)/\sqrt{2}$.

利用公式 $e^{\lambda a^\dagger a} =: e^{(e^\lambda - 1)a^\dagger a} :$, 我们得到 $(-1)^{a^\dagger a} = e^{i\pi a^\dagger a} =: e^{-2a^\dagger a} :$. 这里 $: \dots :$ 表示正规排序, 也就是说正规排序后, 产生算符 a^\dagger 总在湮灭算符 a 的左边. 再利用平移变换关系 $D(z)aD^\dagger(z) = a - z$ 和 $D(z)a^\dagger D^\dagger(z) = a^\dagger - z^*$, 可得

$$\begin{aligned}
 &D(z)(-1)^{a^\dagger a} D^\dagger(z) \\
 &= : D(z) e^{-2a^\dagger a} D^\dagger(z) : \\
 &= : e^{-2(a^\dagger - z^*)(a - z)} :, \quad (14)
 \end{aligned}$$

这里平移算符可以直接进入正规排序. 这样, 我们很容易得到三头猫态的 Wigner 函数为

$$\begin{aligned}
 W^{(3)}(z) &= W_{11} + W_{12} + W_{13} + W_{21} + W_{22} + W_{23} \\
 &\quad + W_{31} + W_{32} + W_{33}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 W_{11} &= \frac{2}{\pi N} e^{-2(\alpha^* - z^*)(\alpha - z)}, \\
 W_{12} &= \frac{2e^{-|\alpha|^2(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}})}}{\pi N} e^{-2(\alpha^* e^{-i\frac{2\pi}{3}} - z^*)(\alpha - z)}, \\
 W_{13} &= \frac{2e^{-|\alpha|^2(1 - e^{-i\frac{4\pi}{3}})}}{\pi N} e^{-2(\alpha^* e^{-i\frac{4\pi}{3}} - z^*)(\alpha - z)}, \\
 W_{21} &= \frac{2e^{-|\alpha|^2(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})}}{\pi N} e^{-2(\alpha^* - z^*)(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} - z)}, \\
 W_{22} &= \frac{2}{\pi N} e^{-2(\alpha^* e^{-i\frac{2\pi}{3}} - z^*)(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} - z)}, \\
 W_{23} &= \frac{2e^{-|\alpha|^2(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})}}{\pi N} e^{-2(\alpha^* e^{-i\frac{4\pi}{3}} - z^*)(\alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} - z)}, \\
 W_{31} &= \frac{2e^{-|\alpha|^2(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}})}}{\pi N} e^{-2(\alpha^* - z^*)(\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}} - z)}, \\
 W_{32} &= \frac{2e^{-|\alpha|^2(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})}}{\pi N} e^{-2(\alpha^* e^{-i\frac{2\pi}{3}} - z^*)(\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}} - z)}, \\
 W_{33} &= \frac{2}{\pi N} e^{-2(\alpha^* e^{-i\frac{4\pi}{3}} - z^*)(\alpha e^{i\frac{4\pi}{3}} - z)}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

利用(15)式,图4给出了几种情形下三头猫态的Wigner函数.从图中可以发现,对于较小幅度的三头猫态,其负部区域不明显(如图4(a));随着幅度 $|\alpha|$ 的增大,发现负部区域数量增多了.另外,我们通过数值分析发现,对于 $|\alpha|$ 相同的三头猫态,其分布图形会随着 θ 的变化而发生旋转,但总体形状没有改变.

为了更清楚地展示三头猫态与相干态、二头猫态及四头猫态Wigner函数的区别,我们绘制了相同情形下($|\alpha| = 1, \theta = 0$)这几种量子态的Wigner函数图形.图5(a)说明相干态的Wigner函数无负部区域,其分布中心与 α 有关;图5(b)表明二头猫态出现负部区域,且具有 π 旋转对称特点,图5(c)对应三头猫态,出现了负部区域,具有 $2\pi/3$ 旋转对称的特点;图5(d)对应四头猫态,出现负部区域,且具有 $\pi/2$ 旋转对称特点.

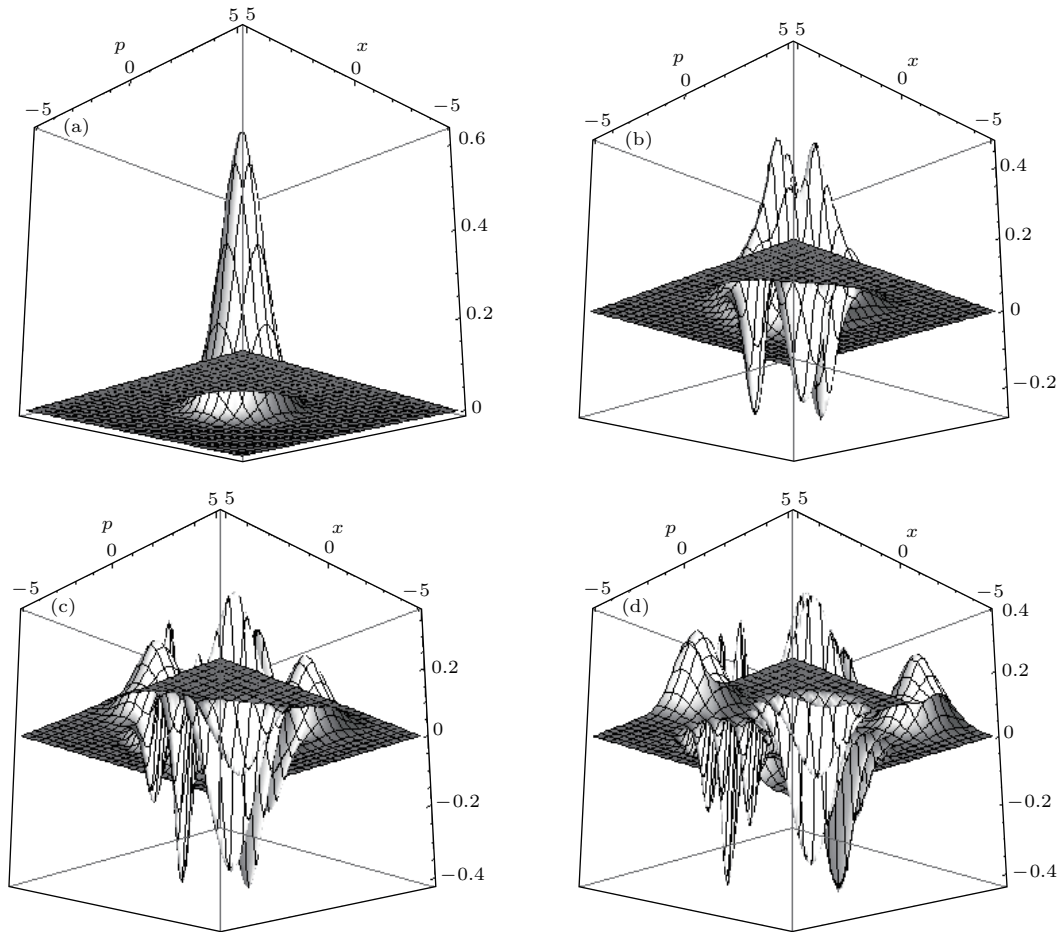


图4 三头猫态的Wigner函数图($\theta = 0$) (a) $|\alpha| = 0.2$; (b) $|\alpha| = 1$; (c) $|\alpha| = 2$; (d) $|\alpha| = 3$

Fig. 4. Wigner functions of 3HCS with ($\theta = 0$), and (a) $|\alpha| = 0.2$, (b) $|\alpha| = 1$, (c) $|\alpha| = 2$, (d) $|\alpha| = 3$.

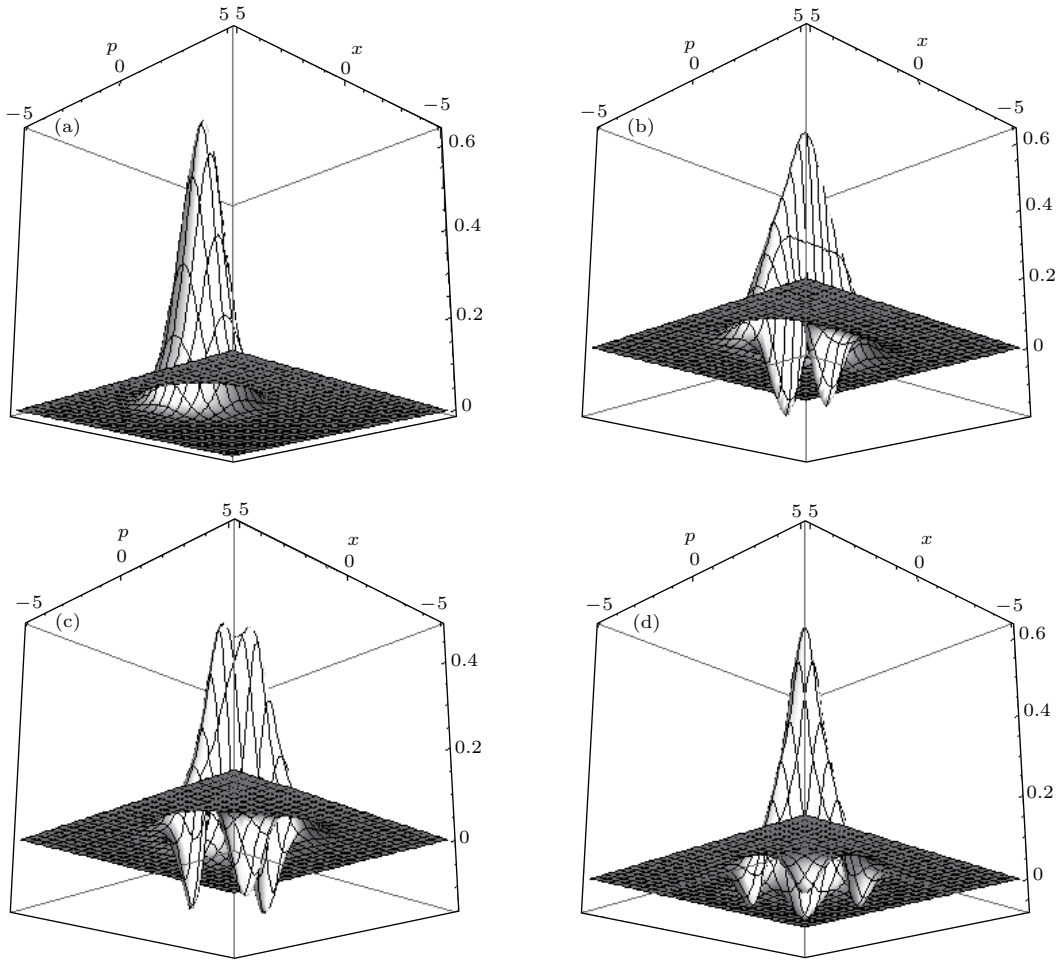


图5 几种量子态的 Wigner 函数图 ($|\alpha| = 1, \theta = 0$) (a) 相干态; (b) 二头猫态; (c) 三头猫态; (d) 四头猫态
Fig. 5. Wigner functions with $|\alpha| = 1, \theta = 0$ for (a) CS, (b) 2HCS, (c) 3HCS, (d) 4HCS.

4.2 Wigner 函数的负部体积

通过前面的研究发现, 相干态没有出现负值, 但二头、三头和四头猫态都会出现了负值, 而且随着 $|\alpha|$ 的增大, 分布更复杂, 波包形状发生振荡, 负部体积更明显. Wigner 函数的负部体积 δ 是反映光场非经典性的一个重要标志^[19], 其定义如下:

$$\delta = \frac{1}{2} \left[\int |W(z)| d^2z - 1 \right], \quad (17)$$

只要量子态的 Wigner 函数已知, 通过数值积分就可以得到负部区域体积. 根据定义, 相干态的 δ 都为零.

图6给出了二头、三头和四头猫态的 Wigner 函数的负部体积 δ 在一定范围内随 $|\alpha|$ 的变化图形, 这里需要说明的是, δ 的大小与 θ 的选取是无关的. 我们发现, 在小幅度范围, 这三种量子态的 δ 几乎为零; 但随着 $|\alpha|$ 的增大, 负部体积 δ 逐渐增大, 直至趋于相应的上限值 ($\delta^{(2)} \sim 0.3, \delta^{(3)} \sim 0.6,$

$\delta^{(4)} \sim 0.8$).

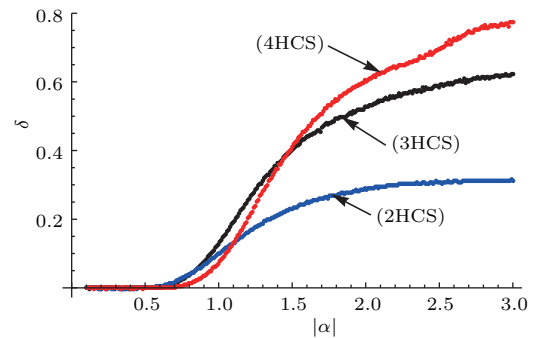


图6 二头猫态、三头猫态和四头猫态的负部体积 δ 随 $|\alpha|$ 的变化

Fig. 6. Negative volume of the Wigner functions for 2HCS, 3HCS and 4HCS as a function of $|\alpha|$.

5 讨论和结论

我们研究了一种相位型三头薛定谔猫态的量子统计属性. 从三头猫态的态矢出发, 给出其密度

算符并进行了归一化, 然后详细研究了其一些量子统计属性, 这些属性包括光子数分布、平均光子数、亚泊松分布、压缩效应以及 Wigner 函数的负部体积特点. 为反映出其非经典性质, 重要结论总结如下: 1) 三头猫态不是压缩态, 没有展现出压缩效应; 2) 在适当选取参数的情况下, 可以表现出亚泊松分布的特点; 3) 三头猫态的 Wigner 函数会出现负值特点.

另外, 我们还分析了三头猫态与相干态、二头猫态以及四头猫态的量子统计属性的异同. 相比二头猫态, 三头猫态无压缩但呈现泊松分布特点; 相比四头猫态, 三头猫态具有类似的非经典性特点, 但相对更弱些. 前面已经提到, 二头猫态和四头猫态在量子精密测量和量子信息处理中都得到了相应的应用. 作为介于二者之间的三头猫态, 也将发挥其作用. 例如, 利用三头猫态作为信号源, 通过分束器或非线性介质, 可以产生相应的纠缠源, 应用于量子信息技术^[20-22].

附录 A 三头猫态的统计期望值

给出 $\langle a^{\dagger k} a^l \rangle = \text{Tr}(a^{\dagger k} a^l \rho_{3\text{HCS}})$ 的一般表达式如下:

$$\begin{aligned} & \langle a^{\dagger k} a^l \rangle^{(3)} \\ &= \frac{\alpha^{*k} \alpha^l}{N} [1 + e^{-i\frac{2(k-l)\pi}{3}} + e^{-i\frac{4(k-l)\pi}{3}} \\ &+ e^{-i\frac{2k\pi}{3} - |\alpha|^2(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}})} + e^{i\frac{2l\pi}{3} - |\alpha|^2(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})} \\ &+ e^{-i\frac{4k\pi}{3} - |\alpha|^2(1 - e^{-i\frac{4\pi}{3}})} + e^{i\frac{4l\pi}{3} - |\alpha|^2(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}})} \\ &+ e^{-i\frac{(4k-2l)\pi}{3} - |\alpha|^2(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}})} \\ &+ e^{-i\frac{(2k-4l)\pi}{3} - |\alpha|^2(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})]. \end{aligned}$$

这样, 我们可以通过取不同的 k 和 l , 得到正文中所需的各种期望值.

附录 B 相位型二头猫态的定义及其属性

除了常见的相干态 $|\alpha\rangle$ 以及正文中的三头猫态, 这里定义一种相位型二头猫态

$$|\psi_{2\text{HCS}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_2}}(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle),$$

这里 $N_2 = 2 + 2e^{-2|\alpha|^2}$. 其统计期望值

$$\begin{aligned} \langle a^{\dagger k} a^l \rangle^{(2)} &= \frac{\alpha^{*k} \alpha^l}{N_2} [1 + (-1)^k e^{-2|\alpha|^2} \\ &+ (-1)^l e^{-2|\alpha|^2} + (-1)^k (-1)^l], \end{aligned}$$

由此可得 $\langle a^{\dagger} a \rangle^{(2)} = |\alpha|^2 \tanh |\alpha|^2$, Q_M 参数为 $Q_M^{(2)} = 2|\alpha|^2 / \sinh(2|\alpha|^2)$, 以及正交分量方差:

$$\begin{aligned} (\Delta X^2)^{(2)} &= \frac{1}{2}(1 + 2\text{Re}\alpha^2 + 2|\alpha|^2 \tanh |\alpha|^2), \\ (\Delta P^2)^{(2)} &= \frac{1}{2}(1 - 2\text{Re}\alpha^2 + 2|\alpha|^2 \tanh |\alpha|^2). \end{aligned}$$

另外, 二头猫态的 Wigner 函数为

$$W^{(2)}(z) = W_{11}^{(2)} + W_{12}^{(2)} + W_{21}^{(2)} + W_{22}^{(2)},$$

其中

$$\begin{aligned} W_{11}^{(2)} &= \frac{2}{\pi N_2} e^{-2(\alpha^* - z^*)(\alpha - z)}, \\ W_{12}^{(2)} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi N_2} e^{-2(-\alpha^* - z^*)(\alpha - z)}, \\ W_{21}^{(2)} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi N_2} e^{-2(\alpha^* - z^*)(-\alpha - z)}, \\ W_{22}^{(2)} &= \frac{2}{\pi N_2} e^{-2(-\alpha^* - z^*)(-\alpha - z)}. \end{aligned}$$

附录 C 相位型四头猫态的定义及其属性

定义一种相位型四头猫态

$$|\psi_{4\text{HCS}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_4}}(|\alpha\rangle + |i\alpha\rangle + |-\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle),$$

这里 $N_4 = 4(1 + e^{-2|\alpha|^2} + e^{-(1+i)|\alpha|^2} + e^{-(1-i)|\alpha|^2})$. 其统计期望值

$$\begin{aligned} \langle a^{\dagger k} a^l \rangle^{(4)} &= \frac{\alpha^{*k} \alpha^l}{N_4} [1 + (-i)^k e^{-(1+i)|\alpha|^2} \\ &+ (-1)^k e^{-2|\alpha|^2} + (i)^k e^{-(1-i)|\alpha|^2} \\ &+ (i)^l e^{-(1-i)|\alpha|^2} + (-i)^k (i)^l \\ &+ (-1)^k (i)^l e^{-(1+i)|\alpha|^2} + (i)^k (i)^l e^{-2|\alpha|^2} \\ &+ (-1)^l e^{-2|\alpha|^2} + (-i)^k (-1)^l e^{-(1-i)|\alpha|^2} \\ &+ (-1)^k (-1)^l + (i)^k (-1)^l e^{-(1+i)|\alpha|^2} \\ &+ (-i)^l e^{-(1+i)|\alpha|^2} + (-i)^k (-i)^l e^{-2|\alpha|^2} \\ &+ (-1)^k (-i)^l e^{-(1-i)|\alpha|^2} + (i)^k (-i)^l]. \end{aligned}$$

由此可得

$$\langle a^{\dagger} a \rangle^{(4)} = \frac{2\theta|\alpha|^2 e^{(1+i)|\alpha|^2}}{(e^{|\alpha|^2} + e^{i|\alpha|^2})(1 + e^{(1+i)|\alpha|^2})},$$

Q_M 参数

$$Q_M^{(4)} = \frac{2|\alpha|^2 \sinh |\alpha|^2 \sin |\alpha|^2}{\Gamma \Theta},$$

以及正交分量方差

$$(\Delta X^2)^{(4)} = (\Delta P^2)^{(4)} = \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{\Gamma} |\alpha|^2,$$

这里 $\Gamma = \cosh |\alpha|^2 + \cos |\alpha|^2$, $\Theta = \sinh |\alpha|^2 - \sin |\alpha|^2$. 其 Wigner 函数为

$$\begin{aligned} W^{(4)}(z) &= W_{11}^{(4)} + W_{12}^{(4)} + W_{13}^{(4)} + W_{14}^{(4)} \\ &+ W_{21}^{(4)} + W_{22}^{(4)} + W_{23}^{(4)} + W_{24}^{(4)} \\ &+ W_{31}^{(4)} + W_{32}^{(4)} + W_{33}^{(4)} + W_{34}^{(4)} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 & + W_{41}^{(4)} + W_{42}^{(4)} + W_{43}^{(4)} + W_{44}^{(4)}, \\
 W_{11}^{(4)} &= \frac{2}{\pi N_4} e^{-2(\alpha^* - z^*)(\alpha - z)}, \\
 W_{12}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1+i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(-i\alpha^* - z^*)(\alpha - z)}, \\
 W_{13}^{(4)} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(-\alpha^* - z^*)(\alpha - z)}, \\
 W_{14}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1-i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(i\alpha^* - z^*)(\alpha - z)}, \\
 W_{21}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1-i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(\alpha^* - z^*)(i\alpha - z)}, \\
 W_{22}^{(4)} &= \frac{2}{\pi N_4} e^{-2(-i\alpha^* - z^*)(i\alpha - z)}, \\
 W_{23}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1+i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(-\alpha^* - z^*)(i\alpha - z)}, \\
 W_{24}^{(4)} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(i\alpha^* - z^*)(i\alpha - z)}, \\
 W_{31}^{(4)} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(\alpha^* - z^*)(-\alpha - z)}, \\
 W_{32}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1-i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(-i\alpha^* - z^*)(-\alpha - z)}, \\
 W_{33}^{(4)} &= \frac{2}{\pi N_4} e^{-2(-\alpha^* - z^*)(-\alpha - z)}, \\
 W_{34}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1+i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(i\alpha^* - z^*)(-\alpha - z)}, \\
 W_{41}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1+i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(\alpha^* - z^*)(-i\alpha - z)}, \\
 W_{42}^{(4)} &= \frac{2e^{-2|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(-i\alpha^* - z^*)(-i\alpha - z)}, \\
 W_{43}^{(4)} &= \frac{2e^{-(1-i)|\alpha|^2}}{\pi N_4} e^{-2(-\alpha^* - z^*)(-i\alpha - z)}, \\
 W_{44}^{(4)} &= \frac{2}{\pi N_4} e^{-2(i\alpha^* - z^*)(-i\alpha - z)}.
 \end{aligned}$$

参考文献

[1] Dirac P A M 1958 *The Principles of Quantum Mechanics (4th Ed.)* (Oxford: Oxford University Press) pp1–22

[2] Zeng J Y 2007 *Quantum Mechanics* (4th Ed.) (Beijing: Science Press) pp52–54 [曾谨言 2007 量子力学 (第四版) (北京: 科学出版社)] pp52–54

[3] Dell’Anno F, de Siena S, Illuminati F 2006 *Phys. Rep.* **428** 53

[4] Kok P, Lovett B W 2010 *Introduction to Optical Quantum Information Processing* (Cambridge: Cambridge University Press) pp183–187

[5] Polkinghorne J C 1985 *The Quantum World* (Princeton: Princeton University Press) p67

[6] John G 2011 *In Search of Schrodinger’s Cat: Quantum Physics and Reality* (Berlin: Random House Publishing Group) pp234

[7] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **131** 2766

[8] Gerry C C, Knight P 2005 *Introductory Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp174–181

[9] Yukawa M, Miyata K, Mizuta T, Yonezawa H, Marek P, Filip R, Furusawa A 2013 *Opt. Express* **21** 5529

[10] Vlastakis B, Kirchmair G, Leghtas Z, Nigg S E, Frunzio L, Girvin S M, Mirrahimi M, Devoret M H, Schoelkopf R J 2013 *Science* **342** 607

[11] Raimond J M, Facchi P, Peaudecerf B, Pascazio S, Sayrin C, Dotsenko I, Gleyzes S, Brune M, Haroche S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 032120

[12] Lee S Y, Lee C W, Nha H, Kaszlikowski D 2015 *J. Opt. Soc. Am. B* **32** 1186

[13] Mandel L 1979 *Opt. Lett.* **4** 205

[14] Walls D F, Milburn G J 1994 *Quantum Optics* (Berlin: Springer-Verlag) pp81–82

[15] Wigner E P 1932 *Phys. Rev.* **40** 749

[16] Xu X X, Yuan H C, Hu L Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4661

[17] Xu X X, Yuan H C 2016 *Phys. Lett. A* **380** 2342

[18] Lutterbach L, Davidovich L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2547

[19] Kenfack A, Zyczkowski K 2004 *J. Opt. B: Quantum Semi-Class. Opt.* **6** 396

[20] Gerry C C, Mimih J 2010 *Contemp. Phys.* **51** 497

[21] Leghtas Z, Kirchmair G, Vlastakis B, Schoelkopf R J, Devoret M H, Mirrahimi M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 120501

[22] Ralph T C, Gilchrist A, Milburn G J, Munro W J, Glancy S 2003 *Phys. Rev. A* **68** 042319

Quantum statistical properties of phase-type three-headed Schrodinger cat state*

Lin Dun-Qing¹⁾ Zhu Ze-Qun¹⁾ Wang Zu-Jian¹⁾ Xu Xue-Xiang^{1)2)†}

1) (College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

2) (Center for Quantum Science and Technology, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

(Received 25 December 2016; revised manuscript received 8 March 2017)

Abstract

Quantum superposition is a fundamental principle of quantum mechanics, which provides a crucial basis to observe phenomena beyond the predictions of classical physics. For example, a quantum entangled state can exhibit stronger correlation than classically possible one. In quantum state engineering, many new quantum states can be obtained from the superposition of many known states.

In recent decades, the superposition of coherent states (CSs) with the same amplitude but two different phases has been a subject of great interest. This superposition state was often called Schrodinger cat state (here, we also name it 2-headed cat state (2HCS)), which becomes an important tool to study a lot of fundamental issues. Surprisingly, some studies have extended the quantum superposition to involving more than two component coherent states. In order to produce the superposition of three photons, people have considered the superposition of coherent states with three different phases (here, we also name it 3-headed cat state (3HCS)). Furthermore, in microwave cavity quantum electrodynamics of bang-bang quantum Zeno dynamics control, people have proposed the superposition of coherent states with four different phases (here, we also name it 4-headed cat state (4HCS)).

In this paper, we make a detailed investigation on the quantum statistical properties of a phase-type 3HCS. These properties include photon number distribution, average photon number, sub-Poissonian distribution, squeezing effect, and Wigner function, etc. We derive their analytical expressions and make numerical simulations for these properties. The results are compared with the counterparts of the CS, the 2HCS and the 4HCS.

The conclusions are obtained as follows. 1) The CS, the 2HCS, the 3HCS and the 4HCS have k , $2k$, $3k$ and $4k$ photon number components, respectively (k is an integer); 2) small difference in average photon number among these quantum states in small-amplitude range can be observed, while their average photon numbers become almost equal in large-amplitude range; 3) the CS exhibits Poisson distribution, and the 2HCS, the 3HCS and the 4HCS exhibit super-Poisson distributions in most amplitude ranges, however, sub-Poisson distribution can be seen for the 3HCS and the 4HCS in some specific amplitude ranges; 4) except for the 2HCS that may have the squeezing property, no squeezing properties can be found in the CS, the 3HCS and the 4HCS; 5) negative values can exist in the Wigner functions for the 2HCS, the 3HCS and the 4HCS, while it is not found in the CS.

Similar to the 2HCS and 4HCS, the Wigner function of the 3HCS has negative component, which implies its non-classicality. Different from the 2HCS, the 3HCS exhibits sub-Poisson photon number distribution in a certain amplitude range, it is weaker than that of the 4HCS. At the same time, no squeezing is found in the 3 or 4HCS, which is another difference from the 2HCS.

Keywords: Schrodinger cat state, three-headed cat state, nonclassicality, Wigner function

PACS: 42.50.Dv, 03.65.-w

DOI: 10.7498/aps.66.104201

* Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11665013), Research on Teaching Reform of Jiangxi Higher Education, China (Grant No. JXJG-16-2-2) and the Gaoyuan Plan Project of Jiangxi Normal University, China.

† Corresponding author. E-mail: xuxuexiang@jxnu.edu.cn