大尺度有效引力的 $E(2)$ 规范理论模型

魏文叶 申佳音 吴奕暐 杨礼想 薛迅 阮自强

$E(2)$ gauge theory model of effective gravitational theory at large scale

Wei Wen-Ye Shen Jia-Yin Wu Yi-Wei Yang Li-Xiang Xue Xun Yuan Tzu-Chiang

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, **66**, 130301 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.130301
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.130301
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I13

大尺度有效引力的 $E(2)$ 规范理论模型*

魏文叶[1)] 申佳音[1)] 吴奕暐[1)] 杨礼想[1)] 薛迅[1)†] 阮自强[2)]

1) (华东师范大学物理系, 上海 200241)

2) (中央研究院物理研究所, 台北 11529)

(2017 年 2 月 4 日收到; 2017 年 4 月 6 日收到修改稿)

微波背景辐射的低 l 极矩的各向异性可能不能用微波背景辐射静止系 boost 到本动参考系来解释, 我们推断 boost 对称性在宇宙学尺度上缺失, 又由于单纯结合广义相对论和物质结构的标准模型不能解释星系以上尺度的引力现象, 需要引入暗物质和暗能量. 而迄今为止所有寻找暗物质粒子的实验给出的都是否定结果, 暗能量的本质更是一个谜. 因此, 我们假设洛伦兹对称性是从星系以上尺度开始部分破缺, 以非常狭义相对论对称群 $E(2)$ 为例, 用 $E(2)$ 规范理论来构造大尺度有效引力理论, 并分析了此规范理论的自洽性. 从这些讨论中发现, 当物质源即使为普通标量物质时, contortion 也一般非零, 非零 contortion 的存在会贡献一个等效能量动量张量的分布, 它可能对暗物质效应给出至少部分的贡献. 我们从对称性出发修改引力, 有别于其他的修改引力理论.

关键词: $E(2)$ 群, 非常狭义相对论, 有效引力理论, 洛伦兹破缺

PACS: 03.30.+p, 04.20.Cv, 11.15.–q, 11.30.Cp **DOI:** 10.7498/aps.66.130301

1 引 言

广义相对论从建立到现在的一百多年以来, 一直经历着各种检验, 在太阳系范围内弱场近似的检验达到了 10^{-5} 精度的量级. 但是在星系以上的尺度上, 却存在着一些明显偏离广义相对论的天文现象. 例如, 1933 年 Zwicky [1] 按照后发座星系团中的运动星系的可视质量, 推算了其运动速度, 但是计算的结果要低于实际观测的速度. 他认为造成这种现象的原因是可视质量和实际质量不符. 另一个实例是 1980 年有关螺旋星云的旋转星系的观测. 美国天文学家 Rubin [2] 通过测量这个星系可见区域的旋转速度得到了“星系旋转曲线”. 按照广义相对论的预测, 足够远的距离上环绕星系中心天体的平均轨道速度的平方与轨道距离是成反比的, 但是曲线却显示随着距离变大, 旋转速度趋向于一个定值. 这明显违背了理论预测的结果. 在宇宙学尺度上, 宇宙的加速膨胀也说明宇宙学常数具有很小的正值.

目前对于天文观测与广义相对论的偏离的解释比较流行的有两种. 一种是直接修正爱因斯坦引力理论, 比如 2013 年 Shojai 等 [3] 提出的 $f(R)$ 理论; 2005 年 Moffat [4] 提出的标量-张量-矢量引力理论, 2004 年 Bekenstein [5] 提出的相对论性修正的牛顿动力理论, 以及二者的混合, 都可以部分地解释观测数据. 另一种是用暗物质来解释缺失质量 [6−8], 暗能量的存在来解释加速膨胀. 但是到目前为止所有直接寻找暗物质的实验都给出否定结果, 暗物质的微观起源还没有得到证实 [9,10], 暗能量的本质更是晦涩难明. 暗物质现象出现于星系以上一直到宇宙学尺度上, 假设存在暗物质, 则用带正宇宙学常数的广义相对论可以解释大部分现象, 但是暗物质的候选者全部没有找到, 所以将暗物质现象考虑成一种大尺度非局域效应的有效表现也是理解暗物质效应的一种思路. 本文中我们构造修改引力的模

* 国家自然科学基金 (批准号: 11435005) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xxue@phy.ecnu.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

型, 试图通过大尺度效应解释暗物质、暗能量现象, 而不是假设存在微观起源的暗物质、暗能量.

由宇宙学原理知道, 相对于微波背景辐射静止系, 宇宙是均匀各向同性的. 也就是说, 对于宇宙中的任意一点的观测者, 向各个方向进行观测, 会发现在足够远的地方 (约 30 亿光年的数量级), 宇宙的形态大致相同. 但是, 宇宙学原理只是在微波背景辐射静止系中成立. 若一个观测者相对于这个参考系沿着方向 $\boldsymbol{n}$ 高速运动, 那么他将明显看到方向 $\boldsymbol{n}$ 上的微波背景辐射强度更大, 星光也更明亮 [11]. 这就出现了与各向同性的偏离. 宇宙学原理说存在一个宇宙均匀各向同性的宇宙标准参考系, 这个参考系就是微波背景辐射静止系, 在这个参照系中时空度规为 Roberson-Walker 度规的形式, 从宇宙标准参照系到运动的本动参照系的洛伦兹变换不是保度规变换, 宇宙标准系有六个 Killing 矢量, 即为宇宙时空中宇宙时为常数的三维子空间的 Killing 矢量, 具有本动的参考系中宇宙物质分布能动张量也不能保持均匀各向同性的形式, 所以在本动参考系看到的宇宙与宇宙标准系中看到得很不同, 但宇宙的时空几何是惟一的, 不会因参考系的不同而改变, 这就要求宇宙物质分布能动张量与度规张量和 Ricci 曲率张量一样协变.

我们知道微波背景辐射的低 l 极距具有很多反常效应, 二极矩反常现象不仅仅是单极矩的多普勒效应, 还包括像差效应 (其他方向的光子被挤压, 从而向本动方向靠拢) 和强度调制效应 (沿着本动方向的正方向放大, 在本动方向的负方向上减小), 这些效应来自于我们所在的太阳本动系相对微波背景系的运动. 但四极矩反常平面和八级矩反常平面的法矢与偶极方向互不重合, 如果这些反常都是由于观测者的本动而引起, 这就预示着, 仅仅简单地通过对共动参考系到本动参考系做 boost 变换无法解释这些反常. 当然, 宇宙学原理是否严格成立也是可以讨论的, 所以我们在讨论宇宙学物理时, 不妨放弃 boost 不变性来作为一种等效描述 [12−14]. 局域平直区域的物理规律是个经验归纳, 大尺度局域的对称性不一定与小尺度局域的对称性相同, 尤其是在有暗物质、暗能量现象, 仅依靠广义相对论和粒子物理标准模型的物质结构理论不能给予解释的情况下, 大尺度局域的对称性应该重新审视. 而在宇宙尺度上 boost 对称性可能缺失, 一个合理的猜想就是在大尺度以上, 比如星系尺度以上, 局域洛伦兹对称性开始破缺.

实际上, 由于对量子引力理论的探索, 使对洛伦兹对称性破缺进行研究的科学家不在少数. 1997 年以及 1999 年, Coleman 和 Glashow 讨论了用不变矢量描述由于微波背景辐射静止系的存在导致的 boost 不变性的破缺 [15]. 随后 Colladay 和 Kostelecky 建立了标准模型拓展理论框架 (SME), 将可能的洛伦兹和 CPT 破缺效应纳入了这个理论框架 [16]. 2013 年, 也有研究者将广义相对论的黎曼时空用 Finsler 时空取代作为大尺度有效引力 [17]. 我们之前已经研究了大尺度上的洛伦兹对称性的破缺 [18,19], 并且以非常狭义相对论的中的 $SIM(2)$ 群为例, 构造了 $SIM(2)$ 规范理论作为大尺度有效引力理论 [20].

2006 年, Cohen 和 Glashow [21] 提出了非常狭义相对论的理论模型. 他们发现如果将连续的局域时空对称群取为洛伦兹正规子群与时空平移群的的半直积, 只要这个真子群加入 P 或 T 或 CP 能扩张成整个洛伦兹群, 就可以描述已经观测到的物理现象. 如果 CP 是破缺的, 局域对称群连同分立对称群就不再是整个洛伦兹群, 于是洛伦兹破缺与 CP 破缺就产生了关联. 满足上述条件的洛伦兹正规子群在同构的意义下有四个, 分别是: $T(2)$ 群、$E(2)$ 群、$HOM(2)$ 群和 $SIM(2)$ 群, 如表 1 所列. 洛伦兹群的李代数是 6 维线性空间, 常用的一组基底是 $J_x, J_y, J_z, K_x, K_y, K_z$, 前三个表征转动, 后三个表征伪转动. 令 $T_1 = K_x + J_y, T_2 = K_y - J_x$, 非常狭义相对论的四个子群是由生成元 T_1, T_2, J_z, K_z 生成的.

表 1 非常狭义相对论的四个子群
Table 1. The four subgroups of very special relativity.

群	生成元
$T(2)$	$T_1 = K_x + J_y,\ T_2 = K_y - J_x$
$E(2)$	$T_1,\ T_2,\ J_z$
$HOM(2)$	T_1, T_2, K_z
$SIM(2)$	T_1, T_2, J_z, K_z

2 引力规范理论的建立

等效原理告诉我们, 如果在每一点建立一个自由落体参考系, 那么局域上物理规律遵从局域平直时空的物理规律. 对于小尺度引力理论, 这个局域

时空的物理规律就是狭义相对论. 这就是说, 通过选取一个合适的标架场 $h_a = h_a^\mu \partial_\mu$, 可以在每一点上消除引力的作用, 使得局域时空对称群为洛伦兹群. 在这样的标架下, 度规的表现类似狭义相对论中的闵氏度规,

$$g = \boldsymbol{\eta}_{ab} h^a \otimes h^b, \tag{1}$$

其中,

$$\boldsymbol{\eta}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$h^a = h_\mu^a \mathrm{d}x^\mu$ 是标架 h_a 的对偶一形式.

$$h_\mu^a h_b^\mu = \delta_b^a,$$
$$h_\mu^a h_a^\nu = \delta_\mu^\nu.$$

一般而言, h^a 对应非完整坐标系, 也就是说, 不存在一个全局的坐标 y^a 使得 $h^a = \mathrm{d}y^a$.

在每个时空点, 选取自由落体参考系, 物理规律遵从狭义相对论. 在局域洛伦兹坐标变换 $x \mapsto \Lambda(x)x$ 下, 物质场按照洛伦兹群的表示进行变换 $\Psi \mapsto U(\Lambda(x))\Psi$. 闵氏时空的拉氏量 $\mathscr{L}(\partial_\mu\Psi, \Psi)$ 中的普通微分 ∂_μ 无法保证拉氏量或者作用量的局域洛伦兹不变性, 由规范原理, 借鉴通常非阿贝尔规范场的构造只需引入一个规范势 $A_\mu = \dfrac{1}{2} A_\mu^{ab} S_{ab}$, S_{ab} 是洛伦兹代数的生成元. 进而构造局域协变导数 $\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}A_\mu$, 将拉氏量变为 $\mathscr{L}(\mathscr{D}_\mu\Psi, \Psi)$, 就可以保证拉氏量的局域洛伦兹不变性.

对于规范势 A_μ, 需要确定体系的一个规范不变作用量. 首先考虑 Yang-Mills 作用量, 其量纲为 -4, 耦合常数无量纲, 所以不能给出牛顿引力的极限. 而且, 由于连续洛伦兹群本身是非紧李群, Yang-Mills 作用量不能给出正定的哈密顿量, 所以选取 Einstein-Hilbert 作用量,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x h R, \tag{3}$$

其中, $h = \det h_\mu^a = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$.

3 $E(2)$ 群上的引力规范理论

如果大尺度局域对称性是 $E(2)$ 对称性, 上面的对称变换就要限制在 $E(2)$ 群上, 这样我们就可以得到局域 $E(2)$ 不变的理论. 洛伦兹生成元 S_{ab} 满足的对易关系为

$$\begin{aligned} &[S_{ab}, S_{cd}] \\ &= \mathrm{i}(\boldsymbol{\eta}_{bc} S_{ad} + \boldsymbol{\eta}_{ad} S_{bc} - \boldsymbol{\eta}_{ac} S_{bd} - \boldsymbol{\eta}_{bd} S_{ac}). \end{aligned} \tag{4}$$

当协变导数作用在任意的洛伦兹矢量 $\boldsymbol{\phi} = \phi^c h_c$ 或一形式 $\psi = \psi_c h^c$ 上, 按生成元的矢量表示进行变换:

$$(S_{ab})_d^c = \mathrm{i}(\boldsymbol{\eta}_{bd}\delta_a^c - \boldsymbol{\eta}_{ad}\delta_b^c), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\mathscr{D}_\mu \phi^c = \partial_\mu \phi^c + A_{d\mu}^c \phi^d, \\ &\mathscr{D}_\mu \psi_c = \partial_\mu \psi_c - A_{c\mu}^d \psi_d, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $A_{d\mu}^c = \boldsymbol{\eta}_{bd} A_\mu^{cb}$.

将 S_{ab} 表示为更加熟悉的符号:

$$\begin{aligned} &J_x = S_{23}, \quad J_y = S_{31}, \quad J_z = S_{12}, \\ &K_x = S_{10}, \quad K_y = S_{20}, \quad K_z = S_{30}. \end{aligned} \tag{7}$$

规范势 A_μ 的具体展开形式为

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{2} A_\mu^{ab} S_{ab} \\ &= A_\mu^{10} K_x + A_\mu^{20} K_y + A_\mu^{30} K_z + A_\mu^{12} J_z \\ &\quad + A_\mu^{23} J_x + A_\mu^{31} J_y. \end{aligned} \tag{8}$$

由于变换群限制到了 $E(2)$ 上, 所以必须有

$$\begin{aligned} A_\mu &= c_\mu^1 T_1 + c_\mu^2 T_2 + c_\mu^3 J_z \\ &= c_\mu^1 K_x + c_\mu^1 J_y + c_\mu^2 K_y - c_\mu^2 J_x + c_\mu^3 J_z. \end{aligned} \tag{9}$$

对比 (8) 和 (9) 两式, 容易得到 “约束条件”

$$A_\mu^{10} = A_\mu^{31}, \quad A_\mu^{20} = -A_\mu^{23}, \quad A_\mu^{30} = 0. \tag{10}$$

$E(2)$ 时空规范理论的作用量是由洛伦兹时空规范理论的作用量加上约束项组成, 即

$$\begin{aligned} S_E = \frac{1}{16\pi G} \int & \mathrm{d}^4 x h (R + \lambda_1^\mu (A_\mu^{10} - A_\mu^{31}) \\ & + \lambda_2^\mu (A_\mu^{20} + A_\mu^{23}) + \lambda_3^\mu A_\mu^{30}), \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $\lambda_1^\mu, \lambda_2^\mu, \lambda_3^\mu$ 为拉格朗日乘子, R 为曲率标量, 可以写为

$$\begin{aligned} R &= R_{ab}^{ab} \\ &= h_a^\nu h_b^\mu R_{\nu\mu}^{ab} \\ &= h_a^\nu h_b^\mu (A_{\mu,\nu}^{ab} - A_{\nu,\mu}^{ab} + A_{e\nu}^a A_\mu^{eb} \\ &\quad - A_{e\mu}^a A_\nu^{eb}). \end{aligned} \tag{12}$$

现在将作用量对规范势做变分, 注意到 $\delta_A h = 0$ 可以得到

$$\delta_A S_E = \frac{1}{16\pi G} \int \mathrm{d}^4 x h \cdot \delta_A (R + \lambda_1^\mu (A_\mu^{10} - A_\mu^{31})$$

$$
\begin{aligned}
&+\lambda_2^\mu(A_\mu^{20}+A_\mu^{23})+\lambda_3^\mu A_\mu^{30})\\
=&\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\delta A_\mu^{ab}(-\partial_\nu(h(h_a^\nu h_b^\mu-h_a^\mu h_b^\nu))\\
&+h(h_c^\nu h_b^\mu-h_c^\mu h_b^\nu)A_{a\nu}^c\\
&+h(h_c^\nu h_a^\mu-h_c^\mu h_a^\nu)A_{b\nu}^c+\lambda_1^\mu h(\delta_a^1\delta_b^0-\delta_a^3\delta_b^1)\\
&+\lambda_2^\mu h(\delta_a^2\delta_b^0+\delta_a^2\delta_b^3)+\lambda_3^\mu h\delta_a^3\delta_b^0)\\
&+\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x\partial_\nu(h(h_a^\nu h_b^\mu-h_a^\mu h_b^\nu)\delta A_\mu^{ab}).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

去掉表面项, 可以得到关于规范势的约束方程

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}_\nu(h(h_a^\nu h_b^\mu-h_a^\mu h_b^\nu))-\lambda_1^\mu h(\delta_a^1\delta_b^0\\
&-\delta_a^3\delta_b^1)-\lambda_2^\mu h(\delta_a^2\delta_b^0-\delta_a^2\delta_b^3)\\
&-\lambda_3^\mu h\delta_a^3\delta_b^0=0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

进而可以解出 λ_i^μ 乘子,

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^\mu&=\frac{1}{h}\mathscr{D}_\nu(h(h_1^\nu h_0^\mu-h_1^\mu h_0^\nu))\\
&=-\frac{1}{h}\mathscr{D}_\nu(h(h_3^\nu h_1^\mu-h_3^\mu h_1^\nu)),\\
\lambda_2^\mu&=\frac{1}{h}\mathscr{D}_\nu(h(h_2^\nu h_0^\mu-h_2^\mu h_0^\nu))\\
&=\frac{1}{h}\mathscr{D}_\nu(h(h_2^\nu h_3^\mu-h_2^\mu h_3^\nu)),\\
\lambda_3^\mu&=\frac{1}{h}\mathscr{D}_\nu(h(h_3^\nu h_0^\mu-h_3^\mu h_0^\nu)).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

同时对于 $a=1, b=2$ 时得到一个约束方程

$$
\mathscr{D}_\nu(h(h_1^\nu h_2^\mu-h_1^\mu h_2^\nu))=0. \tag{16}
$$

利用标架的结构系数 f_{ab}^c 和挠率张量 $\boldsymbol{T}_{bc}^a$, 可以将规范势表示为

$$
\begin{aligned}
A_{b\mu}^a=&\frac{1}{2}h_\mu^c(f_{bc}^a+f_{cb}^a-f_{bc}^a+T_b{}^a{}_c\\
&+T_{cb}^a-T_{bc}^a).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

显然规范势可以分解为两部分: Levi-Civita 部分和 contortion 部分. 令 $A_{bc}^a=A_{b\mu}^a h_c^\mu$, 那么

$$
A_{bc}^a=\widetilde{A}_{bc}^a+K_{bc}^a. \tag{18}
$$

其中 Levi-Civita 部分仅由结构系数组成,

$$
\widetilde{A}_{bc}^a=\frac{1}{2}(f_{bc}^a+f_{cb}^a-f_{bc}^a); \tag{19}
$$

contortion 部分仅由挠率张量组成

$$
K_{bc}^a=\frac{1}{2}(T_{bc}^a+T_{cb}^a-T_{bc}^a). \tag{20}
$$

将 (18), (19), (20) 式代入约束条件 (10) 式, 可以得到:

$$
\begin{aligned}
&K_c^{10}-K_c^{31}\\
&=\frac{1}{2}(f_c^{10}-f_c^{31}-f_c^{01}-f_c^{10}+f_c^{13}+f_c^{31}),\\
&K_c^{20}+K_c^{23}\\
&=\frac{1}{2}(f_c^{20}+f_c^{23}-f_c^{02}-f_c^{32}-f_c^{20}-f_c^{23}),\\
&K_c^{30}=\frac{1}{2}(f_c^{30}-f_c^{03}-f_c^{30}).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

由 $\mathscr{D}_\nu(h(h_1^\nu h_0^\mu-h_1^\mu h_0^\nu))=-\mathscr{D}_\nu(h(h_3^\nu h_1^\mu-h_3^\mu h_1^\nu))$ 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}_{0d}(K_1^{dc}-\delta_1^cK_e^{de})+\boldsymbol{\eta}_{1d}(K_0^{cd}-\delta_0^cK_e^{ed})\\
=&-\boldsymbol{\eta}_{1d}(K_3^{dc}-\delta_3^cK_e^{de})\\
&-\boldsymbol{\eta}_{3d}(K_1^{cd}-\delta_1^cK_e^{ed}).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

同理由 $\mathscr{D}_\nu(h(h_2^\nu h_0^\mu-h_2^\mu h_0^\nu))=\mathscr{D}_\nu(h(h_2^\nu h_3^\mu-h_2^\mu h_3^\nu))$ 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}_{0d}(K_2^{dc}-\delta_2^cK_e^{de})+\boldsymbol{\eta}_{2d}(K_0^{cd}-\delta_0^cK_e^{ed})\\
=&\boldsymbol{\eta}_{3d}(K_2^{dc}-\delta_2^cK_e^{de})\\
&+\boldsymbol{\eta}_{2d}(K_3^{cd}-\delta_3^cK_e^{ed}).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

以及由 $\mathscr{D}_\nu(h(h_1^\nu h_2^\mu-h_1^\mu h_2^\nu))=0$ 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\eta}_{2d}(K_1^{dc}-\delta_1^cK_e^{de})+\boldsymbol{\eta}_{1d}(K_2^{cd}-\delta_2^cK_e^{ed})\\
=&0.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

化简上述方程可以得到

$$
\begin{aligned}
&K_1^{0c}-\delta_1^cK_e^{0e}\\
&=K_0^{c1}+K_3^{1c}+K_1^{c3}-\delta_0^cK_e^{e1}\\
&\quad-\delta_3^cK_e^{1e}-\delta_1^cK_e^{e3},\\
&K_2^{0c}-\delta_2^cK_e^{0e}\\
&=K_0^{c2}-K_2^{3c}-K_3^{c2}-\delta_0^cK_e^{e2}\\
&\quad+\delta_2^cK_e^{3e}+\delta_3^cK_e^{e2},\\
&K_1^{2c}-\delta_1^cK_e^{2e}+K_2^{c1}-\delta_2^cK_e^{e1}=0,
\end{aligned}
\tag{25}
$$

可以证明 K_c^{ab} 有 K_0^{10}, K_1^{10}, K_2^{10}, K_3^{10}, K_0^{20}, K_2^{20}, K_3^{20}, K_0^{30}, K_1^{30}, K_2^{30}, K_0^{12}, K_1^{31} 这 12 个独立分量, 12 个约束方程可以最终化简为

$$
\begin{aligned}
&f_{10}^0+f_{31}^0+f_{10}^3+f_{31}^3=0,\\
&f_{30}^0+f_{10}^1+f_{31}^1+f_{30}^3=0,\\
&f_{10}^1+f_{31}^1+f_{23}^2-f_{20}^2=0,\\
&f_{20}^1+f_{10}^2+f_{31}^2-f_{23}^1=0,\\
&f_{20}^0+f_{20}^3-f_{23}^0-f_{23}^3=0,\\
&f_{12}^0+f_{12}^3=0;
\end{aligned}
\tag{26}
$$

$$
K_0^{10}-K_3^{10}=\frac{1}{2}(f_{30}^1-f_{31}^0-f_{10}^3-2f_{10}^0),
$$

$$
\begin{aligned}
&K_3^{20}-K_0^{20}=\frac{1}{2}(2f_{20}^0+f_{20}^3-f_{23}^0-f_{30}^2),\\
&K_1^{10}-K_1^{31}=-f_{10}^1-f_{31}^1,\\
&K_1^{12}=f_{20}^0+f_{20}^3,\\
&K_2^{12}=-f_{10}^0-f_{10}^3,\\
&K_0^{30}=f_{30}^0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

现在将作用量对4-标架场做变分, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\delta_h S_E\\
&=\frac{1}{16\pi G}\int \mathrm{d}^4x(R\delta h+h(\partial_\nu A_\mu^{ab}+A_{e\nu}^aA_\mu^{eb})\\
&\quad\times\delta(h_a^\nu h_b^\mu-h_a^\mu h_b^\nu)+(A_\mu^{10}-A_\mu^{31})\delta(h\lambda_1^\mu)\\
&\quad+(A_\mu^{20}+A_\mu^{23})\delta(h\lambda_2^\mu)+A_\mu^{30}\delta(h\lambda_3^\mu)),
\end{aligned}
\tag{28}
$$

由给出的约束方程可以得到 $R_c^a-\dfrac{1}{2}\delta_c^aR=0$.

借助规范势的分解, 曲率也可以做分解

$$
R_{ab}^{mn}=\widetilde{R}_{ab}^{mn}+R_{Kab}^{mn}+R_{CKab}^{mn},
\tag{29}
$$

其中 $\widetilde{R}_{ab}^{mn}$ 和 R_{Kab}^{mn} 分别是规范势Levi-Civita部分和contortion部分构成的曲率,

$$
\begin{aligned}
&R_{Kab}^{mn}\\
&\equiv(h_a^\nu h_b^\mu-h_a^\mu h_b^\nu)(\partial_\nu K_\mu^{mn}+K_{e\nu}^mK_\mu^{en}),
\end{aligned}
\tag{30}
$$

而 R_{CKab}^{mn} 是二者的交叉项

$$
\begin{aligned}
&R_{CKab}^{mn}\\
&\equiv(h_a^\nu h_b^\mu-h_a^\mu h_b^\nu)(\widetilde{A}_{e\nu}^mK_\mu^{en}+K_{e\nu}^m\widetilde{A}_\mu^{en}).
\end{aligned}
\tag{31}
$$

由此, 引力场方程可以写为

$$
\widetilde{R}_c^a-\frac{1}{2}\delta_c^a\widetilde{R}=8\pi G(T_{E(2)})_c^a,
\tag{32}
$$

其中,

$$
\begin{aligned}
&(T_{E(2)})_c^a\\
&=\frac{1}{8\pi G}\left(\frac{1}{2}\delta_c^a(R_K+R_{CK})-(R_{Kc}^a+R_{CKc}^a)\right).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

由此可以看出, (32)式类似于一个能动张量为 $\boldsymbol{T}_{E(2)}$ 的物质所提供的引力场, 所以 $\boldsymbol{T}_{E(2)}$ 可以看作由洛伦兹破缺提供的等效能量动量张量分布, 这个等效能量动量张量分布是由真实的物质引发的, 如果没有真实的物质, 也就没有 $\boldsymbol{T}_{E(2)}$ 项, 自然方程的解仍然包括了了闵氏时空解. $\boldsymbol{T}_{E(2)}$ 可能就是大尺度上暗物质效应的来源.

对物质场分布部分 S_M,

$$
\delta S_M=\int \mathrm{d}^4x\,h\left(\delta h_\mu^c h_a^\mu(\boldsymbol{T}_M)_c^a+\delta A_\mu^{ab}(C_M)_{ab}^\mu\right),
\tag{34}
$$

其中, $\boldsymbol{T}_M$ 是物质的能量动量张量, $C_M=\delta_AS_M$. 得到完整的引力场方程为

$$
\widetilde{R}_c^a-\frac{1}{2}\delta_c^a\widetilde{R}=8\pi G(T_{E(2)}+\boldsymbol{T}_M)_c^a.
\tag{35}
$$

约束方程变为

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}_\nu(h(h_1^\nu h_0^\mu-h_1^\mu h_0^\nu))+\mathscr{D}_\nu(h(h_3^\nu h_1^\mu-h_3^\mu h_1^\nu))\\
&=16\pi G\left((C_M)_{10}^\mu+(C_M)_{31}^\mu\right),\\
&\mathscr{D}_\nu(h(h_2^\nu h_0^\mu-h_2^\mu h_0^\nu))-\mathscr{D}_\nu(h(h_2^\nu h_3^\mu-h_2^\mu h_3^\nu))\\
&=16\pi G\left((C_M)_{20}^\mu-(C_M)_{23}^\mu\right),\\
&\mathscr{D}_\nu(h(h_1^\nu h_2^\mu-h_1^\mu h_2^\nu))=16\pi G(C_M)_{12}^\mu.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

显然即使在 $(C_M)_{ab}^\mu=0$ 的标量物质源的情形, $\boldsymbol{T}_{E(2)}$ 一般也不为零, 这与广义相对论中标量物质源挠率必然为零的结论是完全不同的, 显示了大尺度上洛伦兹对称性丧失的效应.

4 自洽性分析

验证 $E(2)$ 群规范理论的自洽性是必要的. 对 $E(2)$ 规范引力理论需要检验Maurer-Cartan方程在 $E(2)$ 代数上是封闭的:

$$
[\mathscr{D}_a,\mathscr{D}_b]=T_{ba}^p\mathscr{D}_p-\frac{i}{2}R_{ab}^{cd}S_{cd}.
\tag{37}
$$

另外还需要验证Bianchi恒等式

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}_dT_{bc}^a+\mathscr{D}_cT_{db}^a+\mathscr{D}_bT_{cd}^a\\
&=R_{bcd}^a+R_{dbc}^a+R_{cdb}^a+T_{bd}^eT_{ec}^a+T_{dc}^eT_{eb}^a+T_{cb}^eT_{ed}^a,\\
&\mathscr{D}_\rho R_{b\nu\mu}^a+\mathscr{D}_\nu R_{b\mu\rho}^a+\mathscr{D}_\mu R_{b\rho\nu}^a=0.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

4.1 Maurer-Cartan方程

借助约束条件 $A_\mu^{10}=A_\mu^{31}$, $A_\mu^{20}=-A_\mu^{23}$, $A_\mu^{30}=0$, 使得 $E(2)$ 的规范势的取值在 $E(2)$ 代数上而非洛伦兹代数上, 也就是说协变导数为

$$
\mathscr{D}_\mu=\partial_\mu-\mathrm{i}\left(A_\mu^{10}T_1+A_\mu^{20}T_2+A_\mu^{12}J_z\right),
\tag{39}
$$

这样可以达到一个局域 $E(2)$ 不变的引力理论.

首先考虑曲率的贡献. $R_{\nu\mu}^{ab}$ 的定义是

$$
R_{\nu\mu}^{ab}=\partial_\nu A_\mu^{ab}-\partial_\mu A_\nu^{ab}+A_{e\nu}^aA_\mu^{eb}-A_{e\mu}^aA_\nu^{eb}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_\nu A_\mu^{ab} - \partial_\mu A_\nu^{ab} + \boldsymbol{\eta}_{ce} A_\nu^{ac} A_\mu^{eb} \\
&\quad - \boldsymbol{\eta}_{ce} A_\mu^{ac} A_\nu^{eb}.
\end{aligned} \tag{40}
$$

具体计算所有的曲率分量:

$$
\begin{aligned}
R_{\nu\mu}^{10} &= \partial_\nu A_\mu^{10} - \partial_\mu A_\nu^{10} - A_\nu^{12} A_\mu^{20} + A_\mu^{12} A_\nu^{20}, \\
R_{\nu\mu}^{31} &= \partial_\nu A_\mu^{10} - \partial_\mu A_\nu^{10} + A_\nu^{20} A_\mu^{12} - A_\mu^{20} A_\nu^{12} = R_{\nu\mu}^{10}, \\
R_{\nu\mu}^{20} &= \partial_\nu A_\mu^{20} - \partial_\mu A_\nu^{20} + A_\nu^{12} A_\mu^{10} - A_\mu^{12} A_\nu^{10}, \\
R_{\nu\mu}^{23} &= - R_{\nu\mu}^{20}, \\
R_{\nu\mu}^{12} &= \partial_\nu A_\mu^{12} - \partial_\mu A_\nu^{12}, \\
R_{\nu\mu}^{30} &= 0.
\end{aligned} \tag{41}
$$

将上述结果全部代入曲率形式

$$
\begin{aligned}
& R_{\nu\mu}^{ab} S_{ab} \\
={}& R_{\nu\mu}^{10} S_{10} + R_{\nu\mu}^{10} S_{31} + R_{\nu\mu}^{20} S_{20} - R_{\nu\mu}^{10} S_{23} \\
& + R_{\nu\mu}^{12} S_{12} + 0 \cdot S_{30} \\
={}& R_{\nu\mu}^{10} T_1 + R_{\nu\mu}^{20} T_2 + R_{\nu\mu}^{12} J_z \\
={}& \left(\partial_\nu A_\mu^{10} - \partial_\mu A_\nu^{10} - A_\nu^{12} A_\mu^{20} + A_\mu^{12} A_\nu^{20}\right) T_1 \\
& + \left(\partial_\nu A_\mu^{20} - \partial_\mu A_\nu^{20} + A_\nu^{12} A_\mu^{10} - A_\mu^{12} A_\nu^{10}\right) T_2 \\
& + \left(\partial_\nu A_\mu^{12} - \partial_\mu A_\nu^{12}\right) J_z.
\end{aligned} \tag{42}
$$

我们可以清晰地看到, 曲率形式的取值自动限制到了 $E(2)$ 上, 这代表了曲率对于 $E(2)$ 群是封闭的.

其次考虑挠率.

$$
\begin{aligned}
T_{\nu\mu}^a &= \partial_\nu h_\mu^a - \partial_\mu h_\nu^a + A_{e\nu}^a h_\mu^e - A_{e\mu}^a h_\nu^e \\
&= \mathscr{D}_\nu (h_\mu^a) - \mathscr{D}_\mu (h_\nu^a).
\end{aligned} \tag{43}
$$

由于 $E(2)$ 群完整的保留了时空平移的作用, 所以挠率在 $E(2)$ 上自然是封闭的, 不会发生任何改变.

现在就来验证 Maurer-Cartan 方程.

$$
\begin{aligned}
& [\mathscr{D}_a, \mathscr{D}_b] \\
={}& [h_a^\mu \mathscr{D}_\mu, h_b^\nu \mathscr{D}_\nu] \\
={}& h_a^\mu [\mathscr{D}_\mu, h_b^\nu] \mathscr{D}_\nu + h_b^\nu [h_a^\mu, \mathscr{D}_\nu] \mathscr{D}_\mu + h_a^\mu h_b^\nu [\mathscr{D}_\mu, \mathscr{D}_\nu] \\
={}& h_a^\mu \mathscr{D}_\mu (h_b^\nu) \mathscr{D}_\nu - h_b^\nu \mathscr{D}_\nu (h_a^\mu) \mathscr{D}_\mu + h_a^\mu h_b^\nu [\mathscr{D}_\mu, \mathscr{D}_\nu],
\end{aligned} \tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
& h_a^\mu \mathscr{D}_\mu (h_b^\nu) \mathscr{D}_\nu - h_b^\nu \mathscr{D}_\nu (h_a^\mu) \mathscr{D}_\mu \\
={}& - h_a^\mu h_p^\sigma h_b^\nu \mathscr{D}_\mu (h_\nu^p) \mathscr{D}_\sigma + h_b^\nu h_p^\sigma h_a^\mu \mathscr{D}_\nu (h_\mu^p) \mathscr{D}_\sigma \\
={}& h_a^\mu h_b^\nu T_{\nu\mu}^p \mathscr{D}_p \\
={}& T_{ba}^p \mathscr{D}_p.
\end{aligned} \tag{45}
$$

再利用协变导数的定义计算 (44) 式第三个等号右边第三项,

$$
\begin{aligned}
& [\mathscr{D}_\mu, \mathscr{D}_\nu] \\
={}& [\partial_\mu - \mathrm{i} A_\mu, \partial_\nu - \mathrm{i} A_\nu] \\
={}& - i[\partial_\mu, A_\nu] - \mathrm{i}[A_\mu, \partial_\nu] - [A_\mu, A_\nu] \\
={}& i(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) + [A_\nu, A_\mu] \\
={}& \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\partial_\nu A_\mu^{ab} - \partial_\mu A_\nu^{ab}\right) S_{ab} + \frac{1}{4} A_\nu^{ab} A_\mu^{cd} \left[S_{ab}, S_{cd}\right] \\
={}& \frac{\mathrm{i}}{2} R_{\nu\mu}^{ab} S_{ab}.
\end{aligned} \tag{46}
$$

综合起来, 我们就得到了 Maurer-Cartan 方程:

$$
\begin{aligned}
[\mathscr{D}_a, \mathscr{D}_b] &= T_{ab}^p \mathscr{D}_p + \frac{\mathrm{i}}{2} h_a^\mu h_b^\nu R_{\nu\mu}^{cd} S_{cd} \\
&= T_{ba}^p \mathscr{D}_p - \frac{\mathrm{i}}{2} R_{ab}^{cd} S_{cd}.
\end{aligned} \tag{47}
$$

正如之前所证明的, 随着将规范势以及协变导数限制到 $E(2)$ 群上, 曲率形式和挠率形式都自动限制到了 $E(2)$ 群, 从而 Maurer-Cartan 方程对于 $E(2)$ 群同样成立.

4.2 Bianchi 恒等式

下面再考察 Bianchi 恒等式. 先引入一个记号 $\mathfrak{S}$ 表示轮换求和, 设 $f_{\rho\mu\nu}$ 是一个带有时空指标的量, 那么 $\mathfrak{S}\{f_{\rho\mu\nu}\}$ 的定义是:

$$
\mathfrak{S}\{f_{\rho\mu\nu}\} = f_{\rho\mu\nu} + f_{\mu\nu\rho} + f_{\nu\rho\mu}.
$$

由挠率的定义出发, 反复利用上面的轮换求和的性质,

$$
\begin{aligned}
& T_{\nu\mu}^a = \mathscr{D}_\nu (h_\mu^a) - \mathscr{D}_\mu (h_\nu^a), \\
& \mathfrak{S}\{\mathscr{D}_\rho T_{\nu\mu}^a\} \\
={}& \mathfrak{S}\{\mathscr{D}_\rho \mathscr{D}_\nu (h_\mu^a) - \mathscr{D}_\rho \mathscr{D}_\mu (h_\nu^a)\} \\
={}& \mathfrak{S}\{\mathscr{D}_\rho \mathscr{D}_\nu (h_\mu^a) - \mathscr{D}_\nu \mathscr{D}_\rho (h_\mu^a)\} \\
={}& \mathfrak{S}\{[\mathscr{D}_\rho, \mathscr{D}_\nu] h_\mu^a\} \\
={}& \mathfrak{S}\left\{\frac{\mathrm{i}}{2} R_{\nu\rho}^{bc} S_{bc} (h_\mu^a)\right\} \\
={}& \mathfrak{S}\{R_{\mu\rho\nu}^a\}, \\
& \mathscr{D}_\rho T_{\nu\mu}^a + \mathscr{D}_\nu T_{\mu\rho}^a + \mathscr{D}_\mu T_{\rho\nu}^a \\
={}& R_{\mu\rho\nu}^a + R_{\rho\nu\mu}^a + R_{\nu\mu\rho}^a.
\end{aligned} \tag{48}
$$

这样我们就证明了 Bianchi 第一恒等式在 $E(2)$ 群上成立. 由上面的结果容易发现, $\mathfrak{S}\{\mathscr{D}_\rho T_{\nu\mu}^a\}$ 的取值也是在 $E(2)$ 群中的. 注意到上面的式子完

全是时空指标, 我们需要将其转换为内部指标的Bianchi恒等式.

设$\{bcd\}$代表对内部指标b, c, d的轮换求和, 即

$$g_{\{abc\}} = g_{abc} + g_{bca} + g_{cab},$$

容易得到

$$f_{\rho\nu\mu} h^{\rho}_{\{a} h^{\nu}_{b} h^{\mu}_{c\}} = \mathfrak{S}\{f_{\rho\nu\mu}\} h^{\rho}_{a} h^{\nu}_{b} h^{\mu}_{c}. \tag{49}$$

现在来计算内部指标下挠率的协变导数.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_d(T^a_{bc}) = \mathscr{D}_\rho(T^a_{\nu\mu} h^\nu_b h^\mu_c) h^\rho_d \\
&= \mathscr{D}_\rho(T^a_{\nu\mu}) h^\nu_b h^\mu_c h^\rho_d \\
&\quad + T^a_{\nu\mu} \mathscr{D}_\rho(h^\nu_b) h^\mu_c h^\rho_d + T^a_{\nu\mu} h^\nu_b \mathscr{D}_\rho(h^\mu_c) h^\rho_d \\
&= h^\nu_b h^\mu_c h^\rho_d \Big(\mathscr{D}_\rho(T^a_{\nu\mu}) - T^a_{e\mu} \mathscr{D}_\rho(h^e_\nu) + T^a_{e\nu} \mathscr{D}_\rho(h^e_\mu) \Big),
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_{\{d}(T^a_{bc\}}) \\
&= h^\nu_b h^\mu_c h^\rho_d \Big(\mathfrak{S}\{\mathscr{D}_\rho(T^a_{\nu\mu})\} \\
&\quad + \mathfrak{S}\{T^a_{e\mu}(\mathscr{D}_\nu(h^e_\rho) - \mathscr{D}_\rho(h^e_\nu))\} \Big) \\
&= h^\nu_b h^\mu_c h^\rho_d \Big(\mathfrak{S}\{R^a_{\mu\rho\nu} + T^a_{e\mu} T^e_{\nu\rho}\} \Big) \\
&= h^\nu_{\{b} h^\mu_c h^\rho_{d\}} \Big(R^a_{\mu\rho\nu} + T^a_{e\mu} T^e_{\nu\rho} \Big) \\
&= R^a_{\{cdb\}} + T^a_{e\{c} T^e_{bd\}}.
\end{aligned} \tag{51}$$

展开上面的式子, 我们就得到了

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_d T^a_{bc} + \mathscr{D}_c T^a_{db} + \mathscr{D}_b T^a_{cd} \\
&= R^a_{bcd} + R^a_{dbc} + R^a_{cdb} + T^e_{bd} T^a_{ec} + T^e_{dc} T^a_{eb} \\
&\quad + T^e_{cb} T^a_{ed}.
\end{aligned} \tag{52}$$

重写曲率的定义式,

$$\begin{aligned}
R^a_{b\nu\mu} &= \partial_\nu A^a_{b\mu} - \partial_\mu A^a_{b\nu} + A^a_{e\nu} A^e_{b\mu} - A^a_{e\mu} A^e_{b\nu} \\
&= D_\nu(A^a_{b\mu}) - D_\mu(A^a_{b\nu}),
\end{aligned} \tag{53}$$

注意到(53)式最后一个等号D_ν代表只对$A^a_{b\mu}$的上指标起作用的协变微分, 这里相当于把$A^a_{b\mu}$看作一个矢量.

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_\rho R^a_{b\nu\mu} \\
&= \partial_\rho R^a_{b\nu\mu} + A^a_{e\rho} R^e_{b\nu\mu} - A^e_{b\rho} R^a_{e\nu\mu} \\
&= D_\rho R^a_{b\nu\mu} - A^e_{b\rho} R^a_{e\nu\mu}, \\
&\quad \mathfrak{S}\{D_\rho R^a_{b\nu\mu}\} \\
&= \mathfrak{S}\{[D_\rho, D_\nu] A^a_{b\mu}\} \\
&= \mathfrak{S}\Big\{ \frac{\mathrm{i}}{2} R^{cd}_{\nu\rho} S_{cd}(A^a_{b\mu}) \Big\} \\
&= \mathfrak{S}\{R^a_{e\nu\mu} A^e_{b\rho}\}, \\
&\quad \mathfrak{S}\{\mathscr{D}_\rho R^a_{b\nu\mu}\} = \mathfrak{S}\{D_\rho R^a_{b\nu\mu} - R^a_{e\nu\mu} A^e_{b\rho}\} = 0, \\
&\quad \mathscr{D}_\rho R^a_{b\nu\mu} + \mathscr{D}_\nu R^a_{b\mu\rho} + \mathscr{D}_\mu R^a_{b\rho\nu} = 0.
\end{aligned} \tag{54}$$

这就证明了Bianchi第二恒等式在$E(2)$群上同样成立.

综合上面的计算, 我们就证明了$E(2)$群作为时空对称群是自封闭的, 从而$E(2)$引力理论是自洽的.

5 总结与展望

为了解释一些与广义相对论出现偏离的天文观测, 提出了两种方法: 一种是用暗物质和暗能量来解释, 另一种是修正爱因斯坦引力理论. 本文是从洛伦兹对称性破缺的角度来修正引力理论.

假设洛伦兹对称性是从星系尺度开始部分破缺, 以非常狭义相对论中的一个对称群$E(2)$群为例, 构造了$E(2)$引力规范理论. 可以发现, $E(2)$规范理论模型中, 与广义相对论不同的是, 即使物质场为标量场的情况下, 非零的时空contortion会给爱因斯坦方程提供一个非零的与物质能量动量张量伴随的"有效能量动量张量分布", 这个"有效能量动量张量分布"的存在可能至少部分地贡献了暗物质效应, 定量的结果将是我们后继研究的内容. 最后对$E(2)$规范理论的自洽性进行了分析.

这种用对称性破缺修改引力的尝试在不同的尺度上contortion贡献的有效能量动量张量分布的特征不同, 在考察星系等尺度上的缺失质量问题时, 它可能对缺失质量分布做出贡献, 在考虑宇宙尺度上的宇宙膨胀问题时, 它有可能给出暗能量的贡献, 这暗示一个暗物质暗能量内在联系的可能机制, 如果这个猜测成立, 将是对已有的暗能量与暗物质相互作用的唯象研究的一个支持. 有关暗物质暗能量相互作用的进一步研究参见文献[22, 23]. 具体可以在满足宇宙学原理的Robertson-Walker类型的度规的基础上来求解. 选择这种类型的度规之后, 与宇宙介质伴随的contortion贡献的有效能动张量场的效应, 也就是$T_{E(2)}$, 也可能就与暗能量效应有关, 这将是我们后继研究的内容. 天文观测与广义相对论的偏离是否全部是来自于大尺度上

洛伦兹对称性的破缺? 大尺度上的洛伦兹对称性的丧失与微观尺度上可能的洛伦兹破缺有何联系, 如何给出一个从宏观局域洛伦兹对称的广义相对论过渡到宇观尺度上的局域洛伦兹破缺的有效引力理论的机制都是需要进一步研究的课题.

参考文献

[1] Zwicky F 1937 *Astrophys. J.* **86** 217

[2] Rubin V C, Ford Jr W K, Thonnard N 1980 *Astrophys. J.* **238** 471

[3] Shojai F, Shojai A 2014 *General Relat. Gravit.* **46** 1704

[4] Moffat J W 2006 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03** 004

[5] Bekenstein J D 2004 *Phys. Rev. D* **70** 083509

[6] Agnese R, Anderson A J, Asai M, *et al.* 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 241302

[7] Kim S C, Bhang H, Choi J H, *et al.* 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 181301

[8] Geringer-Sameth A, Koushiappas S M 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 241303

[9] Ji X D 2017 *Nature* **542** 172

[10] Akerib D S, Akerlof C W, Akimov D Y, *et al.* 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 021303

[11] Weinberg S 2008 *Cosmology* (New York: Oxford University Press) pp1–6

[12] Aghanim N, Armitage-Caplan C, Arnaud M, *et al.* 2014 *Astron. Astrophys.* **571** A27

[13] Ade P A R, Aghanim N, Armitage-Caplan C, *et al.* 2014 *Astron. Astrophys.* **571** A20

[14] Ade P A R, Aghanim N, Akrami Y, *et al.* 2016 *Astron. Astrophys.* **594** A16

[15] Coleman S R, Glashow S L 1999 *Phys. Rev. D* **59** 116008

[16] Colladay D, Kostelecky V A 1998 *Phys. Rev. D* **58** 116002

[17] Li X, Chang Z 2013 *Chin. Phys. C* **37** 123103

[18] Wu Y W, Xue X, Yang L X, Yuan T 2016 *Chin. Sci. Bull.* **10** 1360

[19] Wu Y W, Xue X, Yang L X, Yuan T 2015 *arXiv:* 151000814v3

[20] Wu Y W, Xue X 2016 *J. East China Normal Univ.* **10** 3969

[21] Cohen A G, Glashow S L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 021601

[22] Micheletti S, Abdalla E, Wang B 2009 *Phys. Rev. D* **79** 123506

[23] He J H, Wang B 2011 *Phys. Rev. D* **83** 063515

$E(2)$ gauge theory model of effective gravitational theory at large scale*

Wei Wen-Ye[1)] Shen Jia-Yin[1)] Wu Yi-Wei[1)] Yang Li-Xiang[1)]
Xue Xun[1)†] Yuan Tzu-Chiang[2)]

1) (*Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200241, China*)

2) (*Institute of Physics, Academia Sinica, Taipei 11529, China*)

(Received 4 February 2017; revised manuscript received 6 April 2017)

Abstract

At the cosmological scale, there exist many anisotropic anomalies in the low-l multipoles of the CMB angular power spectrum. Especially, the normals to the octopole and quadrupole planes are aligned with the direction of the cosmological dipole at a level inconsistent with Gaussian random. The inconsistency indicates that the anomalies may not be boost effect from the CMB rest frame to the peculiar frame. It hints us that the boost invariance might be violated on a cosmological scale. There are some discrepancies between the astronomical and cosmological observations, and the predictions are solely based on general relativity and the standard model for elementary particle physics. The solutions are the introduction of dark matter and dark energy. However, all the experiments aiming at finding dark matter particles give negative result and it is still a mystery: what the dark energy is comprised of. We suppose that the Lorentz symmetry begins to be violated partly from the scale of galaxy and utilize the very special relativity symmetry group $E(2)$ as an example to illustrate the Lorentz violation effect on the large-scale effective gravity. A local $E(2)$ but Lorentz invariant gauge theory can be constructed based on the equivalence principle and the gauge principle. To realize the $E(2)$ symmetry, the closure requirement of Maurer-Cartan eqnarray on $E(2)$ algebra needs to be satisfied by postulating constraint conditions among the components of the Lorentz connection. The local Lorentz invariant gauge theory with a Hilbert-Einstein action is a theory with torsion in general case. However in the case of scalar matter source, the theory is exactly the theory of general relativity with Levi-Civita connection and zero torsion. In the $E(2)$ gauge theory case, the closure requirement of Maurer-Cartan eqnarray for $E(2)$ algebra postulates 12 constraint eqnarrays among the components of the Lorentz connection and the eqnarrays of motion for connection reduce the number of independent components of connection to 12. The eqnarrays of motion for the tetrad field do not contain only the involved tetrad field components nor these relevant independent components. So the whole number of variables needed to be solved is 12 more than that in general relativity while there are 12 more eqnarrays in the meantime. The torsion or the contortion field of the $E(2)$ gauge theory is non-trivial even in the case of scalar matter source distribution. Decompose the connection into Levi-Civita one and the contortion part and rewrite the eqnarrays for tetrad field in the formalism of general relativity, then there will appear an effective energy-momentum tensor contributed by the contortion distribution, in addition to the ordinary matter source distribution even for the case of scalar matter source. We expect it to contribute at least part of the dark matter effect. We also examine the holding of the first and second Bianchi identities induced by Jacobi identity of the $E(2)$ gauge theory. The approach of our modified gravity is different from other approach of modified gravity in the sense that we construct the modified gravity by modifying the spacetime symmetry on a large scale and the emergence of effective energy-momentum tensor caused by Lorentz violation effect is due to a purely large scale effect.

Keywords: $E(2)$ group, very special relativity, the effective gravitation theory, Lorentz violation

PACS: 03.30.+p, 04.20.Cv, 11.15.–q, 11.30.Cp **DOI:** 10.7498/aps.66.130301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11435005).

† Corresponding author. E-mail: xxue@phy.ecnu.edu.cn