

Hilber-Hughes-Taylor- α 法在接触约束多体系统动力学中的应用

郭晔 章定国 陈思佳

Application of Hilber-Hughes-Taylor- α method to dynamics of flexible multibody system with contact and constraint

Guo Xian Zhang Ding-Guo Chen Si-Jia

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 164501 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.164501

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.164501>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I16>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于交互模式的柔性体接触碰撞动力学建模方法

Dynamic modeling method of flexible bodies with contact/impact based on interactive mode

物理学报.2017, 66(15): 154501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.154501>

基于旋转场曲率的二维剪切梁单元建模

Analysis of planar shear deformable beam using rotation field curvature formulation

物理学报.2017, 66(11): 114501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.114501>

基于绝对节点坐标法的大变形柔性梁几种动力学模型研究

Several dynamic models of a large deformation flexible beam based on the absolute nodal coordinate formulation

物理学报.2016, 65(9): 094501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.094501>

基于无网格点插值法的旋转悬臂梁的动力学分析

A meshfree method based on point interpolation for dynamic analysis of rotating cantilever beams

物理学报.2015, 64(3): 034501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.034501>

旋转柔性悬臂梁动力学的 Bezier 插值离散方法研究

Bezier interpolation method for the dynamics of rotating flexible cantilever beam

物理学报.2014, 63(15): 154501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.63.154501>

Hilber-Hughes-Taylor- α 法在接触约束多体系统动力学中的应用*

郭颀¹⁾ 章定国^{1)†} 陈思佳²⁾

1)(南京理工大学理学院, 南京 210094)

2)(浙江大学宁波理工学院, 宁波 315100)

(2017年3月12日收到; 2017年6月7日收到修改稿)

以柔性梁在重力作用下绕转动铰做大范围定轴转动, 并与刚性平面发生碰撞这一动力学过程为例, 对 Hilber-Hughes-Taylor (HHT- α) 法在求解含接触约束的柔性多体系统动力学方程时的数值特性进行了研究. 系统运动过程的全局动力学仿真由常微分方程组和微分-代数方程组的数值求解构成. 柔性梁在无碰撞阶段系统动力学方程是一组常微分方程组. 采用接触约束法模拟接触约束过程, 系统的动力学方程为指标3的微分-代数方程组. 采用 HHT- α 法对该微分-代数方程组进行求解, 并与 Baumgarte 违约修正法进行比较. 分析了 HHT- α 法自由参数和违约修正常数对计算效率、动力学响应和系统机械能的影响, 并对数值积分方法对模态截断数的敏感度以及速度约束和加速度约束的违约程度进行了分析. 结果表明, 违约修正常数对仿真结果影响非常明显, 而 HHT- α 法的自由参数 α 对动力学响应的影响较小, 从而避免了违约修正常数对数值积分结果的影响. HHT- α 法的自由参数 α 可以消除碰撞高频模态的影响.

关键词: 柔性多体系统, 碰撞, HHT- α 法, Baumgarte 违约修正

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 02.70.-c

DOI: 10.7498/aps.66.164501

1 引言

复杂柔性多体系统在操作运行中往往会出现接触、碰撞现象, 对这类系统进行全局动力学仿真时, 高效率、高精度和高稳定性的数值计算方法是基本前提. 随着柔性多体系统动力学的不断发展, 处理该类方程组的数值积分方法也得到大量研究^[1-21]. Petzold^[1]对指标3微分代数方程组的数值求解方法进行了综述; Hilber, Hughes 和 Taylor^[2]引入自由参数 α (HHT- α), 在 Newmark 方法^[3]基础上提出了 HHT 法; Cardona 和 G radin^[4]将 Newmark 法和 HHT- α 法推广到了指标3带约束动力学方程的数值求解中; Negrut 等^[5,6]将 HHT- α 法应用于柔性多体系统动力学分析; Chung 和 Hulbert^[7]将基于 HHT 法提出的广

义- α 法用于结构动力学有限元分析; Hussein 等^[8]研究了 HHT-I3 法在柔性多体系统动力学仿真中的可调数值阻尼特性等; Shabana 和 Hussein^[9]提出了使用 Newmark 法对独立坐标积分的双循环隐式积分方法; Hussein 和 Shabana^[10]研究了基于 HHT 法的双循环隐式积分法中步长的选取原则. 国内方面, 洪嘉振^[11]推动了计算多体系统动力学这一分支学科在国内的发展; 王琪和陆启韶^[12]总结了 Lagrange 方程的数值算法; 丁洁玉和潘振宽^[13]针对指标3完整约束多体系统动力学微分-代数方程, 结合约束投影方法提出广义 α -S 投影法; 马秀腾等^[14,15]从能量角度研究了 Newmark 方法和 HHT- α 方法求解约束力学系统指标2运动方程时的数值性能; 张乐和章定国^[16,17]提出了基于向后差分法和隐式龙格库塔法的两种新双循环隐式积分方法; 阚子云等^[18]基于 SiPESC 平台开

* 国家自然科学基金 (批准号: 11272155, 11302192) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 30917011103) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangdg419@njust.edu.cn

发了开放式多体系统动力学仿真算法软件, 综合比较研究了Newmark法、HHT-I3法、Generalize- α 方法、Bathe方法和祖冲之类Symplectic方法.

HHT- α 法作为一种二阶隐式数值积分方法, 具有控制数值阻尼耗散的良好特性, 在柔性多体系统动力学方程求解中具有重要应用价值. 虽然关于HHT- α 法的研究已展开大量工作, 但是针对复杂多体系统的数值求解依然存在诸多问题. 如柔性多体系统碰撞问题中, 由于碰撞过程具有持续时间短、作用强度大、动力学方程强非线性和高度耦合等特点, 使得数值积分求解困难极大. 此外, 同时满足位置、速度和加速度约束方程也是求解的一个难点, 且由于高阶频率被激发, 自由参数对碰撞响应和系统能量均会产生不同影响.

本文针对柔性多体系统动力学中典型的中心刚体-柔性悬臂梁系统, 以柔性梁在重力场下绕转动铰做大范围定轴转动, 且与刚性平面发生碰撞这一动力学过程为例, 对HHT- α 法在求解含接触约束的柔性多体系统动力学方程时的数值特性进行了研究. 系统运动过程的全局动力学仿真包括: 在无碰撞阶段, 系统的动力学方程为一组常微分方程组 (ordinary differential equations, ODEs); 采用接触约束法模拟系统接触碰撞过程, 系统的动力学方程为一组指标3的微分-代数方程组 (differential algebraic equations, DAEs). 可见在全局动力学仿真中待求方程的维数会随着接触状态变化而产生突变, 使得数值计算难度大大增加, 因此必须对含接触约束的全局动力学方程的数值特性进行分析. 其中, 指标3的DAEs常见求解方法是Baumgarte 违约修正法 [19–21]. Baumgarte 违约修正法属于增广法, 可以通过选择修正系数满足约束方程并将DAEs化为微分方程进行求解. 然而, 其修正系数的选择没有通用方法, 人为凭经验选取修正系数是造成该类方法数值计算稳定性问题的主要原因. 本文选择HHT- α 法来求解该类动力学DAEs. 首先对指标3的DAEs降指标处理得到指标2的超定 (overdetermined) 微分-代数方程组 (ODAEs), 再引入Gear-Gupta-Leimkuhler (GGL) 法化ODAEs为DAEs后再使用HHT法进行数值求解. 通过与Baumgarte 违约修正法的比较, 分析HHT- α 法自由参数 α 、违约修正常数以及假设模态的模态截断数等因素对数值计算结果的影响, 以此研究HHT- α 法在求解这类动力学方程组时的

数值特性. 同时仿真结果也与连续接触力法 (the continuous contact force method, CCFM) [22] 建立的碰撞动力学微分方程组的仿真结果进行比较, 验证HHT- α 法求解DAEs时仿真结果的正确性.

2 柔性多体系统动力学建模

2.1 物理模型

考虑图1的柔性梁系统: 柔性梁绕转动铰 O 在重力场下做大范围定轴转动, 假设梁上一点 P 与水平刚性 $O-XZ$ 平面上某点 Q 发生碰撞. 假设柔性梁为平面细长Euler-Bernoulli梁, 变形时梁的横截面仍然保持为平面且与中轴线垂直. 柔性梁的长度为 L , 质量密度为 ρ , 弹性模量为 E , 横截面积为 S , 截面惯性矩为 I , 转动铰处的驱动力矩为 τ . 使用浮动坐标系 $O-xy$ 相对于惯性坐标系 $O-XY$ 的转动角 θ 描述梁的大范围运动, 在浮动坐标系中描述梁的变形运动.

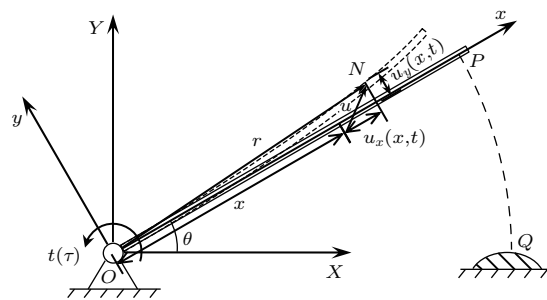


图1 柔性梁碰撞

Fig. 1. The impact model of the flexible beam.

采用假设模态法描述柔性梁的变形, 柔性梁轴向变形位移 u_x 和横向变形位移 u_y 的表达式 [22–24] 为

$$\begin{cases} u_x = \Phi_x(x)A(t) + w_c, \\ u_y = \Phi_y(x)B(t), \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\Phi_x(x) \in \mathbf{R}^{1 \times N}$ 和 $\Phi_y(x) \in \mathbf{R}^{1 \times N}$ 分别为梁的轴向振动和横向振动的模态函数行矢量, $A(t) \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ 和 $B(t) \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ 分别为轴向振动和横向振动的模态坐标列矢量, N 为模态截断数. $H(x) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是耦合形函数矩阵, u_x 中 $w_c \triangleq -\frac{1}{2}B^T(t)H(x)B(t)$ 是横向弯曲变形引起的梁轴向缩短量, 称为非线性耦合变形量.

2.2 无碰撞的柔性多体系统动力学建模

取广义坐标 $\mathbf{q} = (\theta, \mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)^T$, 由第二类拉格朗日方程得到系统在重力场下绕转动铰做大范围运动时的刚-柔耦合动力学微分方程:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2)$$

其中, 无碰撞的广义质量阵 $\mathbf{M}$ 和广义力阵 $\mathbf{Q}$ 的表达式如下:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_\theta \\ Q_A \\ Q_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中,

$$\begin{aligned} M_{11} &= J_{oh} + J_{ob} + 2\mathbf{S}_x \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_x \mathbf{A} \\ &\quad + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_y \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \\ &\quad - \int_0^L \rho S [\mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \Phi_x \mathbf{A}] dx \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_0^L \rho S [\mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B}] dx, \\ M_{22} &= \mathbf{M}_x, \\ M_{21} &= \mathbf{M}_{12}^T = -\mathbf{M}_{xy} \mathbf{B}, \\ M_{32} &= \mathbf{M}_{23}^T = - \int_0^L \rho S [\mathbf{H} \mathbf{B} \Phi_x] dx, \\ M_{33} &= \mathbf{M}_y + \int_0^L [\mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{H}] dx, \\ M_{31} &= \mathbf{M}_{13}^T = \mathbf{S}_y^T + \mathbf{M}_{xy}^T \mathbf{A} \\ &\quad + \int_0^L \rho S [\mathbf{H} \mathbf{B} \Phi_y \mathbf{B}] dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L \rho S [\Phi_y^T \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B}] dx, \\ Q_\theta &= -2\dot{\theta} [\mathbf{S}_x \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T \mathbf{M}_x \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{B}^T \mathbf{M}_y \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{B}}] \\ &\quad - \dot{\theta} \int_0^L \rho S [\dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B}] dx \\ &\quad + \int_0^L \rho S [\dot{\theta} (\dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \Phi_x \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \Phi_x \dot{\mathbf{A}}) \\ &\quad - \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}} \Phi_y \mathbf{B}] dx + \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \theta} \mathbf{R}, \\ Q_A &= \dot{\theta}^2 (\mathbf{S}_x^T + \mathbf{M}_x^T \mathbf{A}) + 2\dot{\theta} \mathbf{M}_{xy} \dot{\mathbf{B}} - \mathbf{K}_1 \mathbf{A} \\ &\quad + \int_0^L \rho S \left[\Phi_x^T \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \Phi_x^T \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[\mathbf{g}^T \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{A}} \right]^T, \\ Q_B &= \dot{\theta}^2 (\mathbf{M}_y - \mathbf{C}) \mathbf{B} - 2\dot{\theta} \mathbf{M}_{xy}^T \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{K}_2 \mathbf{B} \\ &+ \int_0^L \rho S \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B} \dot{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}} \right] dx \\ &- \int_0^L \rho S [2\dot{\theta} (\mathbf{H} \mathbf{B} \Phi_y \dot{\mathbf{B}} - \Phi_y^T \mathbf{B}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{B}}) \\ &- \dot{\theta}^2 \mathbf{H} \mathbf{B} \Phi_x \mathbf{A}] dx + \left[\mathbf{g}^T \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{B}} \right]^T. \quad (4) \end{aligned}$$

(4) 式常系数矩阵 J_{oh} , J_{ob} , $\mathbf{S}_x$, $\mathbf{S}_y$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$, $\mathbf{M}_{xy}$, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{R}$ 详见文献 [22—24], 其中下划线项是由于变形位移中引入非线性二阶耦合变形量 w_c 而产生的.

2.3 含接触约束的柔性多体系统动力学建模

2.3.1 接触约束法建模

含接触约束的动力学建模方法中, 采用接触约束法 (the contact constraint method, CCM) 可无需人为附加参数, 无相互嵌入假设, 且碰撞力依据动力学方程求解得到, 较符合实际情况. 故本文使用接触约束法来模拟接触碰撞过程. 然而, 无碰撞时系统的动力学方程为 ODEs 的形式, 碰撞过程中由于约束方程的引入使动力学方程突变为 DAEs 的形式, 碰撞结束后动力学方程再次变为 ODEs 形式.

取广义坐标 $\mathbf{q} = (\theta, \mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)^T$, 由第二类拉格朗日方程得到系统发生碰撞时的刚-柔耦合动力学微分方程:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_q^T \lambda = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (5a)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}, \quad (5b)$$

(5a) 式中, $\mathbf{M}$ 为无碰撞时的广义质量矩阵, $\mathbf{Q}$ 为无碰撞时的广义力列阵, $\mathbf{C}$ 为位置约束方程, $\mathbf{C}_q = \partial \mathbf{C} / \partial \mathbf{q}$ 为约束 Jacobian 矩阵, λ 为 Lagrange 乘子即接触约束反力, 也就是碰撞力.

2.3.2 连续接触力法建模

选择非线性弹簧阻尼模型来模拟接触碰撞过程, 用非线性阻尼力来反映碰撞过程中系统的能量损失, 在低速碰撞过程仿真较为准确. 非线性弹簧阻尼模型是以 Hertz 接触理论为基础, 这里采用总

体法向碰撞力以添加非线性阻尼. 碰撞力大小的表达式为

$$F = (F_k + F_d)L(\eta), \quad (6)$$

$$L(\eta) = \begin{cases} 0, & \eta \geq 0, \\ 1, & \eta < 0, \end{cases} \quad (7)$$

式中, η 是碰撞体间嵌入量, 相互嵌入为负; $L(\eta)$ 是逻辑函数, 用以判断接触与否. F_k 是法向弹性接触力, F_d 是非线性阻尼力, 这里取表达式为

$$F_k = K|\eta|^{3/2}, \quad (8)$$

$$F_d = -CK|\eta|^{3/2}\dot{\eta}, \quad (9)$$

$$C = 3(1 - e^2)/4v_0, \quad (10)$$

式中, K 为接触刚度, C 为阻尼系数, e 为恢复系数, $\dot{\eta}$ 为碰撞点之间的嵌入速度, v_0 为碰撞点初始相对速度.

3 两种数值求解方法

3.1 Baumgarte 违约修正法

在无碰撞阶段, 使用四阶 Adams 预估-校正法对动力学方程 (2) 进行求解. 对于碰撞阶段的 DAEs, 用加速度约束方程 $\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 替代位置约束方程 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ 来对 DAEs 进行处理. 即预先将 (5b) 式对时间 t 求两次导数得到 (11) 式, 记为 $\mathbf{C}_q \ddot{\mathbf{q}} \triangleq \gamma$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \gamma \end{bmatrix}. \quad (11)$$

此时, 若直接对 (11) 式进行求解得到的广义坐标满足加速度约束方程 $\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$, 而位置约束方程 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ 和速度约束方程 $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 则难以保证. 为保证满足相容性条件, 引入 Baumgarte 违约修正法 [21]. 违约修正法基于反馈控制原理, 将加速度约束方程 $\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 修改为

$$\ddot{\mathbf{C}} + 2\delta\dot{\mathbf{C}} + \varepsilon^2\mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

式中, δ 和 ε 为违约修正常数, 用以保证求解时每一步均满足 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{0}$. 然而, δ 和 ε 的取值对数值计算的结果有很大影响. 此时, 系统动力学方程可以表示为 (13) 式, 再选择四阶 Adams 预估-校正法 (后面简称为 4th Adams) 进行数值积分.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \gamma^* \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中, $\gamma^* = \gamma - 2\delta\dot{\mathbf{C}} - \varepsilon^2\mathbf{C}$.

3.2 HHT- α 法

在无碰撞阶段, 使用 HHT 法对动力学方程 (2) 进行求解. HHT 法是在 Newmark 法 [16] 基础上的改进, Newmark 法的常见差分格式为

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h\dot{\mathbf{q}} + h^2[(0.5 - \beta)\ddot{\mathbf{q}}_n + \beta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}], \quad (14a)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + h[(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}], \quad (14b)$$

式中, $\gamma \geq 0.5$, $\beta \geq (\gamma + 0.5)^2/4$, Newmark 积分公式大部分情况具有一阶精度. 为改进 Newmark 法的稳定性和阶次, 同时实现数值阻尼可控, Hilber 等 [2] 在 Newmark 法的基础上提出了 HHT 法, 在时间步 t_{n+1} 离散 (2) 式为

$$(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1} - (1 + \alpha)\mathbf{Q}_{n+1} + \alpha\mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad (15)$$

其中, 自由参数 $\alpha \in [-1/3, 0]$, α 越小引入的数值阻尼就越大. 由文献 [5] 可知 HHT 法具有以下优势: 1) 数值阻尼耗散的控制性; 2) 二阶精度; 3) 绝对稳定性.

对于碰撞阶段的 DAEs, 在时间步 t_{n+1} 离散式 (5a),

$$\begin{aligned} &(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1} + (1 + \alpha)(\mathbf{C}_q^T \lambda - \mathbf{Q})_{n+1} \\ &- \alpha(\mathbf{C}_q^T \lambda - \mathbf{Q})_n = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (16)$$

结合 (5b) 式, 直接求解可能使数值积分方法引入的误差造成速度和加速度约束方程的违约. 本文选择文献 [7, 14] 中 HHT- α 法计算策略如下: 由 GGL 公式 [25] 引入一个新的变量 μ 使得方程的数目等于变量数目:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} - \mathbf{C}_q^T(\mathbf{q}, t)\mu, \quad (17)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{q}, t) - \mathbf{C}_q^T(\mathbf{q}, t)\lambda, \quad (18)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}_q(\mathbf{q}, t)\mathbf{u} + \mathbf{C}_t(\mathbf{q}, t), \quad (19)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, t). \quad (20)$$

由文献 [7, 14] 中的 HHT- α 法, 联立 (19) 和 (20) 式得到待求的非线性方程组, 并采用 Newton-Raphson 迭代求解该非线性代数方程组见 (21) 式.

$$\mathbf{J}_{n+1} \begin{bmatrix} \Delta\ddot{\mathbf{q}} \\ \Delta\lambda \\ \Delta\mu \end{bmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = - \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}_{n+1}, \quad (21)$$

其中, 记 $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}})_{n+1} + (1 + \alpha)\mathbf{Q}_{n+1} - \alpha\mathbf{Q}_n$, $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{C}_q\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_t)_{n+1}/h$ 和 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{C}_{n+1}/h^2$. $\mathbf{J}_{n+1}$ 为系统变量的雅可比矩阵, 为改善 $\mathbf{J}_{n+1}$ 的条件数, 需进行适当的缩放处理. $\mathbf{J}_{n+1}$ 表示为

$$\mathbf{J}_{n+1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1)_q & (\mathbf{e}_1)_\lambda & (\mathbf{e}_1)_\mu \\ (\mathbf{e}_2)_q & (\mathbf{e}_2)_\lambda & (\mathbf{e}_2)_\mu \\ (\mathbf{e}_3)_q & (\mathbf{e}_3)_\lambda & (\mathbf{e}_3)_\mu \end{bmatrix}_{n+1}, \quad (22)$$

即可由 $\Delta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(k+1)}$, $\Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)}$ 和 $\Delta\mu_{n+1}^{(k+1)}$ 分别求出 $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(k+1)} = \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(k)} + \Delta\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{(k+1)}$, $\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \lambda_{n+1}^{(k)} + \Delta\lambda_{n+1}^{(k+1)}$ 和 $\mu_{n+1}^{(k+1)} = \mu_{n+1}^{(k)} + \Delta\mu_{n+1}^{(k+1)}$. 需要指出, 本文选择的 HHT- α 法差分格式与 (14) 式不同, 具体表达式可见文献 [7, 14].

4 HHT- α 法数值特性分析

4.1 自由参数 α 和违约修正常数 δ 和 ε 对计算效率的影响

已知柔性梁的物理参数 [22]: $L = 1.0 \text{ m}$, $S = 3.14 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $I = 7.85 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, $\rho =$

$2.7667 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $E = 6.8952 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. 柔性梁初始时刻无变形、无初速度, 取初始角度 $\theta = 45^\circ$. 令梁自由下落, 与刚性 $O-XZ$ 平面碰撞, 使用接触约束法进行系统含碰撞的全局动力学仿真. 在全局动力学仿真中采用变步长处理策略, 未碰撞阶段积分步长 $h = 10^{-4}$, 碰撞阶段积分步长 $h = 10^{-6}$. 柔性梁自由下落时不同模态截断数 N 的碰撞动力学计算耗时参见表 1.

由表 1 可见, 自由参数 α 的选择对于 HHT- α 法计算效率的影响较大, α 的减小引起计算效率的提升; 违约修正常数的选择对 Adams 法的计算效率虽会造成一定影响, 但不如自由参数 α 对 HHT- α 法的影响显著. 此时 HHT- α 法计算效率明显低于违约修正法. 事实上, HHT- α 法可通过放大时间步长而赢得较高的计算效率, 但在本文的碰撞仿真中需选择较小时间步长对碰撞初时进行判断. 此外, 模态截断数 N 的增加会明显增大计算时间.

表 1 含碰撞的数值积分方法计算耗时 (单位: s)

Table 1. Computation time of numerical integration method considering impact (units: s).

截断数 N 参数	数值方法					
	HHT- α 法			违约修正法		
	$\alpha = 0$	$\alpha = -0.15$	$\alpha = -0.3333$	$\delta = 0, \varepsilon = 0$	$\delta = 10, \varepsilon = 50$	$\delta = 1000, \varepsilon = 5000$
$N = 3$	305	244	166	67	64	63
$N = 5$	799	589	401	339	325	319
$N = 7$	2914	2573	2092	1285	1217	1198
$N = 9$	9818	8725	7233	2341	2231	2192

4.2 自由参数 α 和违约修正常数 δ 和 ε 对系统动力学响应的影响

取模态截断数 $N = 5$, 碰撞恢复系数 e 分别为 0 和 0.3. 图 2(a) 和图 2(b) 是 HHT- α 法在不同自由参数 α 且两种恢复系数 e 时计算的系统角位移 θ 时程图, 图 2(c) 和图 2(d) 则是基于 Adams 法的违约修正法在不同违约修正常数时计算的系统角位移 θ 时程图. 图 2(e) 和图 2(f) 是 e 分别为 0 和 0.3 时, 用 HHT- α 法 ($\alpha = -0.15$) 与违约修正法 ($\delta = 1000$, $\varepsilon = 5000$) 计算的接触约束法 (CCM) 模型以及用 Newmark 法计算的连续接触力法 (CCFM) 模型的

系统角位移 θ 时程图.

从图 2(a)—2(d) 可见: 自由参数 α 对 HHT- α 法求解系统动力学响应的影响并不明显, 而违约修正参数 δ 和 ε 的取值对动力学响应的仿真结果影响较大. 当碰撞恢复系数 $e = 0.3$ 时, δ 和 ε 的取值直接影响碰撞回弹高度以及第二次碰撞发生的时间. 从图 2(e) 和图 2(f) 中可见, HHT- α 法 ($\alpha = -0.15$) 与 Newmark 法的仿真结果符合较好, 而违约修正法 ($\delta = 1000$, $\varepsilon = 5000$) 的仿真结果与前两者有所偏差. 由此可见, 对于 DAEs 的求解 HHT- α 法的数值稳定性要高于 Baumgarte 违约修正法.

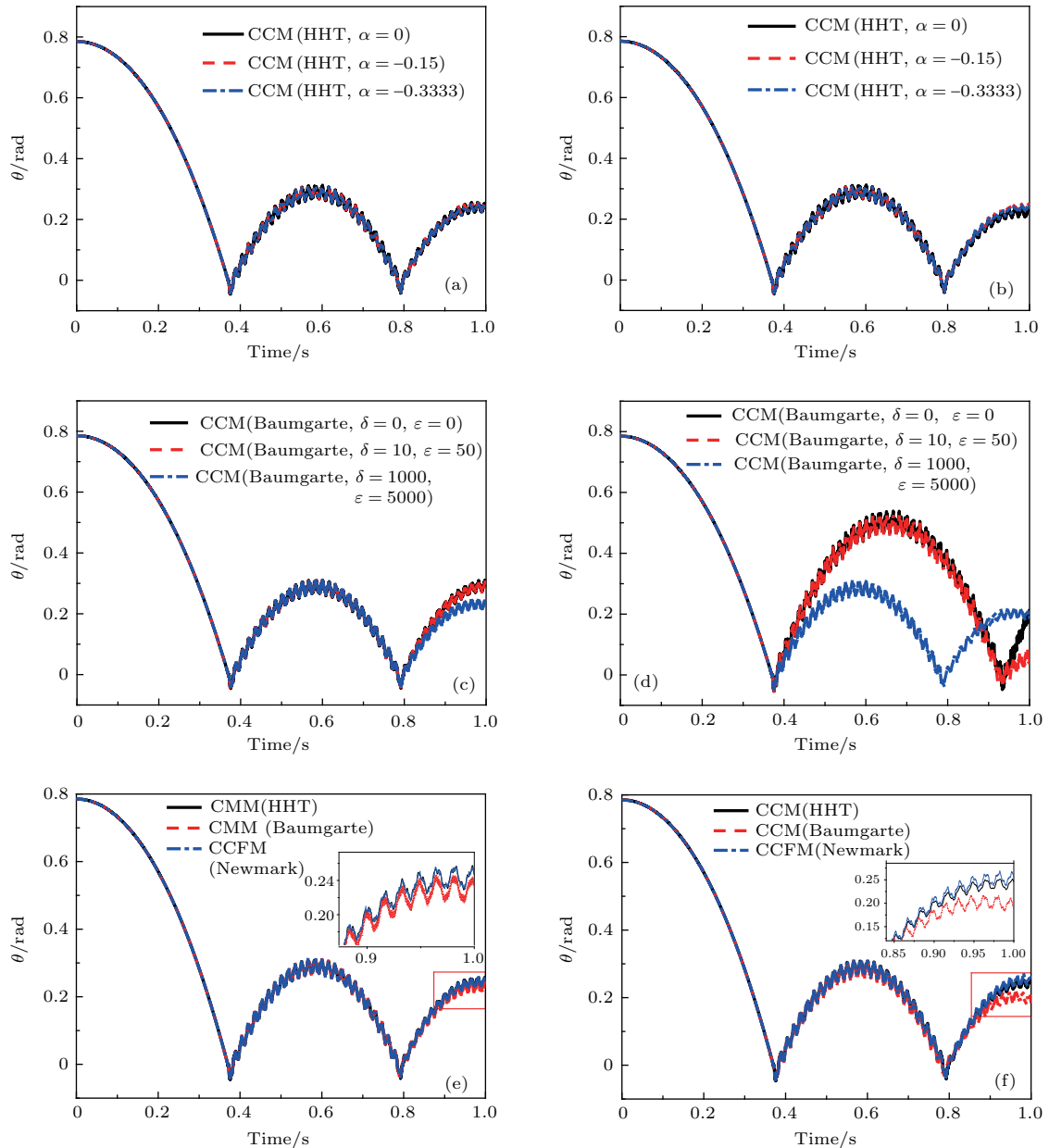


图2 (网刊彩色) 不同参数时的系统角位移时程图 (a) $e = 0$, HHT- α 法仿真; (b) $e = 0.3$, HHT- α 法仿真; (c) $e = 0$, 违约修正仿真; (d) $e = 0.3$, 违约修正仿真; (e) $e = 0$, 三种方法仿真; (f) $e = 0.3$, 三种方法仿真

Fig. 2. (color online) Angle of the system with different e : (a) $e = 0$, HHT- α method; (b) $e = 0.3$, HHT- α method; (c) $e = 0$, Baumgarte's method; (d) $e = 0.3$, Baumgarte's method; (e) $e = 0$, three methods; (f) $e = 0.3$, three methods.

4.3 自由参数 α 和违约修正常数 δ 和 ε 对系统机械能的影响

取模态截断数 $N = 5$, 碰撞恢复系数 e 分别为 0, 0.3. 图3是不同参数情况下柔性梁的机械能时程图, 其中梁的机械能包括梁的动能、重力势能和弹性变形势能.

由图3(a)和图3(b)可见, 无碰撞阶段自由参数 $\alpha \neq 0$ 时, HHT- α 法仿真的系统能量减少. 在图

中, 代表 $\alpha = -0.15$ 和 $\alpha = -0.3333$ 时仿真的两条能量曲线在碰撞结束后明显不平行于横坐标轴. HHT- α 法中自由参数的选择 ($\alpha \neq 0$) 会造成仿真的系统能量损失, 在碰撞发生后这种影响表现较为明显. 对比图3(c)和图3(d)可见, Baumgarte违约修正法中不同组的 δ 和 ε 的取值使得系统能量的变化差异较明显. 图3(d)中 $e = 0.3$ 时, $\delta = 0, \varepsilon = 0$ 和 $\delta = 10, \varepsilon = 50$ 这两组取值使得系统能量在第一次碰撞时明显增大.

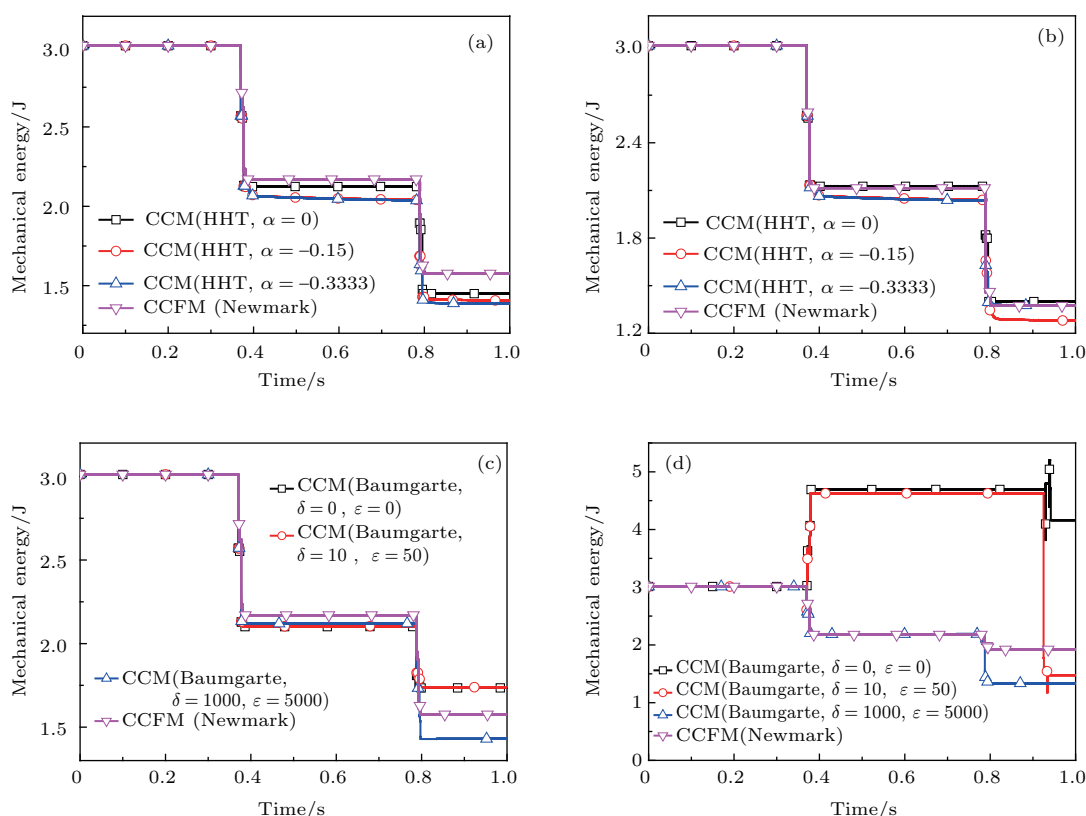


图3 (网刊彩色) 不同参数时的系统机械能 (a) $e = 0$, HHT- α 法仿真; (b) $e = 0.3$, HHT- α 法仿真; (c) $e = 0$, 违约修正仿真; (d) $e = 0.3$, 违约修正仿真

Fig. 3. (color online) Mechanical energy of the system with different parameters: (a) $e = 0$, HHT- α method; (b) $e = 0.3$, HHT- α method; (c) $e = 0$, Baumgarte's method; (d) $e = 0.3$, Baumgarte's method.

4.4 数值积分方法对模态截断数 N 的敏感度

取 $e = 0$, $\alpha = 0$, $\alpha = -0.15$, $\delta = 1000$, $\varepsilon = 5000$, 图4是HHT- α 法和Baumgarte违约修正法在不同模态截断数 N 时系统角位移时程图, 图5则是上述两种方法在不同 N 时的系统能量时程图.

由图4和图5可见, 碰撞发生后HHT- α 法和违约修正法的仿真结果依赖于模态截断数 N 的选取, 尤其在第二次碰撞的影响更为显著. 这是由于碰撞容易激发柔性杆的高阶模态, 且模态截断数 N 越大考虑的高阶模态越多. 由图4(a)和图4(b)可见, 随着碰撞次数的增加, 模态截断数 N 对HHT- α 法在含接触约束的柔性多体系统动力学的仿真结果影响愈加显著. 这时HHT- α 法可以通过调节 α 来改变其求解过程中的数值耗散量, 进而把高阶模态的响应消除掉. 然而由图3(a)中可见, 这种耗

散是以仿真的系统能量减少为代价. 由图4(c)和图5(c)可见, 当 $N = 9$ 时, Baumgarte违约修正法的仿真结果出现发散现象, 而HHT- α 法则可以继续求解.

4.5 HHT- α 法自由参数对高频振型响应的影响

由于高频部分被激发, 而HHT- α 法求解时自由参数 α 会消除掉高阶振型的响应. 本节考察HHT- α 法所求解的各阶模态所占比例在动力学行为中的变化, 并与违约修正法的求解结果进行对比说明. 以柔性梁的横向变形为例, 将模态所占比值 (即 $W_i = \Phi_{y_i} B_i / \sum_{i=1}^N |\Phi_{y_i} B_i|$, $i = 1, \dots, N$) 进行绘图分析. 模态截断数 $N = 7$ 时, 图6和图7是HHT- α 法 (自由参数 α 对应取0, -0.15) 绘出的 $W_i (i = 1, 7)$ 时程图, 图8是违约修正法 ($\delta = 1000$, $\varepsilon = 5000$) 绘出的 $W_i (i = 1, 7)$ 时程图.

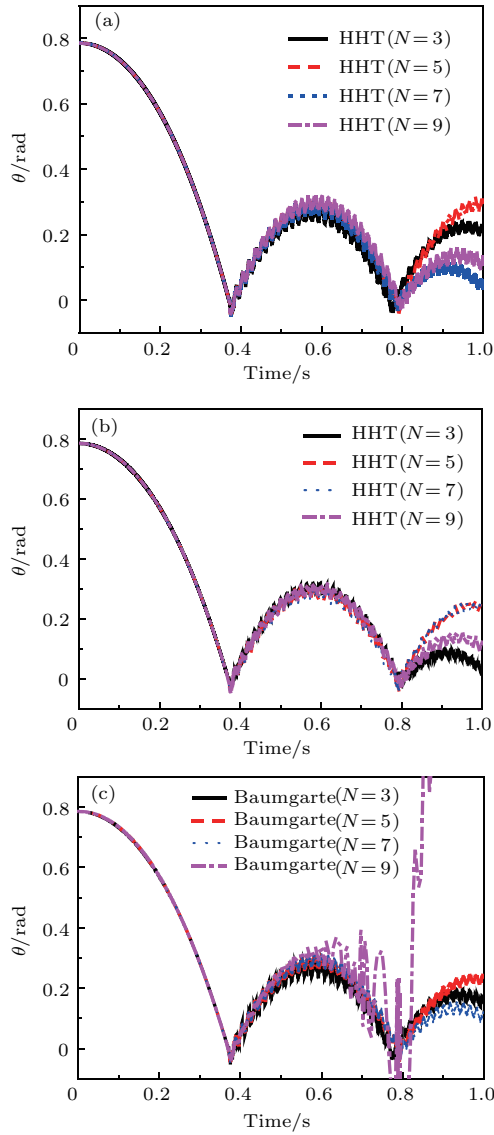


图4 (网刊彩色) 不同模态截断数 N 的系统角位移时程图 (a) $e = 0$, $\alpha = 0$, HHT- α 法仿真; (b) $e = 0$, $\alpha = -0.15$, HHT- α 法仿真; (c) $e = 0$, 违约修正仿真
Fig. 4. (color online) Angle of the system with different N : (a) $e = 0$, $\alpha = 0$, HHT- α method; (b) $e = 0$, $\alpha = -0.15$, HHT- α method; (c) $e = 0$, Baumgarte's method.

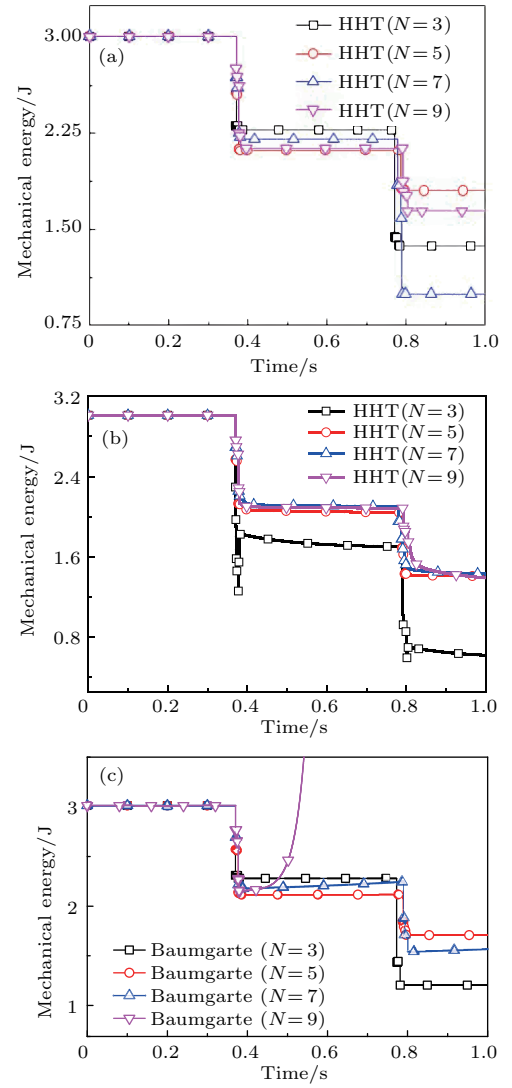


图5 (网刊彩色) 不同模态截断数 N 的系统能量时程图 (a) $e = 0$, $\alpha = 0$, HHT- α 法仿真; (b) $e = 0$, $\alpha = -0.15$, HHT- α 法仿真; (c) $e = 0$, 违约修正仿真
Fig. 5. (color online) Mechanical energy of the system with different N : (a) $e = 0$, $\alpha = 0$, HHT- α method; (b) $e = 0$, $\alpha = -0.15$, HHT- α method; (c) $e = 0$, Baumgarte's method.

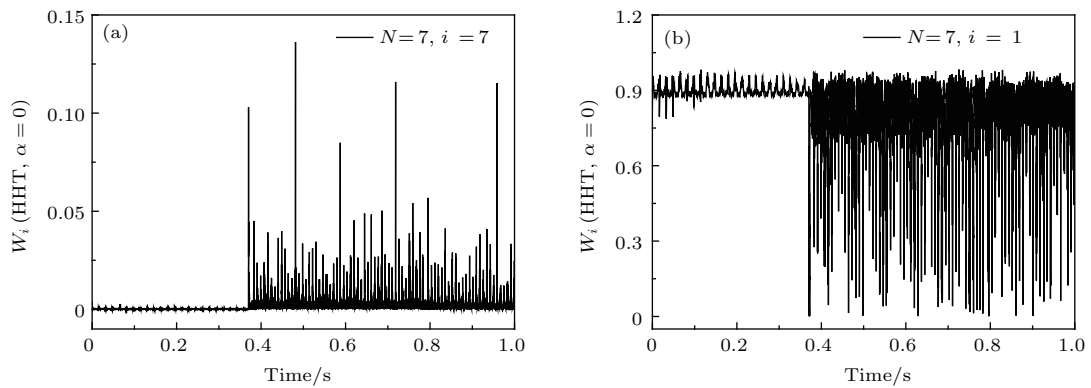


图6 $\alpha = 0$ 时, HHT- α 法仿真的 W_i ($N = 7$) 时程图 (a) $i = 7$ 的 W_i 变化; (b) $i = 1$ 的 W_i 变化
Fig. 6. W_i ($N = 7$) used HHT- α method when $\alpha = 0$: (a) W_i when $i = 7$; (b) W_i when $i = 1$.

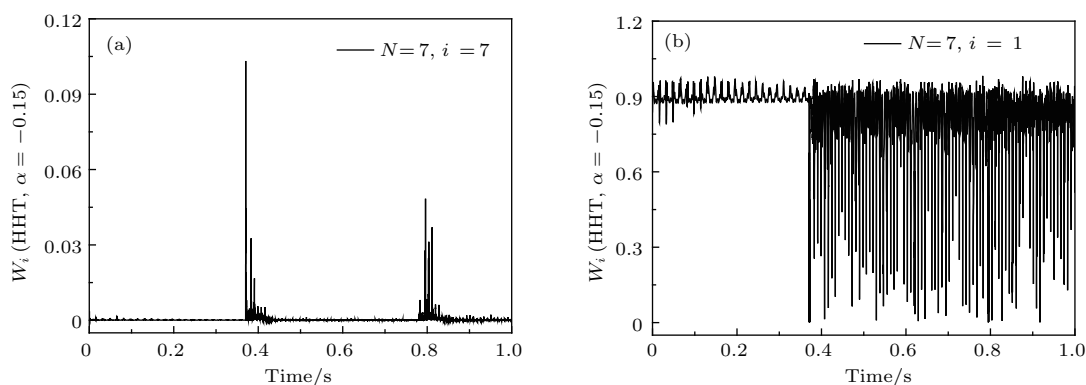

 图7 $\alpha = -0.15$ 时, HHT- α 法仿真的 W_i ($N = 7$) 时程图 (a) $i = 7$ 的 W_i 变化; (b) $i = 1$ 的 W_i 变化

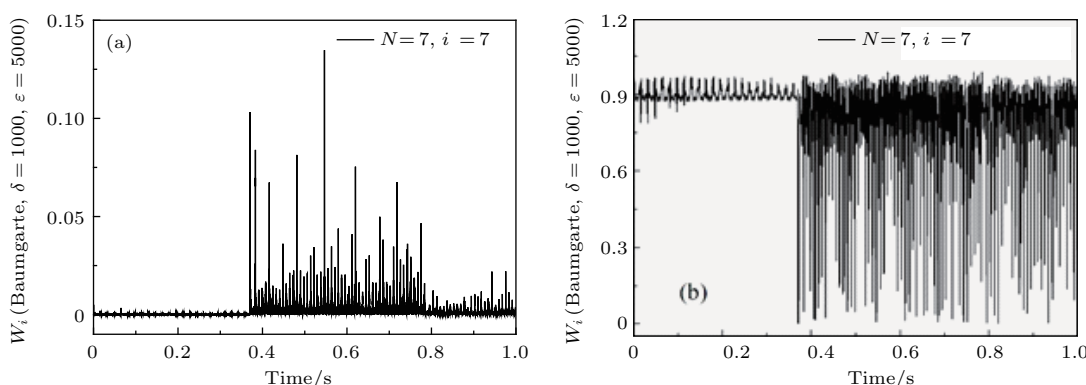
 Fig. 7. W_i ($N = 7$) used HHT- α method when $\alpha = -0.15$: (a) W_i when $i = 7$; (b) W_i when $i = 1$.

 图8 违约修正法 ($N = 7, \delta = 1000, \varepsilon = 5000$) 仿真的 W_i 时程图 (a) $i = 7$ 的 W_i 变化; (b) $i = 1$ 的 W_i 变化

 Fig. 8. W_i ($N = 7, \delta = 1000, \varepsilon = 5000$) used Baumgarte's method: (a) W_i when $i = 7$; (b) W_i when $i = 1$.

由图6和图8可见, 在发生碰撞前低频占优而高频极弱. 碰撞激发了高频, 且这种效果会在碰撞结束后持续存在. 由图6和图7可见, 非零 α 的引入可以消除高频的影响, 且这种消除在两次碰撞之间更为明显, 但对低频的消除作用不大. 因此, 在使用HHT- α 法求解碰撞问题时需关注参数 α 的取值.

4.6 HHT- α 法对速度约束和加速度约束的违约

直接用HHT法求解方程(5)时, 计算极易发散或者得到的广义坐标仅满足 $\mathbf{C} = \mathbf{0}$, 而 $\dot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 和 $\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 存在违约. 选择HHT- α 法时, 经过GGL法处理后得到的待求方程组中并没有直接使用加速度约束方程 $\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 进行求解, 由于误差的积累等因素, 使得 $\ddot{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$ 未必满足. 故本节研究HHT- α 法取不同模态截断数 N 时, 系统运动的速度约束和加

速度约束的违约情况.

图9为 $\alpha = -0.15$, N 为3—9时, HHT- α 法计算的系统速度约束方程和加速度约束方程2-范数意义下的最大相对误差(对应为 $\|\ddot{\mathbf{C}}\|$ 和 $\|\ddot{\mathbf{C}}\|$)时程图. 从图9可见, 随着 N 的增大, $\|\ddot{\mathbf{C}}\|$ 在两次碰撞附近的峰值均随之增加. HHT- α 法速度约束和加速度约束的违约量级分别为 10^{-14} 和 10^4 . 仿真中, 违约修正法速度约束的最大违约量级为 10^{-1} ($\delta = 1000, \varepsilon = 5000$)和 10^{-4} ($\delta = 10, \varepsilon = 50$), 而加速度约束的最大违约量级为 10^3 ($\delta = 1000, \varepsilon = 5000$)和 10^{-1} ($\delta = 10, \varepsilon = 50$). 可见两种数值方法对于加速度约束的违约情况比速度约束更为严重. 对于违约修正法来说, 修正常数的选择会对约束方程的违约量级造成影响. Baumgarte 违约修正法可以通过选择合适参数, 将约束方程的违约控制在一定范围内. 但是在含接触约束的动力学问题中, 修正常数对违约消除的作用并不理想.

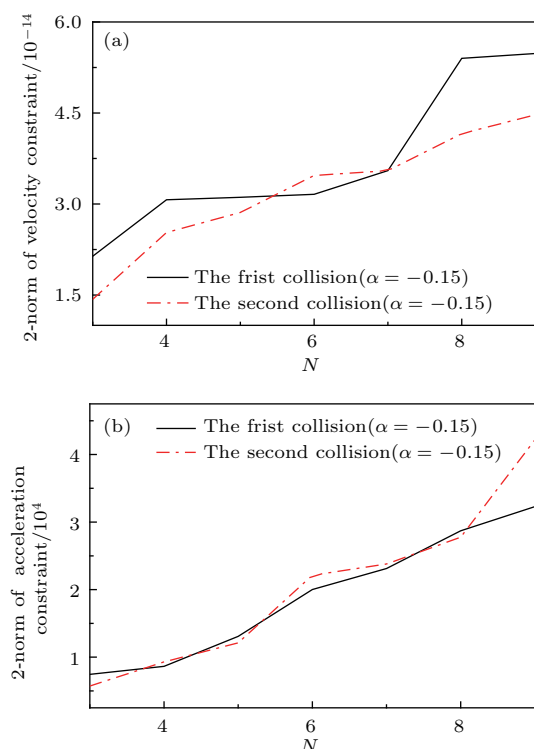


图9 (网刊彩色) $\alpha = -0.15$, 不同 N 时, 约束方程 2-范数峰值 (a) 速度约束方程的 2-范数; (b) 加速度方程的 2-范数

Fig. 9. (color online) $\alpha = -0.15$, 2-norm of the constraint equations with different N : (a) The 2-norm of the velocity constraint equations; (b) the 2-norm of the acceleration constraint equations.

5 结 论

本文对 HHT- α 法在求解含接触约束的柔性多体系统动力学微分-代数方程时的数值特性进行了研究. 对于接触过程指标 3DAEs 分别用 HHT- α 法和 Baumgarte 违约修正法进行数值求解. 研究发现, 当系统运动产生突变时, HHT- α 法自由参数 α 对动力学响应的影响不大, 但对系统能量的影响较为明显. 而违约修正常数 δ 和 ε 的取值对动力学响应和系统能量均有较大影响, 且在求解碰撞问题时修正常数的引入可导致约束方程出现违约的情况. 自由参数 α 对 HHT- α 法计算效率的影响比违约修正常数 δ, ε 的影响显著. 与 Baumgarte 违约修正法相比, HHT- α 法在计算碰撞问题时具有较好的数值稳定性. 此外, 这两种数值方法对假设模态的模态截断数 N 均具有较大的敏感性. 当碰撞发生时系统高阶模态被激发, HHT- α 法则可以通过调节自由参数 α 来改变求解过程中的数值耗散量, 降低高阶模态的贡献. 同时, 增加 N 的取值会造成两种

方法求解时间的明显增大. 最后, HHT- α 法对于速度约束和加速度约束存在不同程度的违约现象, 且模态截断数的增加会造成速度和加速度违约情况加剧.

参考文献

- [1] Petzold L R 1992 *Physica D* **60** 269
- [2] Hilber H, Hughes T, Taylor R 1977 *Earthq Eng. Struct. D* **5** 283
- [3] Newmark N M 1959 *J. Eng. Mech. Div. -ASCE* **85** 67
- [4] Cardona A, Géradin M 1989 *Comput. Struct.* **33** 801
- [5] Negrut D, Rampallir R, Ottarsson G 2007 *J. Comput. Nonlin. Dyn.* **2** 73
- [6] Laurent O, Negrut D 2007 *Electron Trans. Numer. Ana.* **6** 190
- [7] Chung J, Hulbert G 1993 *J. Appl. Mech.* **60** 371
- [8] Hussein B A, Negrut D, Ahmed A 2008 *Nonlinear Dynam.* **54** 283
- [9] Shabana A A, Hussein B A 2009 *J. Sound Vib.* **327** 557
- [10] Hussein B A, Shabana A A 2011 *Nonlinear Dynam.* **65** 369
- [11] Pan Z K, Zhao W J, Hong J Z, Liu Y Z 1996 *Adv. Mech.* **26** 28 (in Chinese) [潘振宽, 赵维加, 洪嘉振, 刘延柱 1996 力学进展 **26** 28]
- [12] Wang Q, Lu Q S 2011 *Adv. Mech.* **31** 9 (in Chinese) [王琪, 陆启韶 2011 力学进展 **31** 9]
- [13] Ding J Y, Pan Z K 2013 *Engineer. Mech.* **30** 380 (in Chinese) [丁洁玉, 潘振宽 2013 工程力学 **30** 380]
- [14] Ma X T, Chen L P, Zhang Y Q 2009 *J. Syst. Simulat.* **21** 6373 (in Chinese) [马秀腾, 陈立平, 张云清 2009 系统仿真学报 **21** 6373]
- [15] Ma X T, Zhai Y B, Luo S Q 2011 *J. Southwest Jiaotong Univ. (Natural Science Edition)* **33** 151 (in Chinese) [马秀腾, 翟彦博, 罗书强 2011 西南交通大学学报 (自然科学版) **33** 151]
- [16] Zhang L, Zhang D G 2016 *J. Mech. Engineer.* **52** 79 (in Chinese) [张乐, 章定国 2016 机械工程学报 **52** 79]
- [17] Zhang L, Zhang D G 2016 *Nonlinear Dynam.* **85** 263
- [18] Kan Z Y, Peng H J, Chen B S, Zhong W X 2015 *Chin. J. Computat. Mech.* **32** 707 (in Chinese) [阚子云, 彭海军, 陈飙松, 钟万勰 2015 计算力学学报 **32** 707]
- [19] Baumgarte J 1972 *Comput. Method. Appl. M* **1** 1
- [20] Lin S T, Huang J N 2000 *J. Guid. Control Dynam.* **23** 566
- [21] Lin S T, Huang J N 2002 *J. Mech. Design* **124** 633
- [22] Duan Y C 2012 *Ph. D. Dissertation* (Nanjing: Nanjing University of Science & Technology) (in Chinese) [段玥晨 2012 博士学位论文 (南京: 南京理工大学)]
- [23] Wu S B, Zhang D G 2011 *J. Vib. Engineer.* **24** 1 (in Chinese) [吴胜宝, 章定国 2011 振动工程学报 **24** 1]
- [24] Liu J Y, Hong J Z 2002 *Chin. J. Solid Mech.* **23** 159 (in Chinese) [刘锦阳, 洪嘉振 2002 固体力学学报 **23** 159]
- [25] Gear C W, Gupta G K, Leumkuhler B 1985 *J. Comput. Appl. Math.* **12** 77

Application of Hilber-Hughes-Taylor- α method to dynamics of flexible multibody system with contact and constraint*

Guo Xian¹⁾ Zhang Ding-Guo^{1)†} Chen Si-Jia²⁾

1) (School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

2) (Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China)

(Received 12 March 2017; revised manuscript received 7 June 2017)

Abstract

Numerical characteristics of the Hilber-Hughes-Taylor- α (HHT- α) method for the differential-algebraic equations (DAEs) in impact dynamics of flexible multibody systems are investigated. The research is based on a dynamic process of a flexible beam rotating about a fixed axis, which is under the action of gravity and collides with a rigid plane. Therefore, the dynamic transformation and solution of flexible multibody system are divided into two parts. The Lagrange's equations of the second kind are used to derive the dynamic equations before and after impact, whereas the contact constraint method (CCM) is adopted to simulate the contact process. Compared with other methods, the CCM can describe the contact process accurately and avoid choosing the additional parameters. A set of the differential equations are transformed into a set of the DAEs due to the added constraint equations into impact process. Normally the dynamic equations of the flexible multibody system are index-3 DAEs. Solving a system of the index-3 DAEs directly by an integration algorithm would be subject to ill-conditioning and poor global convergence properties, so it is reasonable to find the methods that avoid both drawbacks and dependence on the constraint information. In order to solve this complex process, the HHT- α method is used in the impact dynamic simulation by introducing the Gear-Gupta-Leimkuhler formulation. The coefficient α of the HHT- α method can be used to control the numerical dissipation, and it also represents asymptotic annihilation of the high frequency response. The smaller the value of α , the more the damping is induced in the numerical solution. The Baumgarte's stabilization method is the most famous one for index-3 DAEs. Unfortunately, no general way can be adopted to determine the coefficients of the Baumgarte's stabilization method. It is the main reason for the numerical stability problems. It is necessary to study the influences of coefficients of the former two methods. Simultaneously, the simulation results from the HHT- α method are compared with those from the Baumgarte's stabilization method to calculate the CCM model, and the Newmark method is used to solve the ODEs by using the continuous contact force model. The influence of the modal truncation N on the numerical method is also taken into account. Furthermore, the influences of N and the coefficient α of HHT- α method on the velocity and acceleration constraints in the multibody system are analyzed. Results have shown that the choice of the stabilization coefficients exerts a greater influence on the simulation results, such as the dynamic responses and the constraints, than that of the coefficient α . Meanwhile, the HHT- α method has an influence on the choice of coefficient α and numerical damping properties. This numerical damping property can reduce the effect of high order modes induced by impact. Finally, the increase of N causes the sharpening default of both velocity and acceleration constraints.

Keywords: flexible multibody systems, impact, Hilber-Hughes-Taylor- α method, Baumgarte's stabilization method

PACS: 45.10.-b, 05.45.-a, 02.70.-c

DOI: 10.7498/aps.66.164501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272155, 11302192) and the Fundamental Research Funds for Central Universities (Grant No. 30917011103).

† Corresponding author. E-mail: zhangdg419@njtu.edu.cn