

非正交多松弛系数轴对称热格子 Boltzmann 方法

王佐 张家忠 王恒

Non-orthogonal multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for axisymmetric thermal flows

Wang Zuo Zhang Jia-Zhong Wang Heng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 044701 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.044701

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.044701>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I4>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于二维光滑粒子法的流体仿真方法

[A fluid simulation method based on two-dimensional smoothed particle hydrodynamics](#)

物理学报.2016, 65(24): 244701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.244701>

基于格子玻尔兹曼方法的一类 FitzHugh-Nagumo 系统仿真研究

[Numerical simulation of a class of FitzHugh-Nagumo systems based on the lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2016, 65(15): 154701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.154701>

探空温度传感器的计算流体动力学分析与实验研究

[Computational fluid dynamics analysis and experimental study of sounding temperature sensor](#)

物理学报.2016, 65(11): 114701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.114701>

基于间断有限元方法的并列圆柱层流流动特性

[Numerical simulation of laminar flow past two side-by-side cylinders by discontinuous Galerkin method](#)

物理学报.2016, 65(8): 084701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.084701>

三角波脉动流通栓的晶格玻尔兹曼方法模型

[Triangle wave pulsating flow effect on thrombus simulated by the lattice Boltzmann method](#)

物理学报.2016, 65(7): 074701 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.65.074701>

非正交多松弛系数轴对称热格子 Boltzmann 方法*

王佐 张家忠† 王恒

(西安交通大学能源与动力工程学院, 西安 710049)

(2016 年 9 月 3 日收到; 2016 年 11 月 22 日收到修改稿)

提出了一种模拟轴对称热流动的非正交多松弛系数格子 Boltzmann (MRT-LB) 模型. 通过采用非正交转换矩阵, 建立了基于 D2Q9 离散速度的求解流场的 MRT-LB 模型和基于 D2Q5 离散速度的求解温度场的 MRT-LB 模型. Chapman-Enskog 分析表明, 该模型可以恢复对应的柱坐标下的宏观连续方程、动量方程和能量方程. 与现有的轴对称 MRT-LB 模型相比, 本文采用的非正交转换矩阵中含有更多的零元素, 因而具有更高的计算效率. 采用本文模型对几种典型的轴对称热流动问题, 包括热 Womersley 流动、竖直圆柱体内的 Rayleigh-Bénard 对流和环形柱体内的自然对流进行了数值模拟, 通过等温线图和流线图以及定量数据的对比, 验证了本文模型的可行性和可靠性. 并且数值模拟结果表明, 相对现有模型, 本文模型具有更好的数值稳定性和计算效率.

关键词: 轴对称热流动, 格子 Boltzmann 方法

PACS: 47.11.-j, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.66.044701

1 引言

轴对称流动在换热器、太阳能设备、电子器件冷却等工业领域有着重要应用. 近年来有许多文献对轴对称流动换热现象进行了数值研究^[1,2]. 格子 Boltzmann (LB) 方法作为一种新兴的数值方法, 由于其分子动力学背景, 具有简单高效、边界处理简单、并行性强等特点, 在许多领域获得了重要应用^[3-5]. 其中单松弛系数模型格子 Boltzmann (SRT-LB, 也称作 LBGK) 模型由于其实现简单, 具有最为广泛的应用. 近年来, 具有更加合理的理论基础的多松弛系数格子 Boltzmann (MRT-LB) 模型也取得了飞速发展^[6,7].

截止目前已有大量研究致力于将 LB 推广到轴对称流动问题的研究. Halliday 等^[8]首先基于宏观柱坐标下的 Navier-Stokes (NS) 方程提出了一种

适用于轴对称流动的 LB 模型. 随后, Lee 等^[9]发现 Halliday 等^[8]的模型缺失了一些径向速度相关项, 不能正确恢复宏观的柱坐标下的 NS 方程. 为克服此缺点, Lee 等^[9]提出了一种新的轴对称 LB 模型. 此后, Reis 和 Phillips^[10,11]对 Lee 等^[9]的模型进行了部分改进. 但这些模型中均存在梯度项, 对梯度项采用差分方法处理, 降低了模型的数值准确性和稳定性, 破坏了 LB 固有的计算局部化特性. 与前面几个基于宏观柱坐标下的 NS 方程推导的 LB 模型不同, Guo 等^[12]直接从描述柱坐标流动的 Boltzmann 方程出发, 推导出了一一种柱坐标下的 LB 模型. 此模型不包含复杂的梯度项, 且其实施流程几乎与标准 LB 完全相同. Li 等^[13]从二维笛卡尔坐标下的标准 LB 模型出发, 将宏观柱坐标下的 NS 方程转化为类似标准的笛卡尔坐标下的 NS 方程加入与径向坐标 r 有关的多个源项的形式, 并提出了针对此种形式宏观方程的 LB 模型, 详细阐

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2012CB026002) 和国家重点科技支撑项目 (批准号: 2013BAF01B02) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jzzhang@mail.xjtu.edu.cn

述了从标准LB模型出发构造轴对称流动LB模型的过程. Zhou^[14]的模型对Li等^[13]的模型进行了改进.

以上模型均针对等温流场, 为发展非等温的轴对称LB模型, Peng等^[15]提出了一种采用LB模型求解速度场, 而采用二阶差分方法求解温度场的混合模型. 然而, Huang等^[16]指出, 随着对流作用的增大, 对流项采用二阶差分方法容易导致发散, 并对此混合模型进行了改进. 然而, 采用混合模型在很大程度上丧失了LB简单易行的优势. Li等^[17]提出了一种求解温度场的双分布LB模型, 其基本思想与文献^[13]类似. Zheng等^[18]提出了另一种与Guo等^[12]的方法类似的更加简单的LB模型.

上述轴对称模型均采用LBGK, 即单松驰系数(SRT)碰撞模型. 在该模型中, 所有的物理量的弛豫时间均假设相同, 这显然与实际的物理过程不符. 2000年, Lallemand和Luo^[6]提出了一种多松驰系数LB模型(MRT-LB), 在该模型中, 通过引入转换矩阵和碰撞矩阵, 用不同的松驰系数来表示流体系统中不同物理量的弛豫. 与SRT-LB相比, MRT-LB显然具有更加合理的理论基础. 事实上, 大量的数值模拟结果表明, MRT-LB模型相对于SRT-LB模型具有更好的数值稳定性和边界处理准确性^[5]. 由于这些优点, MRT-LB模型先后被应用到流动传热^[19]、多孔介质流动^[20]、多相流^[5]和微尺度流动等^[21]领域. 这些MRT-LB模型均求解二维笛卡尔坐标下流体相关问题. 2010年, Li等^[13]和Wang等^[22]将MRT-LB模型推广到轴对称流动领域, 几乎同时提出了针对柱坐标下轴对称流动的不同MRT-LB模型.

现有的所有MRT-LB模型均建立在正交化转换矩阵的基础上, 该矩阵通过Gram-Schmidt正交化方法获得, 相应的这些MRT-LB模型可称作正交MRT-LB模型. 然而, 最近Premnath和Banerjee^[23]以及Geier等^[24]指出, Gram-Schmidt正交化方法并不是获得转换矩阵的惟一途径, 并且提出了一种适用于二维笛卡尔坐标流场的非正交MRT-LB模型. 随后, Liu等^[25]根据这一思想, 进一步提出了一种适用于二维笛卡尔坐标下的温度场的非正交MRT-LB模型. 与现有的正交MRT-LB模型相比, 非正交的MRT-LB模型中转换矩阵具有更多的零元素, 因而计算效率获得一定程度上的提高^[25].

基于前人的工作, 本文提出了一种针对轴对称热流动的MRT-LB模型, 该模型中流场和温度场均采用非正交转换矩阵, 相较于现有的模型, 本文模型中的转换矩阵含有更多的零元素, 这使得模型在保持数值稳定性良好的前提下其演化过程更加高效.

2 双分布轴对称MRT-LB模型

2.1 控制方程

柱坐标下的流动传热问题是一个三维问题, 然而, 当周向速度为零时, 流动可简化为二维问题, 其控制方程为^[12,17]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] + a_x, \quad (2)$$

$$\frac{du_r}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} \right] + a_r, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} \\ = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right) + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, x 和 r 分别为轴向和径向坐标; u_x , u_r 分别为轴向和径向速度; a_x , a_r 分别为轴向和径向方向的外力; ρ 为密度, T 为温度, ν 为黏性系数, k 为热扩散系数. 对于任意变量 ϕ ,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(u_x \phi)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r \phi)}{\partial r}.$$

2.2 求解速度场的MRT-LB模型

格子Boltzmann方法通过描述具有离散速度的流体粒子分布函数的变化过程来反映流体粒子的运动过程. 基于非正交转换矩阵, 本文提出一种适用于轴对称流场的多松驰系数格子Boltzmann方法, 其演化方程为

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + \mathbf{e}\delta_t, t + \delta_t) - f(\mathbf{x}, t) \\ = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{S} [\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{(eq)}(\mathbf{x}, t)] \\ + \delta_t \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{S}}{2} \right) \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ 为节点 $\mathbf{x}$ 在 t 时刻的密度分布函数; $\mathbf{m}$ 和 $\mathbf{m}^{(\text{eq})}$ 分别为 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{f}^{(\text{eq})}$ 对应的矩空间分布函数, 其中 $\mathbf{f}^{(\text{eq})}$ 为密度平衡态分布函数; $\mathbf{e}$ 为离散速度方向矢量; $\mathbf{S} = \text{diag}(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)$ 为松弛系数矩阵; δ_t 为时间步长; $\mathbf{M}$ 为转换矩阵; $\mathbf{I}$ 为单位矩阵; $\mathbf{F}$ 为外力项. 对于 D2Q9 离散速度模型, 离散速度 $\mathbf{e}$ 为

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & (i = 0), \\ c \left(\cos \left[(i-1) \frac{\pi}{2} \right], \sin \left[(i-1) \frac{\pi}{2} \right] \right) & (i = 1-4), \\ \sqrt{2}c \left(\cos \left[(2i-1) \frac{\pi}{2} \right], \sin \left[(2i-1) \frac{\pi}{2} \right] \right) & (i = 5-8). \end{cases} \quad (6)$$

转换矩阵 $\mathbf{M}$ 为 [23,25]

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

通过转换矩阵可将粒子密度分布函数投影到速度矩空间. 对于 D2Q9 模型, 矩空间分布函数及其平衡态分布函数的计算如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{M} \mathbf{f} \\ &= r(\rho, j_x, j_r, e, p_{xx}, p_{xr}, q_x, q_r, \varepsilon)^T, \\ \mathbf{m}^{(\text{eq})} &= \mathbf{M} \mathbf{f}^{(\text{eq})} \\ &= r(\rho, j_x, j_r, e^{(\text{eq})}, p_{xx}^{(\text{eq})}, p_{xr}^{(\text{eq})}, q_x^{(\text{eq})}, q_r^{(\text{eq})}, \varepsilon^{(\text{eq})})^T \\ &= r\rho \left(1, u_x, u_r, \frac{2}{3} + \mathbf{u}^2, u_x^2 - u_r^2, u_x u_r, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{3} u_r, \frac{1}{3} u_x, \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \mathbf{u}^2 \right)^T, \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_8)^T$, $\mathbf{f}^{(\text{eq})} = (f_0^{(\text{eq})}, f_1^{(\text{eq})}, \dots, f_8^{(\text{eq})})^T$, $\mathbf{u} = (u_x, u_r)^T$.

与现有的正交 MRT-LB 模型中通过 Gram-Schmidt 正交化方法得到的转换矩阵不同, 本文

模型中采用的转换矩阵的获得无需采用 Gram-Schmidt 正交化过程 [23-25], 相应的 MRT-LB 模型可称作非正交 MRT-LB 模型. 显然, 与现有的转换矩阵相比, 本文模型中的矩阵具有更多的零元素, 有望获得更高的计算效率.

低 Ma 数条件下, 平衡态分布函数可近似为

$$f_i^{(\text{eq})} = r\rho w_i \left[1 + \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c_s^2} \right], \quad (10)$$

其中, $w_0 = 4/9$, $w_{1-4} = 1/9$, $w_{5-8} = 1/36$, $c_s = \sqrt{RT} = 1/\sqrt{3}$ 为格子声速, R 和 T 分别为气体常数和温度.

外力项 $\mathbf{F}$ 可显式的表示为

$$\mathbf{F} = r\rho \begin{bmatrix} 0 \\ F_x \\ F_r \\ 2u_x F_x + 2u_r F_r \\ 2u_x F_x - 2u_r F_r \\ u_x F_r + u_r F_x \\ \frac{1}{3} F_r \\ \frac{1}{3} F_x \\ \frac{2}{3} (u_x F_r + u_r F_x) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中, $F_x = a_x$, $F_r = a_r + \frac{RT}{r} \left[1 + \frac{2(\tau_f - 0.5)u_r}{r} \right]$.

MRT-LB 方法中分布函数的演化与 LBGK 模型类似, 同样可分为碰撞和迁移两步, 其中碰撞在矩空间进行, 而迁移在速度空间进行:

碰撞

$$\mathbf{m}^* = \mathbf{m} - \mathbf{S}(\mathbf{m} - \mathbf{m}^{(\text{eq})}) + \delta_t \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{S}}{2} \right) \mathbf{F}, \quad (12)$$

迁移

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta_t, t + \delta_t) = f_i^*(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

其中, 碰撞后的分布函数 $f^* = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{m}^*$, 其中 $\mathbf{m}^*$ 表示碰撞后的矩空间分布函数.

获得密度分布函数后, 宏观量密度 ρ 、速度 $\mathbf{u}$ 和黏性系数 ν 可通过密度分布函数计算:

$$\rho = \frac{1}{r} \sum_i f_i, \quad (14)$$

$$u_x = \frac{1}{r} \left[\sum_{i=0}^8 e_{ix} f_i / \rho + \frac{\delta_t}{2} r a_x \right], \quad (15)$$

$$u_r = \frac{1}{r^2 + (\tau_f - 0.5)\delta_t RT}$$

$$\times \left[\sum_{i=0}^8 e_{ir} f_i / \rho + \frac{\delta_t}{2} r a_r + \frac{\delta_t}{2} r R T \right], \quad (16)$$

$$\nu = c_s^2 \left(\tau_f - \frac{1}{2} \right) \delta_t, \quad (17)$$

其中, $\tau_f = \frac{1}{s_4} = \frac{1}{s_5}$.

Chapman-Enskog 多尺度分析表明, 此模型可以准确恢复对应的宏观柱坐标下的质量和动量守恒方程 (见附录 A).

2.3 求解温度场的 MRT-LB 模型

在 LB 方法中, 二维的温度场可以用 D2Q4, D2Q5 或者 D2Q9 离散速度求解. 一般来说, 采用 D2Q4 和 D2Q5 等计算量相对较小的离散速度模型足够对标量场进行准确模拟. 本文采用 D2Q5 离散速度对温度场进行离散.

温度分布函数的演化方程为

$$\begin{aligned} & \mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{e} \delta_t, t + \delta_t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \\ &= -\mathbf{N}^{-1} \boldsymbol{\Theta} [\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{n}^{(\text{eq})}(\mathbf{x}, t)] \\ &+ \mathbf{N}^{-1} \delta_t \boldsymbol{\Psi}, \end{aligned} \quad (18)$$

其中, $\mathbf{h}$ 为温度分布函数, $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n}^{(\text{eq})}$ 分别为 $\mathbf{h}$ 和 $\mathbf{h}^{(\text{eq})}$ 对应的矩空间分布函数, 其中 $\mathbf{h}^{(\text{eq})}$ 为温度平衡态分布函数, $\boldsymbol{\Psi}$ 为源项, $\mathbf{N}$ 转换矩阵, $\boldsymbol{\Theta} = \text{diag}(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)^{-1}$ 为松弛系数矩阵.

D2Q5 离散速度 $\{\mathbf{e}_i | i = 0, 1, \dots, 4\}$ 为

$$\mathbf{e}_i = \begin{cases} (0, 0) & (i = 0), \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2]) & (i = 1-4); \end{cases} \quad (19)$$

转换矩阵 $\mathbf{N}$ 为 [25]

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (20)$$

平衡态分布函数为

$$h_i^{(\text{eq})} = \begin{cases} r(1-\varpi)T & (i = 0), \\ \frac{1}{4}r\varpi T + \frac{1}{2}r(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})T & (i = 1-4), \end{cases} \quad (21)$$

其中, $\varpi \in (0, 1)$ 为 D2Q5 离散速度模型中的参数. 在本文模型中, $\varpi = 1/2$.

与标准笛卡尔坐标下的能量方程相比, 柱坐标下的能量方程等号右边多了一项 $\frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r}$, 这一项在本文模型中作为源项处理. 为正确恢复宏观柱坐标下的能量方程, 源项 $\boldsymbol{\Psi}$ 采取如下形式:

$$\boldsymbol{\Psi} = (0, 0, kT\sigma_2, 0, 0)^T. \quad (22)$$

与求解速度场的 MRT-LB 模型类似, 可通过转换矩阵可将粒子温度分布函数 $\mathbf{h}^{(\text{eq})}$ 投影到矩空间:

$$\mathbf{n}^{(\text{eq})} = \mathbf{N} \mathbf{h}^{(\text{eq})} = rT(1, u_x, u_r, \varpi, 0)^T. \quad (23)$$

在实际应用中, 求解温度场的 MRT-LB 其演化过程与求解速度场的 MRT-LB 完全类似, 即碰撞在矩空间进行, 而迁移在速度空间进行.

宏观量计算如下:

$$T = \sum_{i=0}^4 h_i, \quad (24)$$

$$k = \frac{\varpi}{2} \left(\tau_T - \frac{1}{2} \right) \delta_t, \quad (25)$$

其中, $\tau_T = \frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma_2}$.

通过 Chapman-Enskog 多尺度展开, 可以证明本文模型可以恢复对应的宏观轴对称能量方程 (见附录 B).

3 数值模拟结果及讨论

本节采用本文所提出的模型对几种典型的轴对称热流动进行数值模拟以验证模型的可行性和准确性, 包括热 Womersley 流动、竖直柱体空腔中的 Rayleigh-Bénard 流动和竖直环形柱体内的自然对流. 计算中各松弛系数选取如下: $s_0 = s_1 = s_2 = 1.0$, $s_3 = s_6 = 1.1$, $s_7 = s_8 = 1.2$, s_4 和 s_5 根据 (17) 式计算. $\sigma_0 = 1.0$, $\sigma_3 = \sigma_4 = 1.5$, σ_1 和 σ_2 根据 (25) 式计算. 数值模拟中温度场和速度场的 MRT-LB 模型通过 Prandtl 数和松弛系数进行耦合:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_4} &= \frac{1}{s_5} = \tau_f = 3\nu + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{\sigma_1} &= \frac{1}{\sigma_2} = \tau_T = \frac{1}{2} + \frac{4\nu}{Pr}, \end{aligned}$$

其中, $Pr = \nu/k$ 为 Prandtl 数. 固体边界采用非平衡外推方法 [26] 进行处理.

3.1 热 Womersley 流动

本节首先采用本文模型对热 Womersley 流动问题进行模拟. 恒定壁温下的 Womersley 流动是工程中常见的一种流动现象. 该流动是由周期性外力驱动的平直管道中的流动. 周期性外力 $a_x = G \cos(\omega t)$, 其中 G 为外力幅值, $\omega = 2\pi/T_p$ 为角频率, T_p 为周期. Womersley 流动的特征数为 Reynolds 数和 Womersley 数, 分别定义如下:

$$Re = 2u_0 R/\nu, \quad \alpha = R\sqrt{\omega/\nu}, \quad (26)$$

其中, R 为管道半径, ν 为流体黏性, $u_0 = GR^2/4\nu$ 为特征速度.

Womersley 流动的轴向速度的解析解为

$$u_x(r, t) = \text{Real} \left\{ \frac{G}{i\omega} \left[1 - \frac{J_0(r\phi/R)}{J_0(\phi)} \right] e^{i\omega t} \right\}, \quad (27)$$

其中, i 为虚数单位, $\phi = \alpha(i-1)/2$, J_0 为第一类零阶 Bessel 函数.

温度场的解析解为

$$T(r, t) = T_w. \quad (28)$$

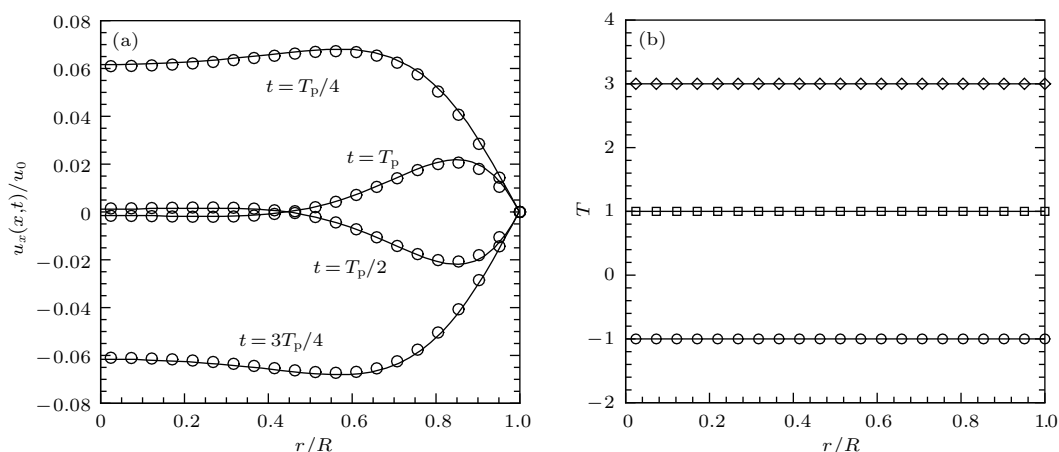


图1 Womersley 流动轴向速度和温度剖面图 (a) 不同时刻速度剖面图; (b) 不同壁面温度时温度剖面图

Fig. 1. Axial velocity profiles of Womersley flow: (a) Velocity profiles at different times; (b) temperature profiles at different wall temperatures.

为验证本文模型相对 LBGK 模型的数值稳定性, 将两模型进行了对比. 首先采用现有的轴对称 LBGK 模型^[23]求解流场和温度场. 参数选取以及计算网格均与本节前面所述相同. 对热 Womersley 流动进行模拟, 通过逐步减小黏性系数, 发现在黏性系数 $\nu = 2.76 \times 10^{-2}$ 时 LBGK 模型发散. 而采用本文模型, 当黏性系数 $\nu = 2.76 \times 10^{-2}$ 时, 模型依然稳定并给出准确结果 (见图 2(a)). 进一步, 黏性系数取更小的值时, 例如 $\nu = 2.0 \times 10^{-2}$, 本

计算中 Re 和 α 分别取为 1200 和 8, Pr 取为 0.1, 壁面温度分别取为 $T_w = -1, 1$ 和 3, 流体初始温度取为 0. 经过网格无关性验证, 计算网格取为 $N_x \times N_r = 82 \times 42$. 流动在经过 10 个周期后达到相对的稳定状态, 此时轴向速度和温度的分布与解析解应当相同.

图 1(a) 为流动达到相对稳定状态后一个周期内 $t = T_p/4, T_p/2, 3T_p/4$ 和 T_p 时刻轴向速度剖面图和相应解析解的对比图 (为节省篇幅, 由流动的轴对称特征, 图 1(a) 只展示了关于轴心 $r = 0$ 对称的 1/2 区域, 后面的图示类似处理). 由图 1(a) 可见, 本文模型计算结果与解析解符合得很好. 图 1(b) 显示了壁面温度分别为 $T_w = -1, 1$ 和 3, 流场初始温度取为 0, 流动达到相对稳定状态后温度场剖面图与解析解对比情况, 其中圆形、正方形和菱形符号分别对应 $T_w = -1, 1$ 和 3 时的数值解, 实线为相应的解析解. 可以看出温度场的计算结果也与解析解完全相符.

文模型依然稳定 (见图 2(b)). 数值实验表明本文模型相对 LBGK 模型具有更好的数值稳定性. 值得指出的是, 虽然热 Womersley 流动中速度场和温度场是相互独立的, 但对于具体流动介质, 流体黏性和热扩散系数通过 Pr 数相互关联 (例如本例中 $Pr = \nu/k = 0.1$), 由于求解速度场的 MRT-LB 模型和求解温度场的 MRT-LB 模型相互耦合, 对于速度场数值稳定性的验证也间接验证了温度场模型的数值稳定性.

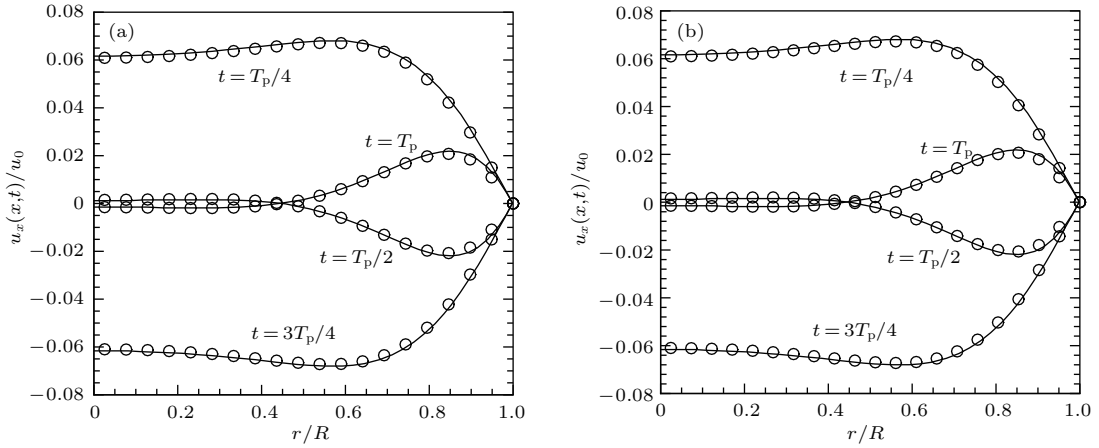

 图2 低黏性系数时本文模型所得 Womersley 流动轴向速度剖面图 (a) $\nu = 2.76 \times 10^{-2}$; (b) $\nu = 2.0 \times 10^{-2}$

 Fig. 2. Axial velocity profiles of Womersley flow at low viscosities: (a) $\nu = 2.76 \times 10^{-2}$; (b) $\nu = 2.0 \times 10^{-2}$.

3.2 竖直圆柱腔体中的 Rayleigh-Bénard 流动

Rayleigh-Bénard 流动是常见的一种柱体内的自然对流现象, 许多文献对此进行过数值研究 [18, 27]. 自然对流的特征数为 Ra 数以及 Pr 数:

$$Ra = g\beta\Delta TL^3 Pr/\nu^2, \quad Pr = \nu/k,$$

其中, g 为重力加速度, β 为热膨胀系数, L 为特征尺寸. 本文引入 Boussinesq 假设, 热浮升力为 $\rho a = -\rho g(T - T_r)$, 其中 T_r 为参考温度.

在竖直圆柱腔体中的 Rayleigh-Bénard 自然对流问题中, 充满空气的柱体腔体高为 H , 半径为 R , 且 $H/R = 1$. 柱体腔体上下面水平恒温, 温度分别为 T_c 和 T_h , 且 $T_c < T_h$; 其余壁面绝热. 计算中取 $T_c = 0$, $T_h = 1$, 参考温度 $T_r = (T_i + T_o)/2$, $Pr = 0.7$, $Ra = 5000$, 重力加速度 g 沿轴向负方向. 对于自然对流, 根据 (17) 式和 (25) 式以及 Ra , Pr 的定义, 模型中未知的松弛系数可表示为

$$\begin{aligned} \tau_f &= \frac{1}{s_{4,5}} = \frac{1}{2} + MaL\sqrt{\frac{3Pr}{Ra}}, \\ \tau_T &= \frac{1}{\sigma_{1,2}} = \frac{1}{2} + \frac{4(\tau_f - 0.5)}{3Pr}, \end{aligned} \quad (29)$$

其中, L 为特征尺寸, 本例中取为 H , Ma 为 Mach 数, 为满足不可压流动假设, 本文取 $Ma = 0.1$.

计算中收敛标准定义为

$$\frac{\sum_{ij} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n|}{\sum_{ij} |u_{ij}^{n+1}|} \leq 1.0 \times 10^{-9}, \quad (30)$$

其中, $u_{ij}^n = u(x, r, n\delta_t)$.

首先取流场的初始温度为 0, 经过网格无关性验证, 计算网格取为 200×100 . 图 3(a) 和图 3(b) 分别显示了采用本文模型计算的等温线和流线图 (为节省篇幅, 根据轴对称特性只显示了 1/2 区域). 在流场温度初始温度为 0 时, 腔体底部温度高于周围介质温度, 在重力作用下, 空气由腔体底部沿腔体中轴线向上运动, 而在圆周壁面附近由上部向下部运动, 形成稳定的涡. 然后取流场的初始温度为 1, 计算网格同样取为 200×100 . 图 4(a) 和图 4(b) 分别显示了流动达到稳定状态时的等温线以及流线图. 可以看出, 此时的流动特征正好与初始温度为 0 时相反, 即空气沿腔体中轴线由上向下运动, 而在圆周壁面附近由下向上运动. 这些流动特征与文献 [18] 以及文献 [27] 完全相符.

为进一步对算法进行定量考核, 表 1 给出了两种情况下沿中轴线上的速度最大值, 并与文献 [18] 以及文献 [27] 的计算结果进行了对比, 其中无量纲速度定义为 $V = u_{r\max}/\sqrt{gH\beta\Delta T}$. 由表 1 可以看出采用本文模型计算所得结果与现有文献符合得很好.

表 1 本文模型获得的中轴线上最大速度与已有研究结果的对比

Table 1. Comparisons of the maximum velocity in the present study with those of the previous studies.

Ra		初始温度为 0	初始温度为 1
5000	参考文献 [18]	0.3523	0.3523
	参考文献 [27]	0.353	0.353
	本文模型	0.3521	0.3522

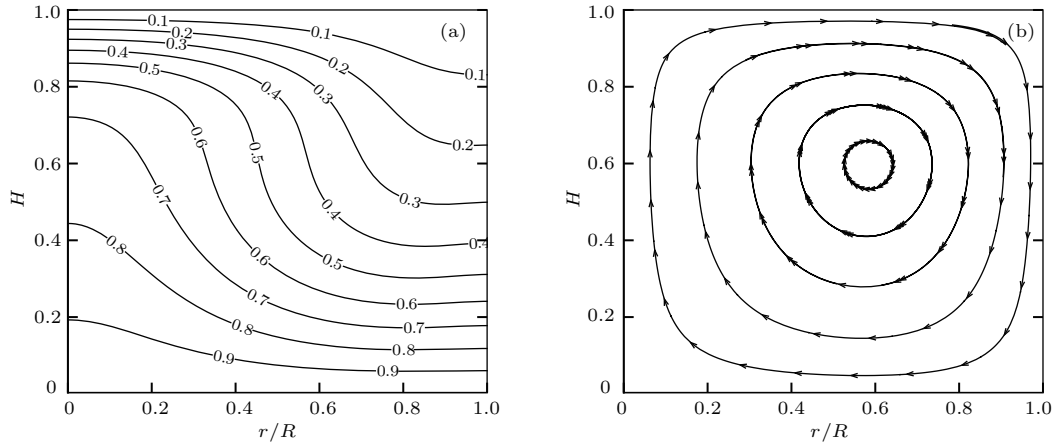


图3 初始温度为0时的等温线和流线 (a) 等温线; (b) 流线

Fig. 3. Isotherms and streamlines as the initial temperature is 0: (a) Isotherms; (b) streamlines.

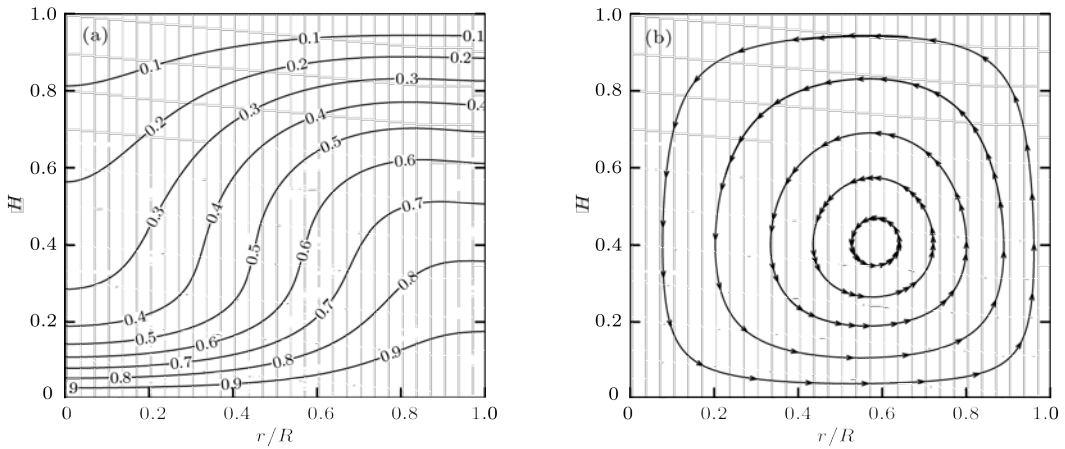


图4 初始温度为1时的等温线和流线 (a) 等温线; (b) 流线

Fig. 4. Isotherms and streamlines as the initial temperature is 1: (a) Isotherms; (b) streamlines.

3.3 竖直环形柱体的自然对流

本小节采用本文模型对竖直环形柱体内的自然对流进行数值模拟. 环形柱体内的自然对流是一个广泛研究的问题[17,28–30]. 流动区域由高度为 H 的内外两个竖直同心圆柱之间的封闭区域构成, 内外圆柱的半径分别为 r_i 和 r_o , 其中 $r_o = 2r_i$, 且 $H/r_i = 2$. 内外圆柱壁面温度分别为 T_i 和 T_o ($T_i > T_o$), 其他两个水平边界均为绝热边界. 计算中分别取 $Ra = 10^3, 10^4$ 和 10^5 , 经过网格无关性验证, 对应的计算网格为 $100 \times 200, 200 \times 400$ 以及 300×600 . 其他参数的选择如下: $T_o = 0, T_i = 1$, 参考温度 $T_r = (T_i + T_o)/2$, $Pr = 0.712$, 重力加速度 g 沿轴向负方向. 竖直环形柱体自然对流的流动特征数、松弛系数的计算以及收敛标准与3.2节相

同, 不同的是特征尺寸 $L = r_o - r_i$.

图5给出了 $Ra = 10^3, 10^4$ 和 10^5 时的等温线图. 由图5可见, 当 Ra 较小时, 腔体内以热传导为主, 表现为等温线在腔体内几乎均匀分布且弱对流作用导致的等温线变形不大. 随着 Ra 增大, 对流开始起主要作用, 导致腔体中央的等温线扭曲程度变大. 从图6的流线也可以看出, 随着 Ra 增大, 对流作用增强, 流动呈现出更加复杂的特征. 这些等温线图和流线图均与文献[17, 28–30]符合得很好.

为与前人研究结果做定量比较, 本文计算了内圆柱壁面的平均 Nu 数, 其中 Nu 数定义为 $Nu_i = -r_i \int_0^h (\partial_x T)_i / (T_i - T_o) dx$. 表2为采用本文模型获得的内圆柱壁面的 Nu 数与已有研究结果的对比, 可以看出符合良好, 证明了本文模型的准确性.

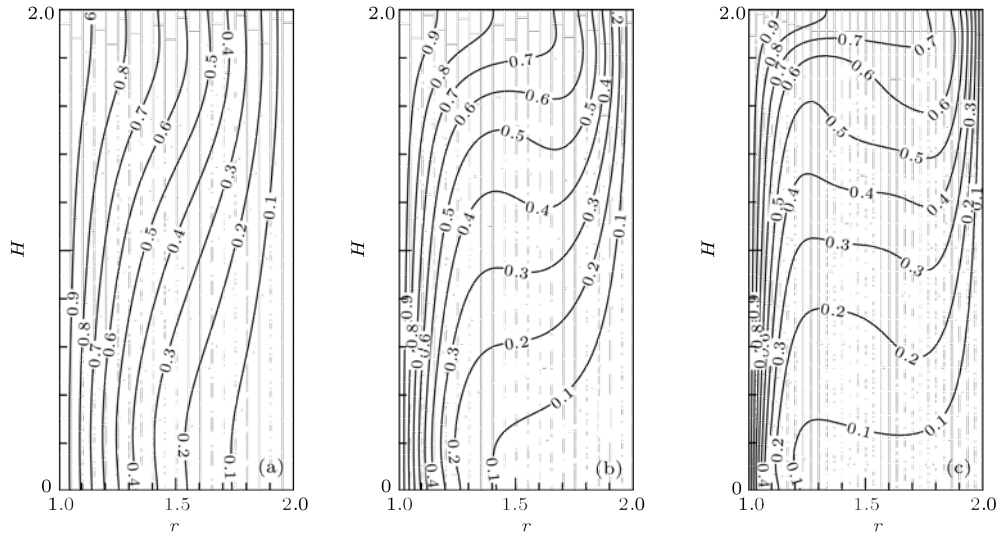


图5 不同 Ra 数时的等温线图 (a) $Ra = 10^3$; (b) $Ra = 10^4$; (c) $Ra = 10^5$

Fig. 5. Isotherms at different Ra numbers: (a) $Ra = 10^3$; (b) $Ra = 10^4$; (c) $Ra = 10^5$.

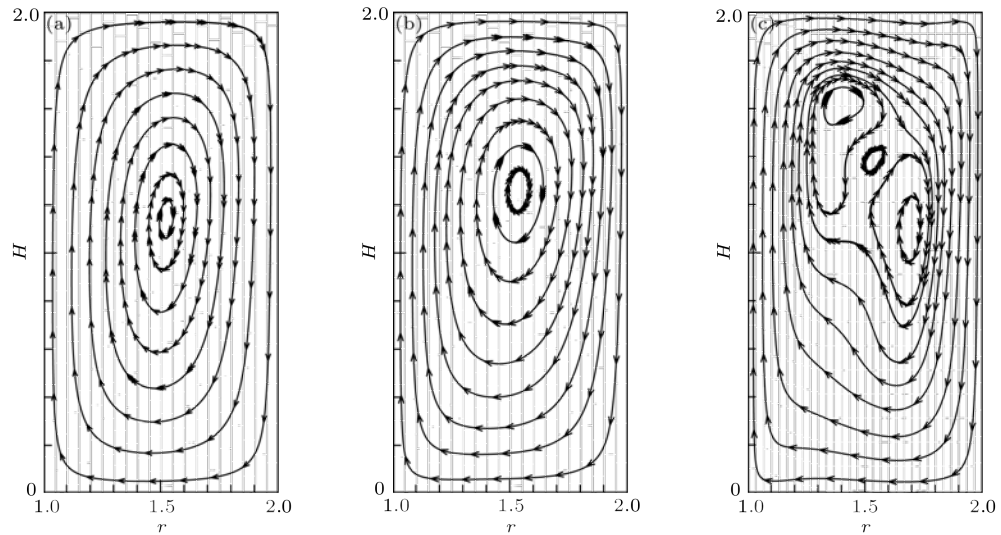


图6 不同 Ra 数时的流线图 (a) $Ra = 10^3$; (b) $Ra = 10^4$; (c) $Ra = 10^5$

Fig. 6. Streamlines at different Ra numbers: (a) $Ra = 10^3$; (b) $Ra = 10^4$; (c) $Ra = 10^5$.

表2 本文模型获得的内圆柱壁面的 Nu 数与已有研究结果的对比

Table 2. Comparisons of the average Nusselt numbers in the present study with those of the previous studies.

Ra	参考文献 [17]	参考文献 [28]	参考文献 [29]	参考文献 [30]	本文模型
10^3	—	1.692	—	—	1.682
10^4	3.216	3.215	3.037	3.163	3.208
10^5	5.782	5.787	5.760	5.882	5.788

由于本文模型采用了非正交转换矩阵, 前文提到, 相对于现有的正交转换矩阵, 非正交转换矩阵具有更多的零元素, 理论上可以获得更高的数值计算效率. 本节采用竖直柱体环中的自然对流算例对本文模型和现有的基于正交矩阵的轴对称 MRT-

LB 模型^[22](其中, 温度场的求解采用文献[18]模型的 MRT 格式)进行对比. 计算中 $Ra = 10^3$, 10^4 和 10^5 的网格尺度分别为 100×200 , 200×400 以及 300×600 . 计算在同一台 3.40 GHz 主频的计算机上进行. 表 3 列出了现有模型和本文模型计算

耗时的对比. 由表 3 可见, 对于网格数较少的情况, 本文模型计算效率提高了 3.5%. 然而随着计算网格量的增大, 本文模型效率提高幅度变大, 对于 300×600 的计算网格, 相对现有模型, 本文模型效率提高了 4.6%. 可以预期, 对于对计算网格量要求更高的复杂流动, 本文模型将获得更高的效率, 特别是对于计算周期长的数值模拟, 计算时间的缩短将特别明显.

表 3 本文模型与现有模型的效率对比

Table 3. Comparisons of the computation efficiency of the present model with that of the existing model.

Ra	计算网格	现有模型 耗时/s	本文模型 耗时/s	效率提高 百分比
10^3	100×200	976	942	3.5%
10^4	200×400	16749	16045	4.2%
10^5	300×600	69683	66477	4.6%

4 结 论

本文提出了一种轴对称热流动的 MRT-LB 模型, 模型的速度场采用 D2Q9 离散速度求解, 温度场采用 D2Q5 离散速度求解. 本文模型的转换矩阵采用非正交转换矩阵, 相比现有 MRT-LB 模型的正交矩阵具有更多的零元素, 因此本文模型相比现有的轴对称 MRT-LB 模型具有更高的计算效率. Chapman-Enskog 多尺度分析表明, 本文模型可恢复对应的宏观柱坐标下的连续方程、动量方程以及能量方程. 通过对热 Womersley 流动、竖直圆柱腔体中的 Rayleigh-Bénard 对流和竖直环形柱体内的自然对流进行数值模拟, 证明了本文模型的可行性和准确性. 低黏性系数条件下的数值实验表明, 相对现有轴对称 LBGK 模型, 本文模型具有更好的数值稳定性. 且与现有的轴对称 MRT-LB 模型相比, 本文模型具有更高的计算效率.

附录 A 速度场 MRT-LB 模型的 Chapman-Enskog 多尺度分析

为证明本文模型可以正确恢复宏观的柱坐标下的 Navier-Stokes 方程, 采用 Chapman-Enskog 多尺度分析方法对求解速度场的 MRT-LB 模型进行分析. 首先对以下变量进行如下形式的多尺度展开:

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta_t, t + \delta_t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (\partial_t + \mathbf{e}_i \cdot \nabla)^n f_i(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A1a})$$

$$f_i = f_i^{(0)} + \varepsilon f_i^{(1)} + \varepsilon^2 f_i^{(2)} + \cdots, \quad (\text{A1b})$$

$$\partial_t = \varepsilon \partial_{t1} + \varepsilon^2 \partial_{t2}, \quad (\text{A1c})$$

$$\nabla = \varepsilon \nabla_1, \quad \mathbf{F} = \varepsilon \mathbf{F}_1, \quad (\text{A1d})$$

其中, ε 为与 Knudsen 数同量级的展开系数, 对于宏观尺度, $0 < \varepsilon \ll 1$.

将 (A1a)–(A1d) 式代入方程 (5) 中, 可得以下不同空间 (时间) 尺度上的方程:

$$O(\varepsilon^0) : \mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{m}^{(\text{eq})}, \quad (\text{A2a})$$

$$O(\varepsilon^1) : D_1 \mathbf{m}^{(0)} = -\mathbf{S}' \mathbf{m}^{(1)} + \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{S}}{2} \right) \mathbf{F}_1, \quad (\text{A2b})$$

$$O(\varepsilon^2) : \partial_{t2} \mathbf{m}^{(0)} + D_1 \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{S}}{2} \right) \mathbf{m}^{(1)} + \frac{\delta_t}{2} D_1 \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{S}}{2} \right) \mathbf{F}_1 = -\mathbf{S}' \mathbf{m}^{(2)}, \quad (\text{A2c})$$

其中,

$$D_1 = \partial_{t1} \mathbf{I} + \mathbf{C}_\alpha \partial_{\alpha 1},$$

$$\mathbf{C}_\alpha = \mathbf{M}(\mathbf{e}_{i\alpha} \mathbf{I}) \mathbf{M}^{-1},$$

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}/\delta_t,$$

$$\mathbf{m}^{(1)} = r(0, -\delta_t F_{x1}/2, -\delta_t F_{r1}/2, e^{(1)}, p_{xx}^{(1)}, p_{xr}^{(1)}, q_x^{(1)}, q_r^{(1)}, \varepsilon^{(1)})^T.$$

矩阵 $\mathbf{C} = (C_x, C_r)$ 可显式地表达为

$$\mathbf{C}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A3a})$$

$$\mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A3b})$$

由 (A2b) 式可以得到 t_1 时间尺度上的方程:

$$\begin{aligned}
 & r\partial_{t_1} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_r \\ \rho\left(\frac{2}{3} + \mathbf{u}^2\right) \\ \rho(u_x^2 - u_r^2) \\ \rho u_x u_r \\ \frac{1}{3}\rho u_r \\ \frac{1}{3}\rho u_x \\ \rho\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\mathbf{u}^2\right) \end{pmatrix} + r\partial_{x1} \begin{pmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x u_r \\ \frac{4}{3}\rho u_x \\ \frac{2}{3}\rho u_x \\ \frac{1}{3}\rho u_r \\ \rho u_x u_r \\ \rho\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\mathbf{u}^2\right) \\ \frac{1}{3}\rho u_x \end{pmatrix} \\
 & + \partial_{r1} \begin{pmatrix} r\rho u_r \\ r\rho u_x u_r \\ r\rho\left(\frac{1}{3} + u_r^2\right) \\ \frac{4}{3}r\rho u_r \\ -\frac{2}{3}r\rho u_r \\ \frac{1}{3}r\rho u_x \\ r\rho\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\mathbf{u}^2\right) \\ r\rho u_x u_r \\ \frac{1}{3}r\rho u_r \end{pmatrix} \\
 & = r \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\delta_t}{2}s'_1\rho F_{x1} \\ \frac{\delta_t}{2}s'_2\rho F_{r1} \\ -s'_3e^{(1)} \\ -s'_4p_{xx}^{(1)} \\ -s'_5p_{xr}^{(1)} \\ -s'_6q_x^{(1)} \\ -s'_7q_r^{(1)} \\ -s'_8\varepsilon^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{s_0}{2}\right)F_{01} \\ \left(1 - \frac{s_1}{2}\right)F_{11} \\ \left(1 - \frac{s_2}{2}\right)F_{21} \\ \left(1 - \frac{s_3}{2}\right)F_{31} \\ \left(1 - \frac{s_4}{2}\right)F_{41} \\ \left(1 - \frac{s_5}{2}\right)F_{51} \\ \left(1 - \frac{s_6}{2}\right)F_{61} \\ \left(1 - \frac{s_7}{2}\right)F_{71} \\ \left(1 - \frac{s_8}{2}\right)F_{81} \end{pmatrix}, \quad (\text{A4})
 \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{u}^2 = u_x^2 + u_r^2$, F_{01} — F_{81} 分别表示 t_1 时间尺度上的外力项 $\mathbf{F}_1$ 的对应分量.

由 (A2c) 式可以得到 t_2 时间尺度上的方程:

$$r\partial_{t_2}(\rho) = 0, \quad (\text{A5a})$$

$$\begin{aligned}
 & r\partial_{t_2}(\rho u_x) - \frac{\delta_t}{2}r\partial_{t_1}\left[\left(1 - \frac{s_1}{2}\right)\rho F_{x1}\right] \\
 & + r\partial_{x1}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_3}{2}\right)e^{(1)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_4}{2}\right)p_{xx}^{(1)}\right] \\
 & + \partial_{r1}\left[\left(1 - \frac{s_5}{2}\right)p_{xr}^{(1)}\right] + \frac{\delta_t}{2}\left\{\partial_{t_1}\left[\left(1 - \frac{s_1}{2}\right)F_{11}\right]\right. \\
 & + \partial_{x1}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_3}{2}\right)F_{31} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_4}{2}\right)F_{41}\right] \\
 & \left. + \partial_{r1}\left[\left(1 - \frac{s_5}{2}\right)F_{51}\right]\right\} = 0, \quad (\text{A5b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & r\partial_{t_2}(\rho u_r) - \frac{\delta_t}{2}r\partial_{t_1}\left[\left(1 - \frac{s_2}{2}\right)\rho F_{r1}\right] \\
 & + r\partial_{x1}\left[\left(1 - \frac{s_5}{2}\right)p_{xr}^{(1)}\right] \\
 & + \partial_{r1}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_3}{2}\right)e^{(1)} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_4}{2}\right)p_{xx}^{(1)}\right] \\
 & + \frac{\delta_t}{2}\left\{\partial_{t_1}\left[\left(1 - \frac{s_2}{2}\right)F_{21}\right] + \partial_{x1}\left[\left(1 - \frac{s_5}{2}\right)F_{51}\right]\right. \\
 & \left. + \partial_{r1}\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_3}{2}\right)F_{31} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_4}{2}\right)F_{41}\right]\right\} = 0, \quad (\text{A5c})
 \end{aligned}$$

其中, $e^{(1)}$, $p_{xx}^{(1)}$ 和 $p_{xr}^{(1)}$ 均为未知量, 需由 (A4) 式确定.

根据 (A4) 式第一、二和三行方程, 忽略其中 $O(Ma^3)$ 的高阶项, 可得

$$\partial_{t_1}\rho = -\rho(\partial_{x1}u_x + \partial_{r1}u_r + (u_r/r)_1), \quad (\text{A6a})$$

$$\partial_{t_1}(\rho u_x^2) = 2\rho u_x F_{x1}, \quad (\text{A6b})$$

$$\partial_{t_1}(\rho u_r^2) = 2\rho u_r F_{r1}, \quad (\text{A6c})$$

$$\partial_{t_1}(\rho u_x u_r) = \rho(u_x F_{r1} + u_r F_{x1}). \quad (\text{A6d})$$

在 (A6a) 式中, $u_r/r = \varepsilon(u_r/r)_1$.

将 (A6a)—(A6d) 式代入 (A4) 式第四至第六行方程, 可得:

$$\begin{aligned}
 -s_3e^{(1)} &= \frac{2}{3}\rho\left(\partial_{x1}u_x + \partial_{r1}u_r + \left(\frac{u_r}{r}\right)_1\right) \\
 &+ s_3\rho(u_x F_{x1} + u_r F_{r1}), \quad (\text{A7a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -s_4p_{xx}^{(1)} &= \frac{2}{3}\rho(\partial_{x1}u_x - \partial_{r1}u_r) \\
 &+ s_4\rho(u_x F_{x1} - u_r F_{r1}), \quad (\text{A7b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -s_5p_{xr}^{(1)} &= \frac{1}{3}\rho(\partial_{x1}u_r - \partial_{r1}u_x) \\
 &+ \frac{s_5}{2}\rho(u_x F_{r1} + u_r F_{x1}). \quad (\text{A7c})
 \end{aligned}$$

将 (A7a)—(A7c) 式代入 (A5b) 式和 (A5c) 式, 可得 t_2 时间尺度上的方程:

$$\begin{aligned}
 & r\partial_{t_2}(\rho u_x) \\
 & = r\partial_{x1}\left[\rho\nu(\partial_{x1}u_x - \partial_{r1}u_r)\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \rho \zeta \left(\partial_{x1} u_x + \partial_{r1} u_r + \left(\frac{u_r}{r} \right)_1 \right) \\
 & + \partial_{r1} [r \rho \nu (\partial_{x1} u_r + \partial_{r1} u_x)], \quad (\text{A8a}) \\
 & r \partial_{t2} (\rho u_r) \\
 & = r \partial_{x1} [\rho \nu (\partial_{x1} u_r + \partial_{r1} u_x)] \\
 & + \partial_{r1} \left[r \rho \nu (\partial_{r1} u_r - \partial_{x1} u_x) \right. \\
 & \left. + r \rho \zeta \left(\partial_{x1} u_x + \partial_{r1} u_r + \left(\frac{u_r}{r} \right)_1 \right) \right]. \quad (\text{A8b})
 \end{aligned}$$

联合 t_1 时间尺度上的方程 (A4) 与 t_2 时间尺度上的方程 (A8a) 和 (A8b), 可得宏观控制方程 (1)–(3), 其中动力黏性系数以及体积黏性系数分别定义为

$$\begin{aligned}
 \nu &= c_s^2 \left(\frac{1}{s_4} - 1 \right) \delta_t = c_s^2 \left(\frac{1}{s_5} - 1 \right) \delta_t, \\
 \zeta &= c_s^2 \left(\frac{1}{s_3} - 1 \right) \delta_t. \quad (\text{A9})
 \end{aligned}$$

附录 B 温度场 MRT-LB 模型的 Chapman-Enskog 多尺度分析

同样对温度分布函数进行与 (A1a)–(A1d) 式类似的多尺度展开, 并将展开结果代入方程 (18) 中, 可得以下不同空间 (时间) 尺度上的方程:

$$O(\varepsilon^0) : \mathbf{n}^{(0)} = \mathbf{n}^{(\text{eq})}, \quad (\text{B1a})$$

$$O(\varepsilon^1) : D_1 \mathbf{n}^{(0)} = -\boldsymbol{\Theta}' \mathbf{n}^{(1)} + \boldsymbol{\Psi}_1, \quad (\text{B1b})$$

$$\begin{aligned}
 O(\varepsilon^2) : \partial_{t2} \mathbf{n}^{(0)} + \left(\mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\Theta}}{2} \right) \mathbf{n}^{(1)} + \frac{\delta_t}{2} D_1 \boldsymbol{\Psi}_1 \\
 = -\boldsymbol{\Theta}' \mathbf{n}^{(2)}, \quad (\text{B1c})
 \end{aligned}$$

其中, $D_1 = \partial_{t1} \mathbf{I} + \mathbf{E}_\alpha \partial_{\alpha 1}$, $\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{N}(\mathbf{e}_{i\alpha} \mathbf{I}) \mathbf{N}^{-1}$, $\boldsymbol{\Theta}' = \boldsymbol{\Theta} / \delta_t$, $\mathbf{n}^{(1)} = (0, \mathbf{n}_1^{(1)}, \mathbf{n}_1^{(2)}, \mathbf{n}_1^{(3)}, \mathbf{n}_1^{(4)})^T$.

矩阵 $\mathbf{E} = (E_x, E_r)$ 可显式地表达为^[25]

$$\mathbf{E}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B2})$$

由 (B1b) 式可以得到 t_1 时间尺度上的方程:

$$\partial_{t1} \begin{pmatrix} rT \\ rTu_x \\ rTu_r \\ rT\varpi \\ 0 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} rTu_x \\ \frac{1}{2} rT\varpi \\ 0 \\ rTu_x \\ rTu_x \end{pmatrix} + \partial_r \begin{pmatrix} rTu_r \\ \frac{1}{2} rT\varpi \\ rTu_r \\ -rTu_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma'_1 n_1^{(1)} \\ -\sigma'_2 n_2^{(1)} \\ -\sigma'_3 n_3^{(1)} \\ -\sigma'_4 n_4^{(1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{01} \\ \Psi_{11} \\ \Psi_{21} \\ \Psi_{31} \\ \Psi_{41} \end{pmatrix}, \quad (\text{B3})$$

其中, $\Psi_{01} \cdots \Psi_{41}$ 分别表示 t_1 时间尺度上的源项 $\boldsymbol{\Psi}_1 = (0, 0, kT\sigma_2, 0, 0)^T$ 的对应分量.

由 (B1c) 式可得 t_2 时间尺度上的方程:

$$\begin{aligned}
 \partial_{t2} (rT) + \partial_{x1} \left[\left(1 - \frac{\sigma_1}{2} \right) n_1^{(1)} \right] + \partial_{r1} \left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{2} \right) n_2^{(1)} \right] \\
 + \frac{\delta_t}{2} (\partial_{x1} \Psi_{11} + \partial_{r1} \Psi_{12}) = 0. \quad (\text{B4})
 \end{aligned}$$

由 (B3) 的第二行和第三行可得

$$n_1^{(1)} = -\frac{1}{\sigma'_1} \left[\partial_{t1} (rTu_x) + \partial_{x1} \left(\frac{1}{2} rT\varpi \right) - \Psi_{11} \right], \quad (\text{B5a})$$

$$n_2^{(1)} = -\frac{1}{\sigma'_2} \left[\partial_{t1} (rTu_r) + \partial_{r1} \left(\frac{1}{2} rT\varpi \right) - \Psi_{12} \right]. \quad (\text{B5b})$$

对于不可压流动, (B5a) 和 (B5b) 式的时间相关项可以忽略^[25], 所以 (B5a) 和 (B5b) 式可进一步简化为

$$n_1^{(1)} = -\frac{1}{\sigma'_1} \left[\partial_{x1} \left(\frac{1}{2} rT\varpi \right) - \Psi_{11} \right], \quad (\text{B6a})$$

$$n_2^{(1)} = -\frac{1}{\sigma'_2} \left[\partial_{r1} \left(\frac{1}{2} rT\varpi \right) - \Psi_{12} \right]. \quad (\text{B6b})$$

将 (B6a) 和 (B6b) 式代入 (B4) 式, 并考虑到 $(\Psi_{11}, \Psi_{12})^T = (0, kT\sigma_2)^T$, 可得:

$$\begin{aligned}
 \partial_{t2} (rT) - \frac{\varpi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \right) \delta_t \frac{\partial^2 (rT)}{\partial x_1^2} \\
 - \frac{\varpi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{2} \right) \delta_t \frac{\partial^2 (rT)}{\partial r_1^2} \\
 + \frac{\varpi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{2} \right) \delta_t \frac{\partial T}{\partial r_1} = 0. \quad (\text{B7})
 \end{aligned}$$

结合 t_1 时间尺度上的方程 (B3) 的第一行方程与 t_2 时间尺度上的方程 (B7), 并考虑到柱坐标下的不可压流动的连续方程, 可得轴对称温度场的宏观控制方程 (4), 其中热扩散系数定义为

$$k = \frac{\varpi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \right) \delta_t = \frac{\varpi}{2} \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{2} \right) \delta_t. \quad (\text{B8})$$

参考文献

- [1] Vynnycky M, Maeno N 2012 *Int. J. Heat Mass Transfer* **55** 7297
- [2] Grosan T, Pop I 2011 *Int. J. Heat Mass Transfer* **54** 3139
- [3] Huang H, Hong N, Liang H, Shi B C, Chai Z H 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 084702 (in Chinese) [黄虎, 洪宁, 梁宏, 施保昌, 柴振华 2016 物理学报 **65** 084702]
- [4] Aidun C K, Clausen J R 2009 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42** 439

- [5] Li Q, Luo K H, Kang Q J, He Y L, Chen Q, Liu Q 2015 *Prog. Energy Combust. Sci.* **52** 62
- [6] Lallemand P, Luo L S 2000 *Phys. Rev. E* **61** 6546
- [7] d' Humières D, Ginzburg I, Krafczyk M, Lallemand P, Luo L S 2002 *Philos. Trans. R. Soc. London A* **360** 437
- [8] Halliady I, Hammond L A, Care C M, Good K, Stevens A 2001 *Phys. Rev. E* **64** 011208
- [9] Lee T S, Huang H, Shu C 2006 *Int. J. Mod. Phys. C* **17** 645
- [10] Reis T, Phillips T N 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056703
- [11] Reis T, Phillips T N 2008 *Phys. Rev. E* 2008 **77** 026703
- [12] Guo Z L, Han H F, Shi B C, Zheng C G 2009 *Phys. Rev. E* **79** 046708
- [13] Li Q, He Y L, Tang G H, Tao W Q 2010 *Phys. Rev. E* **81** 056707
- [14] Zhou J G 2011 *Phys. Rev. E* **84** 036704
- [15] Peng Y, Shu C, Chew Y T, Qiu J 2003 *J. Comput. Phys.* **186** 295
- [16] Huang H, Lee T S, Shu C 2007 *Int. J. Numer. Methods Fluids* **53** 1707
- [17] Li Q, He Y L, Tang G H, Tao W Q 2009 *Phys. Rev. E* **80** 037702
- [18] Zheng L, Shi B C, Guo Z L, Zheng C G 2010 *Comput. Fluids* **39** 945
- [19] Meng X, Guo Z L 2015 *Phys. Rev. E* **92** 043305
- [20] Liu Q, He Y L 2015 *Physica A* **429** 215
- [21] Li Q, He Y L, Tang G H, Tao W Q 2011 *Microfluid. Nanofluid.* **10** 607
- [22] Wang L, Guo Z L, Zheng C G 2010 *Comput. Fluids* **39** 1542
- [23] Premnath K N, Banerjee S 2009 *Phys. Rev. E* **80** 036702
- [24] Geier M, Schönherr M, Pasquali A, Krafczyk M 2015 *Comput. Math. Appl.* **70** 507
- [25] Liu Q, He Y L, Li D, Li Q 2016 *Int. J. Heat Mass Transfer* **102** 1334
- [26] Guo Z L, Shi B C, Zheng C G 2002 *Chin. Phys. B* **11** 366
- [27] Lemembre A, Petit J P 1998 *Int. J. Heat Mass Transfer* **41** 2437
- [28] Li L K, Mei R W, Klausner J F 2013 *Int. J. Heat Mass Transfer* **67** 338
- [29] Kumar R, Kalam M A 1991 *Int. J. Heat Mass Transfer* **34** 513
- [30] Venkatachalappa M, Sankar M, Natarajan A A 2001 *Acta Mech.* **147** 173

Non-orthogonal multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for axisymmetric thermal flows^{*}

Wang Zuo Zhang Jia-Zhong[†] Wang Heng

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 3 September 2016; revised manuscript received 22 November 2016)

Abstract

Axisymmetric thermal flows in cylindrical systems are widely encountered in engineering practices. Typically, axisymmetric thermal flows belong in three-dimensional (3D) problems. However, taking advantage of the axisymmetric condition, the 3D axisymmetric flows can be reduced to quasi two-dimensional (2D) problems in the meridian plane, which significantly reduces the computational requirements and avoids treating the curved boundary. In recent years, various 2D lattice Boltzmann (LB) models, including single relaxation time LB (SRT-LB, or LBGK) and multiple relaxation time LB (MRT-LB) models, for axisymmetric thermal flows have been proposed. In the LB community, it is well accepted that the MRT-LB is superior to the LBGK in terms of numerical stability. The existing MRT-LB model for axisymmetric thermal flows are developed based on orthogonal basis vectors obtained from the combination of the lattice velocity components, i.e., the transform matrix in the existing MRT-LB is an orthogonal one. Unlike the existing MRT-LB model, in this paper, a non-orthogonal multiple-relaxation-time lattice Boltzmann (MRT-LB) method of simulating axisymmetric thermal flows is proposed. In the proposed MRT-LB method, the velocity field is solved by a D2Q9 discrete velocity set while the temperature by a D2Q5 discrete velocity set. The main advantage of the present MRT-LB model is that the transform matrix of the model is a non-orthogonal one, which is comprised of some proper non-orthogonal basis vectors obtained from the combination of the lattice velocity components. The non-orthogonal transform matrix of the present MRT-LB model contains more zero elements than the classical orthogonal transform matrix, and thus the present MRT-LB model is expected to be more efficient than the existing orthogonal-based MRT-LB model. The equilibrium velocity and temperature moments of the present MRT-LB model are expressed by mapping the equilibrium distribution functions onto their moment spaces through using the non-orthogonal transformation matrix. Also the vectors in the forcing term are modified according to the matrix mapping. Through the Chapman-Enskog analysis, it is demonstrated that the macroscopic governing equations in the cylindrical coordinate can be recovered from the present MRT-LB model. Then several numerical tests, including thermal Womersley flow, Rayleigh-Bénard convection in a vertical cylinder and natural convection in a vertical annulus, are conducted to validate the present model. It is found that the present numerical results are in good agreement with the analytical solutions and/or other numerical results reported in the literature. Numerical stability is also tested, and the results suggest that the present MRT model shows better numerical stability than its LBGK counterpart. Moreover, the numerical results also indicate that the present MRT-LB model is more computationally efficient than the existing MRT-LB model for axisymmetric thermal flow. These findings indicate that the present MRT-LB model can serve as a powerful method of computing the axisymmetric thermal flows.

Keywords: axisymmetric thermal flow, lattice Boltzmann method

PACS: 47.11.-j, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.66.044701

^{*} Project supported by the National Fundamental Research Program of China (Grant No. 2012CB026002) and the National Key Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2013BAF01B02).

[†] Corresponding author. E-mail: jzzhang@mail.xjtu.edu.cn