

光子晶体传输特性的时域精细积分法分析

杨红卫 孟珊珊 高冉冉 彭硕

Analysis of photonic crystal transmission properties by the precise integration time domain

Yang Hong-Wei Meng Shan-Shan Gao Ran-Ran Peng Shuo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 66, 084101 (2017) DOI: 10.7498/aps.66.084101

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.084101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2017/V66/I8>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

分层有耗手征介质中斜入射电磁波的传播矩阵

Propagation matrix of plane wave incident obliquely on stratified lossy chiral medium

物理学报.2017, 66(6): 064101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.064101>

基于单层线-圆极化转换聚焦超表面的宽带高增益圆极化天线设计

Broadband circularly polarized high-gain antenna design based on linear-to-circular polarization conversion focusing metasurface

物理学报.2017, 66(6): 064102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.064102>

若干电磁波完全极化参数组的完备变换关系

Conversion relationships between several parameter groups of completely polarized electromagnetic waves

物理学报.2017, 66(5): 054101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.054101>

基于多重查找表的太赫兹波段卷云微物理参数的反演方法

Retrieval method of cirrus microphysical parameters at terahertz wave based on multiple lookup tables

物理学报.2017, 66(5): 054102 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.054102>

基于光栅结构的远场时间反演亚波长源成像

Far-field time reversal subwavelength imaging of sources based on grating structure

物理学报.2017, 66(4): 044101 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.044101>

光子晶体传输特性的时域精细积分法分析*

杨红卫[†] 孟珊珊 高冉冉 彭硕

(北京工业大学应用数理学院, 北京 100124)

(2016年11月10日收到; 2017年1月16日收到修改稿)

将精细积分法应用于时域有限差分法中, 提出了一种求解光子晶体传输特性的时域精细积分法, 并对其计算精度及稳定性进行了分析. 从一阶麦克斯韦方程出发, 在空间上采用 Yee 元胞进行差分离散, 结合吸收边界条件及激励源表达式将方程整理为标准的一阶常微分方程组形式. 通过时间步长的精细划分和指数矩阵的加法定理, 在时间上利用精细积分法对齐次微分方程进行积分求解, 并结合激励向量的特解得到空间离散的场分量, 最终通过傅里叶变换求得方程的解. 利用时域精细积分法对光子晶体进行了实例计算, 并将其结果分别与有限差分法和四阶龙格库塔法在精度、稳定性等方面进行了比较, 结果表明时域精细积分法具有更高的计算精度, 并且克服了有限差分法以及四阶龙格库塔法在计算稳定性上对时间步长的限制. 提出的方法具有精确、稳定的特点, 为光子晶体传输特性的研究提供了一种新的有效的分析方法.

关键词: 光子晶体, 时域精细积分, 时域有限差分, 四阶龙格库塔法

PACS: 41.20.Jb, 42.70.Qs, 03.50.De, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.66.084101

1 引言

光子晶体是一种介电常数呈周期性排列的人工合成材料, 其最基本的特性是具有光子禁带, 即频率落在禁带中的电磁波被禁止传播^[1-4]. 光子晶体的带隙效应使其在光波导、光滤波器和微波电路等器件中有着广泛的应用^[5,6]. 分析光子晶体的电磁传输特性对各类器件的设计与制备具有重要的理论与实际意义.

时域有限差分法 (finite difference time domain, FDTD) 作为一种有效的电磁场计算方法, 是研究光子晶体传输特性最常用的方法之一^[7-10]. 它将麦克斯韦旋度方程转化为有限差分式从而直接在时域求解, 通过建立时间离散的递进序列, 在相互交织的网格空间中交替计算电场分量和磁场分量^[11,12]. 这种方法只需设定相应的空间点及相应的参数, 即可模拟求解各种电磁场问题. 但由于在时间导数离散上采用了二阶中心差分格式, 格式精度相对较低, 并且时间步长受到柯朗稳定性

条件的约束, 该方法的应用范围受到限制. 为提高 FDTD 的计算精度以及稳定性, 人们开始探讨 FDTD 的改进方案. 文献^[13]将交替隐式差分方法应用到 FDTD 中, 提出了时域交替隐式差分算法, 并证明了该算法具有无条件稳定性, 即时间步长不受柯朗稳定性条件的限制, 但是过大的时间步长会造成数值色散的增加. 文献^[14]将四阶龙格库塔法 (fourth order Runge-Kutta, RK4) 引入 FDTD 中, 提高了时间离散的精度, 消除了时间积累误差对计算结果的影响, 但时间步长过大仍然会使其失去数值稳定性.

精细积分法 (high precision integration, HPI) 是一种具有高精度的时间积分方法, 宜用于处理一阶常微分方程组^[15]. 本文拟在时域下将精细积分法应用到 FDTD 中, 提出一种基于精细积分技术求解光子晶体传输特性的时域方法. 首先从一阶麦克斯韦方程出发, 在空间上利用 Yee 元胞进行差分离散, 结合吸收边界条件及激励源的表达式将方程整理为标准的一阶常微分方程组形式; 然后通过时间

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172008, 11272020) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: yanghongwei@bjut.edu.cn

步长的进一步精细划分以及指数矩阵加法定理的运用, 在时间上采用精细积分法对齐次微分方程组进行求解, 并结合激励向量的特解得到空间离散的电场分量和磁场分量; 最后对光子晶体反射场和透射场进行傅里叶变换求得问题的解. 通过算例验证了本文方法的正确性, 并与时域有限差分法以及四阶龙格库塔法在精度、稳定性等方面进行了比较. 本文方法不仅具有较高的计算精度, 在稳定性方面也优于时域有限差分法和四阶龙格库塔法, 具有精确、稳定的特点.

2 基本原理

2.1 麦克斯韦方程的空间离散格式

麦克斯韦方程是电磁理论的基本方程, 分析电磁问题实际上是求解给定边界条件下的麦克斯韦方程问题^[16]. 求解光子晶体的传输特性首先从一阶麦克斯韦方程出发, 即

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E}, \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \end{cases} \quad (1)$$

式中 ε , μ 和 σ 分别为介质的介电常数, 磁导率和电导率, t 为时间, \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 分别是电场和磁场.

一维情况下, 设电磁波沿坐标轴 x 方向传播, 介质参数和场量均与坐标 y, z 无关, 即 $\partial/\partial y = 0$, $\partial/\partial z = 0$, 于是麦克斯韦方程 (1) 式可写为^[17]

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{cases} \quad (2)$$

式中 E_y 表示沿 y 方向的电场分量, H_z 表示沿 z 方向的磁场分量.

在空间上分别对 (2) 式中的电场分量 E_y 和磁场分量 H_z 采用图 1 所示 Yee 元胞进行离散, 并利用中心差分近似来表示场分量对空间的偏导数, 得到离散后的方程形式为

$$\begin{cases} \frac{dE_y(i)}{dt} = -\frac{\sigma(i)}{\varepsilon(i)} E_y(i) - \frac{1}{\varepsilon(i)} \frac{H_z(i+1/2) - H_z(i-1/2)}{\Delta x}, \\ \frac{dH_z(i+1/2)}{dt} = -\frac{1}{\mu(i+1/2)} \frac{E_y(i+1) - E_y(i)}{\Delta x}, \end{cases} \quad (3)$$

式中 i 表示离散后沿空间 x 方向的序号. (3) 式即为麦克斯韦方程电场分量 E_y 和磁场分量 H_z 的空间离散形式.

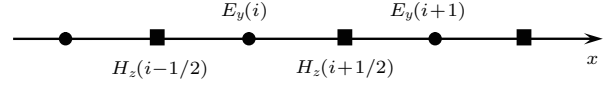


图 1 一维 Yee 元胞中各场分量空间节点分布

Fig. 1. Spatial node distribution of field components in one-dimensional Yee cell.

2.2 吸收边界条件与激励源

求解区域左边界取 $x = 0$, 右边界取 $x = L$ 且 $L > 0$, 对边界的处理采用 Engquist-Majda 一阶近似吸收边界条件, 以 $x = 0$ 边界为例:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) f_\alpha |_{x=0} = 0, \quad (4)$$

式中 $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ 为介质中的光速, f_α 可代表电场 \mathbf{E} 或磁场 \mathbf{H} 在直角坐标系中任一分量.

令 (4) 式中 $f_\alpha = E_y$, 将其在 $i - 1/2$ 点处作空间离散:

$$\frac{\partial E_y(i-1/2)}{\partial x} = \frac{E_y(i) - E_y(i-1)}{\Delta x}. \quad (5)$$

利用线性插值关系

$$E_y(i-1/2) = \frac{E_y(i) + E_y(i-1)}{2}, \quad (6)$$

将 (5) 式和 (6) 式代入 (4) 式, 得

$$\begin{aligned} \frac{dE_y(i)}{dt} + \frac{dE_y(i-1)}{dt} \\ = 2c(i-1/2) \frac{E_y(i) - E_y(i-1)}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (7)$$

将 (3) 式中的第一个等式代入 (7) 式得

$$\begin{aligned} \frac{dE_y(i-1)}{dt} \\ = 2c(i-1/2) \frac{E_y(i) - E_y(i-1)}{\Delta x} + \frac{\sigma(i)}{\varepsilon(i)} E_y(i) \\ + \frac{1}{\varepsilon(i)} \frac{H_z(i+1/2) - H_z(i-1/2)}{\Delta x}. \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式即为吸收边界 $x = 0$ 处电场分量 E_y 的空间离散形式. 吸收边界上其余场分量的空间离散格式可用相同的方法得到.

对光子晶体的传输特性进行时域分析时, 通常要考虑对激励源的模拟. 本文采用电偶极子激励源, 其电流密度形式为^[18]

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = 10^{-12} (0.37\hat{x} - 0.74\hat{y} - 0.37\hat{z}) B(2\pi f_c t), \quad (9)$$

式中 $B(2\pi f_c t)$ 是中心频率为 f_c 的 Blackman-Harris 窗口函数的一阶导数^[19], 由几个正弦函数组成, 即此电偶极子源是一个呈正弦曲线变化的激励源.

2.3 精细积分法

综合考虑 (3) 式与 (8) 式以及激励源的表达式, 可以得到一阶标准常微分方程的矩阵形式为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{F}(t), \quad (10)$$

式中 \mathbf{A} 为定常矩阵, $\mathbf{F}(t)$ 是由于激励源的引入而产生的激励向量, \mathbf{v} 包含待求解的全部场分量,

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_y \\ \mathbf{H}_z \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

假设 (10) 式的初始条件为

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_y(t=0) \\ \mathbf{H}_z(t=0) \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

根据求解常微分方程的理论可知, (10) 式的解 \mathbf{v} 由两部分组成:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_p, \quad (13)$$

式中 \mathbf{v}_p 是由激励向量 $\mathbf{F}(t)$ 决定的特解, \mathbf{v}_h 是无激励向量时齐次微分方程的通解,

$$\mathbf{v}_h = \exp(\mathbf{A}t) \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{p0}), \quad \mathbf{v}_{p0} = \mathbf{v}_p(t=0), \quad (14)$$

式中 $\exp(\mathbf{A}t)$ 为矩阵的指数函数, 其意义与普通表达式相同, 即

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + (\mathbf{A}t)^2/(2!) + (\mathbf{A}t)^3/(3!) + \dots, \quad (15)$$

式中 \mathbf{I} 为单位矩阵.

设数值积分的时间步长为 Δt , 一系列等步长的时刻为

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta t, \quad \dots, \quad t_k = k\Delta t, \quad (16)$$

则

$$\mathbf{v}_{h1} = \mathbf{v}_h(\Delta t) = \exp(\mathbf{A}\Delta t) \cdot (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{p0}) = \mathbf{T}\mathbf{v}_{h0}, \quad (17)$$

式中 $\mathbf{v}_{h0} = \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_{p0}$, $\mathbf{T} = \exp(\mathbf{A}\Delta t)$ 为指数矩阵.

若给出指数矩阵 \mathbf{T} , 逐步积分公式就可通过递推进行计算:

$$\mathbf{v}_{h1} = \mathbf{T}\mathbf{v}_{h0}, \quad \mathbf{v}_{h2} = \mathbf{T}\mathbf{v}_{h1}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_{h(k+1)} = \mathbf{T}\mathbf{v}_{hk}, \quad (18)$$

齐次微分方程的通解 \mathbf{v}_h 就成为一系列的矩阵-向量乘法. 由 (18) 式可知, 齐次微分方程通解 \mathbf{v}_h 的精确性和稳定性完全取决于指数矩阵 \mathbf{T} 的精确性和稳定性, 于是问题归结为如何精确计算指数矩阵 \mathbf{T} .

首先将时间步长 Δt 进行进一步精细划分, 即

$$\tau = \Delta t/m, \quad m = 2^N, \quad (19)$$

式中 N 一般取 20, 则 $m = 1048576$, τ 将是非常小的一个时间区段. 根据指数矩阵函数的加法定理, 有

$$\mathbf{T} = \exp(\mathbf{A}\Delta t) = [\exp(\mathbf{A}\tau)]^m. \quad (20)$$

对于 τ 的区段, 将 $\exp(\mathbf{A}\tau)$ 按 Taylor 级数展开至四阶, 即

$$\exp(\mathbf{A}\tau) \approx \mathbf{I} + (\mathbf{A}\tau) + \frac{(\mathbf{A}\tau)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\tau)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{A}\tau)^4}{4!}. \quad (21)$$

令

$$\mathbf{T}_{a0} = (\mathbf{A}\tau) + \frac{(\mathbf{A}\tau)^2}{2!} + \frac{(\mathbf{A}\tau)^3}{3!} + \frac{(\mathbf{A}\tau)^4}{4!}, \quad (22)$$

则

$$\exp(\mathbf{A}\tau) \approx \mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0}, \quad (23)$$

式中 \mathbf{T}_{a0} 是一个非常小量的矩阵, 当它与单位矩阵 \mathbf{I} 相加时, 就会成为 \mathbf{I} 的尾数, 在计算机的舍入操作中, 其精度将丧失殆尽.

为了精确计算指数矩阵 \mathbf{T} , 应先将 (20) 式进行分解:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= [\exp(\mathbf{A}\tau)]^m = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0})^{2^N} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0})^{2^{N-1}} \times (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0})^{2^{N-1}}, \end{aligned} \quad (24)$$

令

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0}) \times (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a0}) \\ &= \mathbf{I} + 2\mathbf{T}_{a0} + \mathbf{T}_{a0} \times \mathbf{T}_{a0} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{a1}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{T}_{a1} = 2\mathbf{T}_{a0} + \mathbf{T}_{a0} \times \mathbf{T}_{a0}, \quad (26)$$

则 (24) 式可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a1})^{2^{N-1}} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a1})^{2^{N-2}} \times (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{a1})^{2^{N-2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

同理, 将 (27) 式继续作分解直至第 N 次, 得

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{T}_{aN})^{2^{N-N}} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_{aN}, \quad (28)$$

$$\mathbf{T}_{aN} = 2\mathbf{T}_{a(N-1)} + \mathbf{T}_{a(N-1)} \times \mathbf{T}_{a(N-1)}. \quad (29)$$

上述分解过程在计算机中相当于以下语句:

```
for j = 1 : N,
     $T_{aj} = 2T_{a(j-1)} + T_{a(j-1)} \times T_{a(j-1)}$ . (30)
end
```

当(30)式中语句循环结束后,再执行

$$T = I + T_{aN} \quad (31)$$

便可. 由于 N 次迭代后 T_{aN} 已不再是很大的矩阵, 与单位矩阵 I 相加后避免了舍入误差, 得到待求的指数矩阵 T . 再根据递推公式(18)式便可得到齐次微分方程的通解 v_h .

求出齐次微分方程的通解 v_h 后, 需再求出由激励向量 $F(t)$ 所决定的特解 v_p . 对于呈正弦曲线变化的激励源, 其激励向量^[20]

$$F(t) = F_1 \sin(\omega t) + F_2 \cos(\omega t), \quad (32)$$

式中 ω 代表角频率, F_1 和 F_2 是两个非时变向量. 则相应的特解为

$$v_p = \alpha \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t), \quad (33)$$

式中 $\alpha = (\omega^2 I + A^2)^{-1}(\omega F_2 - A F_1)$, $\beta = (\omega^2 I + A^2)^{-1}(-\omega F_1 - A F_2)$. 将特解 v_p 与通解 v_h 相结合便可得到(10)式的解 v , 即空间上各个离散的场分量 E_y 与 H_z .

在边界 $x = 0$ 处的场可以表示为入射场和反射场的叠加, 即

$$E_y(x = 0) = E_{inc} + E_{ref}, \quad (34)$$

式中 E_{inc} 代表入射场, E_{ref} 代表反射场, 则

$$E_{ref} = E_y(x = 0) - E_{inc}. \quad (35)$$

在边界 $x = L$ 处只有透射场, 即

$$E_y(x = L) = E_{trans}, \quad (36)$$

式中 E_{trans} 代表透射场. 利用(35)式和(36)式求出光子晶体两端的反射场和透射场后, 再分别将其进行傅里叶变换便可推导得到光子晶体的反射率和透射率.

3 数值算例及讨论分析

算例 1 为验证时域精细积分法的可靠性, 首先分析单层介质的传输特性, 此时由于结构简单, 方程存在解析解. 假设入射频率 $f = 1 \times 10^{10}$ Hz, 介电常数 $\epsilon = 2.56$, 介质的折射率 $n = 1.6$, 介质厚度 $d = 0.9375$ cm. 根据光的干涉理论, 透射光干涉最强的条件为

$$f = \frac{lc_0}{2nd}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (37)$$

式中 f 是频率, n 是介质的折射率, d 是介质的厚度, c_0 是真空中光速. 将所给参数代入(37)式可得干涉最强的各个峰的位置在 $l \times 10^{10}$ Hz 处. 图 2 为利用本文方法计算得到的此一层介质的透射谱. 由图可知, 频率在 $0-3.5 \times 10^{10}$ Hz 范围内时, 其透射率分别在 1×10^{10} , 2×10^{10} , 3×10^{10} Hz 处达到最大值, 与理论结果一致.

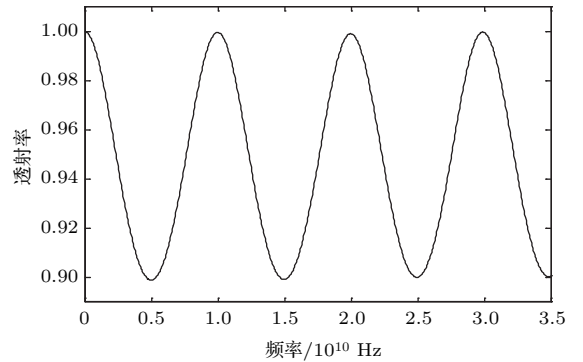


图 2 一层介质时计算得到的透射谱

Fig. 2. Transmission spectrum of one layer dielectric.

表 1 给出了利用时域精细积分法以及时域有限差分法计算得到的简单介质的反射率 (f 在 5×10^9 Hz 处), 并与解析解进行了比较, 其中时域精细积分法与时域有限差分法所取时间步长相同. 由表 1 可知, 时域精细积分法的计算结果更接近解析解, 比时域有限差分法的相对误差低, 具有较高的计算精度.

表 1 时域有限差分法、时域精细积分法和解析解计算结果的比较

Table 1. Comparison of results by FDTD scheme, HPI scheme and analytical solution.

解析解	时域有限差分法		时域精细积分法	
	反射率	相对误差/%	反射率	相对误差/%
0.4380	0.4385	0.1140	0.4382	0.0457

算例 2 为说明时域精细积分法的稳定性, 以图 3 所示一维光子晶体为例进行分析, 其中周期取 10, A, B 两种介质的相对介电常数分别为 5.5225 和 1.9044, 介质厚度分别为 740 和 1260 nm, 相对磁导率都为 1, 入射基频为 $\omega_0 = 271$ THz. 根据所给参数可得柯朗稳定性条件为 $\Delta t \leq 1.7 \times 10^{-16}$ s, 即时域有限差分法的时间步长最大只能取 1.7×10^{-16} s, 否则将失去稳定性. 图 4 所示为利用时域有限差分法以及时域精细积分法得到的光子晶体中心处的电场分量 E_y , 这里时域有限差分法的时间步长取为 $\Delta t = 1 \times 10^{-17}$ s, 而时域精细积分法的时间步长分别取为 $\Delta t = 5 \times 10^{-16}$ s 和 $\Delta t = 1 \times 10^{-15}$ s (两种步长均超出柯朗稳定性条件). 由图可知, 时域精细积分法在两种步长下所得计算结果稳定, 且与时域有限差分法的结果相符合. 这说明本文方法能够克服柯朗稳定性条件对时间步长的限制, 在较大时间步长下也可以保持结果的稳定性.

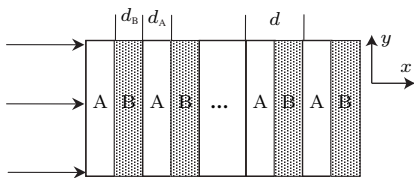


图 3 一维光子晶体几何模型

Fig. 3. Geometry model of one-dimensional photonic crystal.

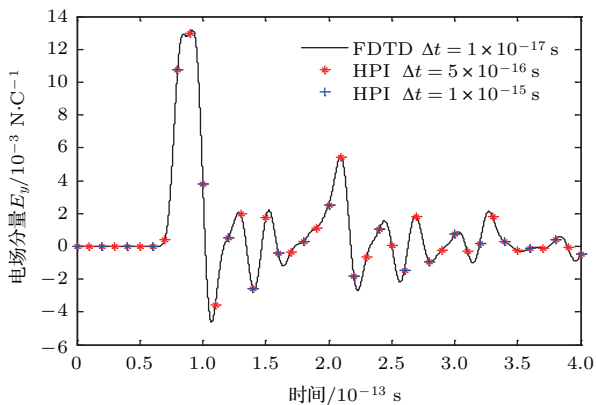


图 4 时域精细积分法、时域有限差分法计算得到的电场分量 E_y

Fig. 4. The electric field component E_y obtained by HPI scheme and FDTD scheme.

由于光子晶体结构的复杂性, 难以求出其严格的解析解, 可利用数值模拟得到的 L_2 误差来分析时域精细积分法的精度问题. L_2 误差定义为

$$L_{2\text{error}} = \frac{\sqrt{\int_0^T |x(t) - x^{\text{ref}}(t)|^2 dt}}{\sqrt{\int_0^T |x^{\text{ref}}(t)|^2 dt}}, \quad (38)$$

式中 x^{ref} 代表参考解, T 代表计算时间的总长度. 将加密时间网格的时域有限差分法 ($\Delta t = 2 \times 10^{-18}$ s) 作为参考解. 在这里, L_2 误差是被用来计算光子晶体中心处电场分量 E_y 的误差, 其中 $t \in [0, 4 \times 10^{-13}]$ s. 图 5 所示为利用时域精细积分法计算得到的 L_2 误差随时间步长 Δt 的变化情况. 从图 5 可以看出, 在时间步长 $\Delta t \leq 1 \times 10^{-15}$ s 时, 利用时域精细积分法计算得到的 L_2 误差始终保持不变, 即计算精度没有因时间步长的增加而增大; 超过一定步长后, 计算误差开始逐渐增大, 这是此时时间步长不满足奈奎斯特抽样准则导致的结果 [21].

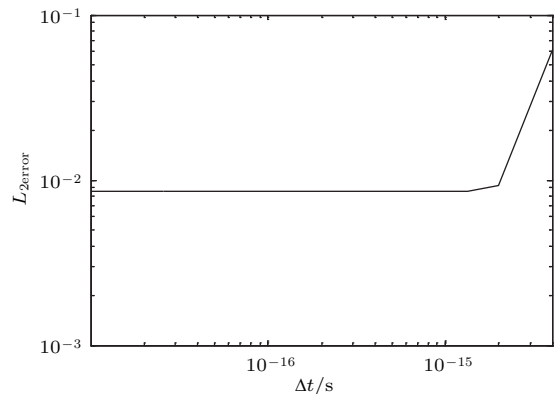


图 5 不同时间步长下利用时域精细积分法计算得到的 L_2 误差

Fig. 5. L_2 errors by HPI scheme with different time steps.

算例 3 为进一步说明时域精细积分法的精确性和稳定性, 将时域精细积分法与四阶龙格库塔法进行比较. 选择四阶龙格库塔法进行对比是因为它也是一种高精度时间积分方法, 与传统时域有限差分法相比, 四阶龙格库塔法时间离散精度更高, 稳定性更强. 仍考虑图 3 所示光子晶体结构, 选取参数与算例 2 相同. 将加密时间网格的四阶龙格库塔法 ($\Delta t = 1 \times 10^{-18}$ s) 计算得到的结果作为参考解, 图 6 所示为相同时间步长下利用两种方法计算得到的光子晶体中心处电场分量 E_y 的相对误差. 从图 6 可看出, 当时间步长同为 $\Delta t = 4 \times 10^{-17}$ s 时, 利用时域精细积分法得到的相对误差明显低于四阶龙格库塔法, 其精度约比四阶龙格库塔法高两个

数量级. 由此表明, 时域精细积分法在相同时间步长下可以获得比四阶龙格库塔法更高的准确度.

对于四阶龙格库塔法, 根据计算稳定性要求, 时间步长必须满足 $\Delta t \leq 2.78/\max |\lambda|$, 其中, λ 为定常矩阵 \mathbf{A} 的本征值. 为了满足稳定性要求, 本文四阶龙格库塔法的最大步长只能取到 2.5×10^{-16} s, 一旦超过最大步长, 该方法将失去稳定性. 图 7 所

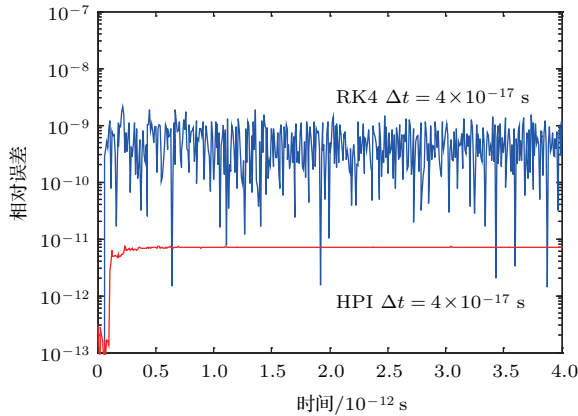


图 6 (网刊彩色) 相同时间步长下时域精细积分法、四阶龙格库塔法计算得到的电场分量 E_y 的相对误差
Fig. 6. (color online) Relative errors of electric field component E_y by HPI scheme and RK4 scheme with the same time step.

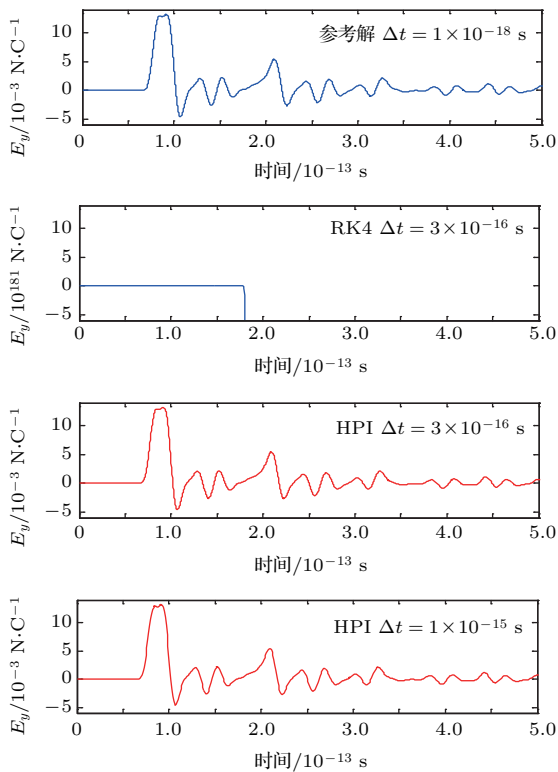


图 7 时域精细积分法和四阶龙格库塔法计算得到的电场分量 E_y
Fig. 7. Electric field component E_y by HPI scheme and RK4 scheme.

示为利用四阶龙格库塔法和时域精细积分法计算得到的光子晶体中心处电场分量 E_y . 当时间步长同为 $\Delta t = 3 \times 10^{-16}$ s 时, 从图中可以看出, 利用四阶龙格库塔法所得结果严重偏离参考解, 失去稳定性; 而时域精细积分法所得结果与参考解保持一致, 甚至将步长继续增大到 $\Delta t = 1 \times 10^{-15}$ s 时, 仍然保持稳定. 由此说明, 时域精细积分法在稳定性方面也优于四阶龙格库塔法, 在时间步长较大的情况下仍可保持结果的稳定性.

4 结 论

本文将传统时域有限差分法进行改进, 在空间上采用 Yee 元胞差分离散技术, 在时间上利用精细积分法进行时程积分, 提出了一种求解光子晶体传输特性的时域精细积分法, 并将该方法的计算精度和稳定性与时域有限差分法、四阶龙格库塔法进行了比较. 相对于时域有限差分法, 时域精细积分法的时间步长不仅不受柯朗稳定性条件的约束, 而且只要满足奈奎斯特抽样准则, 其计算精度不会受时间步长取值的影响. 在相同时间步长下, 相对于四阶龙格库塔法, 时域精细积分法具有更高的准确度, 并且在较大的时间步长下仍然可以保持结果的稳定性. 数值算例表明了本文算法的精确性和稳定性, 为研究光子晶体的传输特性提供了一种有效的分析方法.

参考文献

- [1] Sun H T, Song Z X, Weng Z K, Wang D P, Jiang Y S, Yu Y 2011 *Acta Photon. Sin.* **40** 1
- [2] Su A 2009 *M. S. Dissertation* (Nanning: Guangxi University) (in Chinese) [苏安 2009 硕士学位论文 (南宁: 广西大学)]
- [3] Lin M 2010 *Ph. D. Dissertation* (Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China) (in Chinese) [林密 2010 博士学位论文 (成都: 电子科技大学)]
- [4] Wang Q 2009 *Ph. D. Dissertation* (Nanjing: Southeast University) (in Chinese) [王琼 2009 博士学位论文 (南京: 东南大学)]
- [5] Liu P 2012 *M. S. Dissertation* (Tianjin: Tianjin University of Technology) (in Chinese) [刘佩 2012 硕士学位论文 (天津: 天津理工大学)]
- [6] Ding T 2011 *Ph. D. Dissertation* (Beijing: University of Chinese Academy of Sciences) (in Chinese) [丁涛 2011 博士学位论文 (北京: 中国科学院大学)]
- [7] Zhao N S, Guan J M 2014 *Laser Optoelectron. Prog.* **51** 042302 (in Chinese) [赵年顺, 官骏鸣 2014 激光与光电子学进展 **51** 042302]

- [8] Chen H M, Meng Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 014202 (in Chinese) [陈鹤鸣, 孟晴 2011 物理学报 **60** 014202]
- [9] Pan W, Yu H J, Zhang X G, Xi L X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 034209 (in Chinese) [潘伟, 余和军, 张晓光, 席丽霞 2012 物理学报 **61** 034209]
- [10] Cheng J, Wang W Y, Xiong Y B, Tan W J 2012 *Electro-Opt. Technol. Appl.* **27** 34 (in Chinese) [承军, 王玮钰, 熊耀兵, 谭文疆 2012 光电技术应用 **27** 34]
- [11] Zhang H J 2007 *J. Ankang Univ.* **19** 74 (in Chinese) [张洪江 2007 安康学院学报 **19** 74]
- [12] Song Q, Gao J S, Wang X Y, Wang T T, Chen H, Zheng X M, Shen Z F, Ling W 2006 *Opt. Instrum.* **28** 37 (in Chinese) [宋琦, 高劲松, 王笑夷, 王彤彤, 陈红, 郑宣鸣, 申振峰, 凌伟 2006 光学仪器 **28** 37]
- [13] Namiki T 1999 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **47** 2003
- [14] Young J L, Gaitonde D, Shang J S 1997 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **45** 1573
- [15] Zhong W X 2002 *Dual System in Applied Mechanics* (1st Edition) (Beijing: Science Press) pp4-10 (in Chinese) [钟万勰 2002 应用力学对偶体系 (1 版) (北京: 科学出版社) 第 4-10 页]
- [16] Liu P J, Gu L C, Ren J H 2008 *J. Anhui Univ. Nat. Sci. Ed.* **32** 61 (in Chinese) [刘沛津, 谷立臣, 任继红 2008 安徽大学学报 (自然科学版) **32** 61]
- [17] Ge D B, Yan Y B 2011 *Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetic Waves* (3rd Edition) (Xi'an: Xidian University Press) pp9-21 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2011 电磁波时域有限差分方法 (3 版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 9—21 页]
- [18] Chen J, Lee J H, Liu Q H 2009 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **57** 3223
- [19] Liu Q H 1997 *Microw. Opt. Technol. Lett.* **14** 134
- [20] Lin J, Shen W, Williams F W 1995 *Comput. Struct.* **56** 113
- [21] Liu W S, Li J L 1981 *Sampling Technology Principle and Application* (1st Ed.) (Beijing: Science Press) pp10-360 (in Chinese) [刘文生, 李锦林 1981 取样技术原理与应用 (第 1 版) (北京: 科学出版社) 第 10—360 页]

Analysis of photonic crystal transmission properties by the precise integration time domain*

Yang Hong-Wei[†] Meng Shan-Shan Gao Ran-Ran Peng Shuo

(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(Received 10 November 2016; revised manuscript received 16 January 2017)

Abstract

Photonic crystals are materials patterned with a periodicity in the dielectric constant, which can create a range of forbidden frequencies called as a photonic band gap. The photonic band gap of the photonic crystal indicates its primary property, which is the basis of its application. In recent years, photonic crystals have been widely used to design optical waveguides, filters, microwave circuits and other functional devices. Therefore, the study on the transmission properties in photonic crystal is significantly important for constructing the optical devices. The finite difference time domain (FDTD) is a very useful numerical simulation technique for solving the transmission properties of the photonic crystals. However, as the FDTD method is based on the second order central difference algorithm, its accuracy is relatively low and the Courant stability condition must be satisfied when this method is used, which may restrict its application. To increase the accuracy and the stability, considerable scientific interest has been attracted to explore the schemes to improve the performance of the FDTD. The fourth order Ronge-Kutta (RK4) method has been applied to the FDTD method, which improves the accuracy and eliminates the influence of accumulation errors of the results, but the stability remains very poor if the time step is large. An effective time domain algorithm based on the high precision integration is proposed to solve the transmission properties of photonic crystals. The Yee cell differential technique is used to discretize the first order Maxwell equations in the spatial domain. Then the discretized Maxwell equations with the absorption boundary conditions and the expression of excitation source are rewritten in the standard form of the first order ordinary differential equation. According to the precise division of the time step and the additional theorem of exponential matrix, the high precision integration is used to obtain the homogeneous solution. To obtain the discretized electric and magnetic fields, the particular solution must be solved based on the excitation and then be added to the homogeneous solution. The transmission properties of photonic crystals are obtained by the Fourier transform. Practical calculation of photonic crystals is carried out by the precise integration time domain, and the accuracy and the stability are compared with those from the FDTD and the RK4 methods. The numerical results show that the precise integration time domain has a higher calculation precision and overcomes the restriction of stability conditions on the time step, which provides an effective analytical method of studying the transmission properties of photonic crystals.

Keywords: photonic crystals, precise integration time domain, finite difference time domain, fourth order Ronge-Kutta method

PACS: 41.20.Jb, 42.70.Qs, 03.50.De, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.66.084101

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11172008, 11272020).

[†] Corresponding author. E-mail: yanghongwei@bjut.edu.cn