

分段 Filippov 系统的簇发振荡及擦边运动机理

张正娣 刘亚楠 李静 毕勤胜

Bursting oscillations and mechanism of sliding movement in piecewise Filippov system

Zhang Zheng-Di Liu Ya-Nan Li Jing Bi Qin-Sheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 110501 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20172421

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172421>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I11>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[具有早期后除极化现象的可激发系统中螺旋波破碎方式研究](#)

Spiral wave breakup manner in the excitable system with early afterdepolarizations

物理学报.2018, 67(9): 090501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172505>

[基于 Lorenz 模型的集合预报与单一预报的比较研究](#)

Comparative study of Lorenz model based ensemble forecasting and single forecasting

物理学报.2018, 67(7): 070501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172144>

[反应扩散模型在图灵斑图中的应用及数值模拟](#)

Application of reaction diffusion model in Turing pattern and numerical simulation

物理学报.2018, 67(5): 050503 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171791>

[一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步](#)

Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors

物理学报.2018, 67(5): 050502 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20172354>

[小世界神经网络随机共振现象: 混合突触和部分时滞的影响](#)

Effects of hybrid synapses and partial time delay on stochastic resonance in a small-world neuronal network

物理学报.2017, 66(24): 240501 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.240501>

分段Filippov系统的簇发振荡及擦边运动机理*

张正娣¹⁾ 刘亚楠¹⁾ 李静¹⁾ 毕勤胜^{2)†}

1)(江苏大学理学院, 镇江 212013)

2)(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

(2017年11月10日收到; 2018年1月13日收到修改稿)

本文旨在揭示非光滑Filippov系统中由频域上不同尺度耦合导致的簇发振荡行为及其产生机理. 以经典的周期激励Duffing振子为例, 通过引入对状态变量的分段控制及适当选取参数, 使得激励频率与系统固有频率之间存在量级差距, 建立了频域两尺度耦合的Filippov系统. 当激励频率远小于系统的固有频率时, 可以将整个激励项视为慢变参数或慢变子系统, 从而得到广义自治快子系统. 分析了由非光滑分界面划分的不同区域中各快子系统的平衡点及其分岔特性随慢变参数变化的演化过程. 考察了两种典型参数条件下系统的振荡行为及其动力学特性, 指出参数变化不仅会引起其相应子系统平衡曲线及其分岔特性的改变, 也会导致不同模式的簇发振荡. 同时, 轨迹穿越非光滑分界面时会产生不同的动力学行为, 特别是在一定参数条件下, 由于运动轨迹受不同子系统的交替控制, 存在着擦边运动现象, 从而导致特殊形式的非光滑簇发振荡. 基于转换相图及各区域中快子系统的平衡曲线及其分岔特性, 揭示了非光滑分界面对系统簇发振荡的影响规律及不同簇发振荡的分岔机理.

关键词: 分段非光滑Filippov系统, 两尺度耦合, 簇发振荡, 分岔机理

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.67.20172421

1 引言

实际工程系统中存在着大量的诸如摩擦^[1]、碰撞^[2]、开关^[3]等非光滑因素, 导致相应的数学模型产生向量场的非光滑特性. 而根据向量场光滑性程度的不同, 非光滑系统一般可以被分为三类: 1) 非光滑连续系统, 系统的向量场连续, 而Jacobian矩阵不连续, 如蔡氏电路系统^[4]; 2) Filippov系统, 系统的向量场和Jacobian矩阵不连续, 而状态空间连续, 如干摩擦系统^[5]; 3) 非光滑脉冲系统, 系统的向量场、Jacobian矩阵和状态空间均不连续, 如碰撞系统^[6].

由于非光滑向量场存在着各种类型的非光滑分界面, 使得轨迹产生了一些特殊的穿越分界面模式^[7], 从而导致整个系统出现复杂的动力学特性,

而传统的非线性分析方法无法解释这些行为的产生机理^[8]. 长期以来, 非光滑系统复杂性及其机理分析一直是非线性动力学领域内的热点和前沿课题之一^[9]. 围绕非光滑系统, 国内外学者开展了大量的研究工作, 相关结果大都是基于数值仿真得到的, 如Kahan和Sicardi-Schifino^[10]讨论了非光滑电路中的同宿分岔行为, Baptista^[11]给出了双涡卷系统中间歇现象等. 而由于分析方法的不足, 相关理论研究大都停留在平衡点和极限环的稳定性及其余维一分岔上. 如对于穿越分界面的平衡点, 以Leine为代表的学者们将微分包含理论^[12]引入到其稳定性分析中, 通过引入辅助参数, 得到形式上光滑的平衡点穿越分界面时的向量场, 根据其广义Jacobian矩阵特征值随辅助参数变化时穿越零值及纯虚轴的情况, 给出平衡点的不同非光滑分岔的形式及其分岔结构和行为^[13]; 而对于极限环, 则

* 国家自然科学基金(批准号: 11472116, 11472115)和国家自然科学基金重点项目(批准号: 11632008)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

通过引入非光滑映射, 得到相应的 Floquet 乘子, 按照其穿越单位圆的形式, 给出相应的非光滑分岔结构和行为^[14]. 由于实际非光滑向量场特性的复杂性, 加上高余维分岔及高维系统的复杂性, 相关理论分析大都局限在低维系统的低余维非光滑分岔上^[15].

同时, 在实际工程中经常会涉及不同尺度的耦合, 这些不同尺度可以是时间上的, 如催化反应中存在着两种不同反应速率之间的耦合^[16], 航空航天器中存在着快速的旋转运动与相对较慢的平动之间的耦合^[17]; 也可以是空间上的, 如绳系卫星^[18]和输电塔线体系^[19]中存在着刚柔耦合. 不同尺度之间的耦合, 使得无量纲模型出现不同量级向量场分量之间的耦合, 导致系统产生特殊的动力学特性, 通常表现为大幅振荡与微幅振荡之间的耦合^[20]. 对不同尺度之间耦合导致的复杂行为的研究, 最早可以追溯到 Cardin 等^[21]在探索行星轨迹时建立的奇异摄动方程, 但是, 直到诺贝尔奖获得者 Hodgkin 和 Huxley^[22]建立了两快一慢的神经元模型, 成功地再现了神经元的簇发放电行为以后, 不同尺度耦合才引起了国内外学者的高度关注^[23]. 但是, 由于缺乏有效的分析方法, 相关工作大都局限在现象报道和数值仿真上^[24]. 直到 Izhikevich^[25]引入 Rinzel 的快慢分析法, 才将相关研究提升到机理分析的层次. 从那时起, 大量的不同簇发振荡及其机理分析的结果见诸报道, 但大部分工作都是针对自治系统即时域上的不同尺度耦合开展的^[26].

由于周期激励会引起不同频率参与系统的振荡, 而当周期激励频率与系统的固有频率之间存在着量级差距, 即存在频域上的不同尺度耦合时, 会导致系统产生类似的簇发振荡行为^[27], 而频域上的不同尺度耦合系统不存在明显的快慢子系统. 为此, 本课题组提出了一系列相关的分析方法^[28], 得到了各种激励模式下的簇发振荡现象及其产生机理.

而对于周期激励下的非光滑 Filippov 系统, 当周期激励频率远小于系统的固有频率时, 不同尺度耦合效应的研究工作尚不多见, 不仅是由于 Filippov 系统本身的复杂性^[29], 同时, 也是因为频域上不同尺度耦合簇发振荡的特殊性^[30]. 因此, 有必要开展相关的研究工作, 探讨非光滑 Filippov 系统的各种复杂运动及其产生机理.

为深入揭示非光滑 Filippov 系统的尺度效应, 本文以相对简单但非常经典的 Duffing 振子为例, 通过引入对状态变量的分段控制, 适当选取参数, 建立了频域上两尺度耦合的非光滑 Filippov 系统. 考虑当周期激励频率远小于系统的固有频率的情形, 将整个周期激励项视为慢变参数, 分析不同区域内及分界面上广义自治系统的平衡点及其分岔, 结合转换相图, 得到了两种典型参数条件下的不同簇发振荡及相应的分岔机理.

2 数学模型

为便于说明非光滑系统中的尺度效应, 现以经典的 Duffing 振子为例, 引入对状态变量的分段控制, 可以建立如下的非光滑动力学模型

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2\mu y + \alpha[x + g(x)] - \beta[x + g(x)]^3 + \omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\omega = A \sin(\Omega t)$, 对应于周期激励项, A 表示振幅, $g(x) = [\text{sgn}(x - 1) - 1]/2$ 对应于分段控制项. 显然, 系统的状态相平面由非光滑分界面 (记为 $\Sigma := \{(x, y) | x = 1\}$) 分为两个光滑子区域, 即区域 $D_+ := \{(x, y) | x > 1\}$ 和区域 $D_- := \{(x, y) | x < 1\}$, 分别对应着不同的子系统. 系统的轨迹在不同的区域内受不同子系统的控制, 从而导致系统产生复杂的动力学特性, 同时, 当周期激励频率 Ω 远小于系统的固有频率 ω_N 时, 即 $\Omega \ll \omega_N$, 由于存在频域上的不同尺度耦合, 会导致诸如簇发振荡等特殊的非线性行为. 在此必须指出的是, 与线性系统不同, 非线性系统的固有频率与系统的状态相关, 如对于系统 (1), 其固有频率可以由设定 $A = 0$ 时相平面上平衡点相应一对共轭特征值的虚部决定, 并随着状态变量 x 的变化而变化.

3 含慢变参数广义自治系统的平衡点及其分岔分析

当 $\Omega \ll \omega_N$, 也即周期激励频率与系统固有频率之间存在量级差距时, 相应状态变量主要按照固有频率振荡. 在固有频率对应的任一周期 $t \in [t_0, t_0 + 2\pi/\omega_N]$ 内, 周期激励项 $\omega = A \sin(\Omega t)$ 在 $\omega_A = A \sin(\Omega t_0)$ 和 $\omega_B = A \sin(\Omega t_0 + 2\pi\Omega/\omega_N)$

之间变化, 可见 $\omega_A \approx \omega_B$, 这说明 ω 在固有频率的任一周期内变化很小. 因此, 可以把整个周期激励项 ω 看作慢变参数, 进而得到含慢变参数的广义自治系统. 从另外的角度, 若把整个周期激励项视为慢子系统, 而把含慢变参数的广义自治系统视为快子系统, 快慢两子系统的耦合构成两尺度耦合系统 (1). 快子系统将决定系统的沉寂态和激发态的形式, 而慢子系统则会对系统的轨迹起到调节作用. 因此, 首先需要分析快子系统即含慢变参数广义自治系统的分岔特性.

由于非光滑分界面的存在, 含慢变参数广义自治系统在不同区域内表现为不同的形式. 下面分析在不同区域中及非光滑分界面上该系统的分岔特性.

3.1 区域 D_{\pm} 内的平衡点稳定性及分岔分析

在区域 D_{\pm} 中, 含慢变参数广义自治系统的平衡点可以表示为 $E_{\pm} = (x_{0\pm}, 0)$, 其中 $x_{0\pm}$ 满足

$$\alpha[x_{0\pm} + g(x_{0\pm})] - \beta[x_{0\pm} + g(x_{0\pm})]^3 + \omega = 0, \quad (2)$$

其稳定性由如下特征方程决定:

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu - \alpha + 3\beta[x_{0\pm} + g(x_{0\pm})]^2 = 0. \quad (3)$$

由 (3) 式可知, 当 $\mu > 0$, $-\alpha + 3\beta[x_{0\pm} + g(x_{0\pm})]^2 > 0$ 时, E_{\pm} 为稳定的平衡点. 由于无量纲阻尼系数 $\mu > 0$, 不会产生 Hopf 分岔, 而当满足条件

$$FB_{\pm} : -\alpha + 3\beta[x_{0\pm} + g(x_{0\pm})]^2 = 0, \quad (4)$$

相应特征值穿越零值时, 平衡点失稳. 由 (2) 式可知, 系统的平衡线为典型的 S 形曲线, 故系统可能会产生 fold 分岔, 导致跳跃现象.

3.2 分界面上的非光滑分岔分析

由于系统向量场在分界面 $\Sigma := \{(x, y) | x = 1\}$ 上不连续, 因此, 轨线穿越分界面 $\Sigma := \{(x, y) | x = 1\}$ 时可能出现非光滑分岔, 可以通过微分包含理论 [12] 来分析. 引入辅助参数 q , 利用 Clarke 导数得到广义 Jacobian 矩阵

$$J = qJ_+ + (1 - q)J_-, \quad q \in [0, 1], \quad (5)$$

其中 J_+ , J_- 分别对应于区域 D_+ 和区域 D_- 内平衡点相应的 Jacobian 矩阵, 其广义特征方程可以表示为

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda - \alpha + 3\beta q = 0, \quad (6)$$

进而可知相应的特征根为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu + \sqrt{\mu^2 + (\alpha - 3\beta q)}, \\ \lambda_2 &= -\mu - \sqrt{\mu^2 + (\alpha - 3\beta q)}. \end{aligned} \quad (7)$$

同样可知, 在非光滑分界面上, 不会产生 Hopf 分岔, 而当

$$-\alpha + 3\beta q = 0, \quad (8)$$

相应特征根穿越零值, 在分界面可能会产生非光滑 fold 分岔, 导致轨迹在非光滑分界面上的跳跃现象.

在区域 D_{\pm} 内及分界面上的这些分岔行为将直接影响到系统的动力学特性, 而这些分岔的产生与否和系统参数存在着密切的关系, 为进一步说明相关的分岔特性, 图 1 给出了 $\mu = 0.1$, $\alpha = 1.0$, $A = 5.0$, $\Omega = 0.01$, β 分别为 $\beta = 0.5$ 和 $\beta = 2.0$ 时,

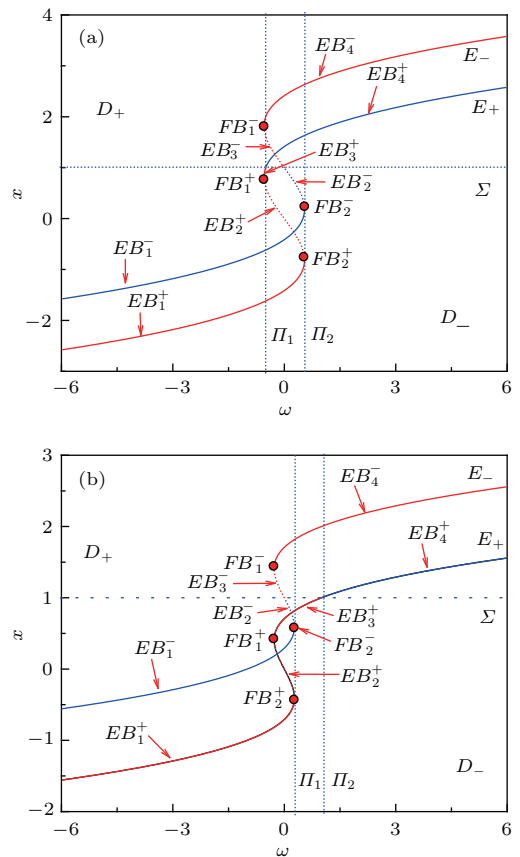


图 1 $\mu = 0.1$, $\alpha = 1.0$, $A = 5.0$, $\Omega = 0.01$ 时的平衡曲线及其分岔 (a) $\beta = 0.5$; (b) $\beta = 2.0$

Fig. 1. Equilibrium branches as well as bifurcation points for $\mu = 0.1$, $\alpha = 1.0$, $A = 5.0$, $\Omega = 0.01$: (a) $\beta = 0.5$; (b) $\beta = 2.0$.

快子系统随慢变参数 ω 变化的平衡曲线及其分岔特性, 其中实线表示稳定解, 虚线代表不稳定解. 同时, 红色曲线表示该解虽然存在, 但由于分界面所对应的子系统的限制, 其解不可能实现, 而蓝色表示该解与相应子系统在同一定义域, 是真实存在的.

从图1中可以看出, 两子系统所对应的平衡曲线均存在两个fold分岔点, 加上平衡曲线与分界面的交点, 从而导致相应平衡曲线被分为性质不同的四段. 如对于 $\beta = 0.5$ 时的 E_- 曲线, 可以分为四段, 其中 EB_1^- 稳定, EB_2^- 不稳定, 且均能实现; 而 EB_3^- 不稳定, EB_4^- 稳定, 但均不能实现.

在非光滑分界面 Σ 与平衡曲线的交点上, 其相应的广义 Jacobian 矩阵所对应的特征值分布定性相同, 当平衡点穿越分界面时, 在 $\beta = 0.5$ 时, $q = 2/3$, 而在 $\beta = 2.0$ 时, $q = 1/6$, 广义特征值穿越零值, 可能会产生非光滑fold分岔.

虽然表面上图1(a)和图1(b)两种情形相似, 但进一步分析可以发现, 两者存在着明显的区别, 在 $\beta = 0.5$ 时, 随着慢变参数 ω 的增加, 相应的位于 D_- 区域内的子系统存在着可以实现的稳定平衡曲线 EB_1^- , 该平衡曲线直到抵达 Π_2 时才会产生fold分岔, 而在 D_+ 区域内的稳定平衡曲线 EB_4^+ 从 ω 变化到 Π_1 时就会产生失稳, 随着 ω 的减小一直保持稳定. 而当 $\beta = 2.0$ 时, 在 D_- 区域内的稳定平衡曲线 EB_1^- 当 ω 增加到 Π_1 时就会失稳, 而 EB_4^+ 从 ω 变化到 Π_2 时才会产生失稳. 也就是说, 当 $\beta = 0.5$ 时, 在 $\omega \in (-\infty; +\infty)$ 区间内, 存在着 EB_1^- 和 EB_4^+ 之间变化的稳定平衡曲线, 而当 $\beta = 2.0$ 时, 在 $\omega \in (-\infty; W_{P1}]$ 区间内存在稳定的平衡曲线 EB_1^- , 而在 $\omega \in [W_{P2}, +\infty)$ 区间内存在稳定的 EB_4^+ , 其中 W_{P1} 和 W_{P2} 分别对应于截面 Π_1 和 Π_2 时相应的 ω 值, 满足 $W_{P1} < W_{P2}$.

由于两种情形下系统平衡曲线的性质在 $\omega \in (W_{P1}; W_{P2})$ 区间上存在着本质的不同, 从而导致系统可能会产生不同的尺度效应, 下面分别探讨这两种情形下系统的不同振荡行为及其产生机理.

4 簇发振荡及其机理分析

为进一步揭示上述两种情形下振荡行为之间的本质区别, 在此引入转换相图的概念^[28]. 由于上

述平衡曲线及其分岔分析都是基于将慢变量 ω 作为参数得到的, 即给出了平衡曲线及分岔行为与 ω 之间的关系, 而传统的相图给出的是不同状态变量之间的关系, 无法反映这些平衡曲线及其分岔对其振荡行为的影响规律. 因此, 有必要引入能够反映状态变量与慢变量之间关系的转换相图.

传统的相图反映的是随时间变化不同变量之间的关系, 对于本文的系统模型而言, 传统相图可以表示为 $\Gamma := \{[x(t), y(t)], \forall t \in \mathbb{R}\}$, 在此基础上, 定义

$$\Gamma_G := \{[x(t), y(t), \omega(t)] \\ = [x(t), y(t), A \sin(\Omega t)], \forall t \in \mathbb{R}\}$$

为转换相图, 即将 ω 视为广义状态变量, 能够描述状态变量与慢变量 ω 之间的相互关系.

4.1 $\beta = 0.5$

图2给出了 $\beta = 0.5$ 时系统在 (x, y) 平面上的相图及其相应的状态变量 x 的时间历程. 从图2(a)

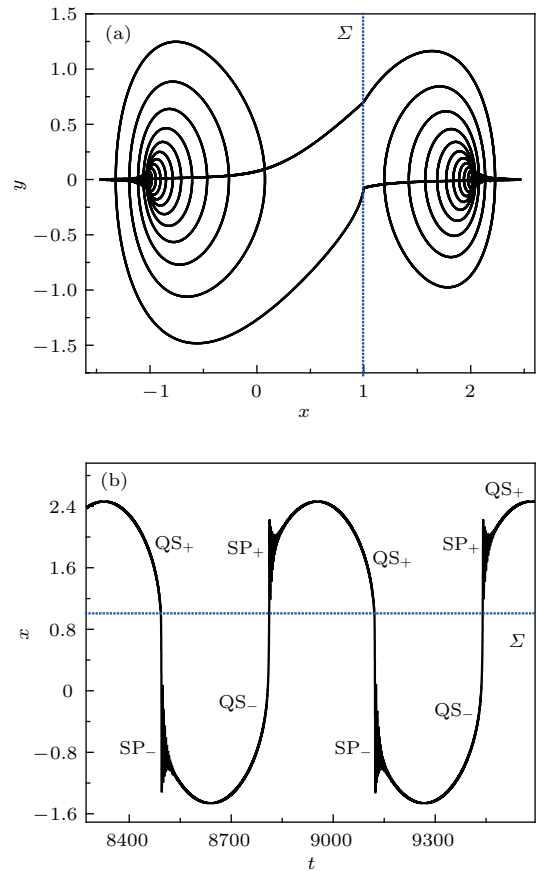


图2 $\beta = 0.5$ 时系统振荡行为 (a) (x, y) 平面上的相图; (b) x 的时间历程
Fig. 2. Oscillatory behavior of system for $\beta = 0.5$: (a) Phase portrait on the (x, y) plan; (b) the time history of x .

中可以发现, 系统轨迹可以分为位于 D_{\pm} 区域中的两个部分, 表现为分别趋于稳定焦点 E_{\pm} 的逐渐收敛过程. 当轨迹抵达 E_{\pm} 时, 由于慢变量的作用, 轨迹产生跳跃现象而趋向分界面 Σ , 同时, 在轨迹穿越分界面 Σ 时, 存在非光滑行为.

从图 2(b) 中相应的时间历程可以发现, 状态变量 x 在大幅振荡和微幅振荡之间来回变化, 分别对应于 SP_{\pm} 和 QS_{\pm} , 表现为典型的周期簇发振荡特性, 其振荡周期与 ω 完全一致, 也即 $T = 2\pi/\Omega$.

为揭示这一簇发振荡的产生机理, 图 3 给出了相应的转换相图及其与平衡曲线之间的叠加图. 从图 3(a) 中可以非常清楚地看出, 按照分界面的划分, 系统轨迹可以分为分别位于区域 D_{\pm} 的两部分, 不同区域中的轨线随着慢变量 ω 的变化, 又分别存在着趋于稳定平衡点的渐进过程和从平衡点产生跳跃的过程.

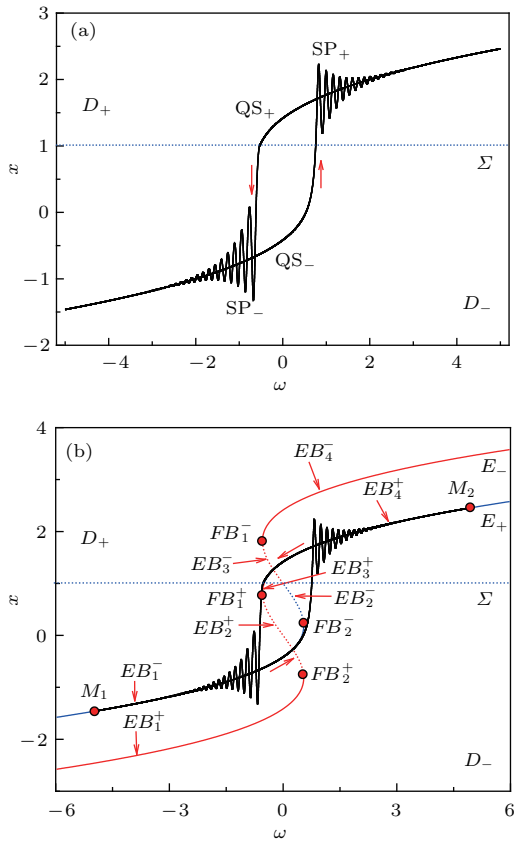


图 3 $\beta = 0.5$ 时簇发振荡 (a) (ω, x) 平面上的转换相图; (b) 转换相图与平衡曲线的叠加图

Fig. 3. Bursting oscillatory for $\beta = 0.5$: (a) Transformed phase portrait on the (ω, x) plane; (b) the overlap of equilibrium branches and transformed phase portrait on the (ω, x) plane.

为说明其振荡机理, 下面分析转换相图与平衡曲线的叠加图(图 3(b)). 假设轨迹从 M_1 点出发,

对应于慢变量 ω 取最小值 $\omega = -5.0$, 由于 M_1 位于区域 D_- 内, 因而轨迹受 D_- 内子系统控制, 而该系统存在稳定的平衡曲线 EB_1^- , 因此轨迹几乎严格沿 EB_1^- 运动, 表现为沉寂态 QS_- , 直到轨迹抵达分岔点 FB_2^- , 产生跳跃现象. 由于此时轨迹依然受 D_- 内子系统控制, 轨迹将跳向 D_+ 区域内的稳定平衡曲线 EB_4^- . 在该跳跃过程中, 当轨迹穿越分界面 Σ 后, 轨迹转为受 D_+ 内子系统控制, 而该系统在 D_+ 区域内存在稳定的平衡曲线 EB_4^+ , 因而轨迹将逐渐振荡趋于稳定平衡曲线 EB_4^+ . 由于从分界面到 EB_4^+ 之间存在一定的距离, 而 EB_4^+ 为焦点型平衡曲线, 因此存在着振荡趋于该稳定平衡曲线的过程, 导致大幅振荡, 对应于激发态 SP_+ . 随着 ω 的继续增加, 激发态的振荡幅值逐渐减小, 直至轨迹稳定于平衡曲线 EB_4^+ 上, 进而几乎严格沿该平衡曲线运动, 进入沉寂态 QS_+ .

当轨迹运动到 M_2 点, 也即 ω 增大到最大至 $\omega = +5.0$ 时, 随着时间的增加, ω 将逐渐减小, 使得轨迹掉头, 此时轨迹受 D_+ 区域内子系统控制, 因此几乎严格沿 EB_4^+ 反向运动. 当轨迹穿越分界面 Σ 进入 D_- 区域时, 轨迹转而受 D_- 区域内子系统控制, 因此轨迹将趋向焦点型平衡曲线 EB_1^- , 导致大幅振荡, 对应于激发态 SP_- . 随着 ω 的继续减小, 其激发态的振荡幅值也逐渐减小, 直至轨迹稳定到平衡曲线 EB_1^- 上, 进入沉寂态 QS_- , 并几乎严格沿 EB_1^- 运动, 直到轨迹抵达出发点 M_1 , 完成一个周期的振荡.

必须指出的是, 轨迹两次穿越分界面的性质不同, 在 ω 增加过程中的穿越, 是由于 D_- 区域中平衡曲线的光滑 fold 分岔引起的, 而在 ω 减少过程中的穿越, 是由于轨迹抵达平衡曲线与分界面交点时产生非光滑 fold 分岔引起的, 这不仅可以从上述的微分包含理论说明, 也可以从轨迹的跳跃过程得到证实. 这也导致在两区域 D_{\pm} 内, 产生激发态的机理是不一样的. 在 D_- 区域内, 由于 fold 分岔, 使得轨迹跳向 D_+ 区域内的另一稳定平衡曲线, 而在这一过程中, 一旦轨迹穿越分界面, 就会产生趋向 D_+ 区域内子系统的稳定平衡曲线. 而在 D_+ 区域内, 当轨迹沿稳定平衡曲线运动到分界面时, 由于控制系统发生突变, 导致轨迹跳向 D_- 区域内子系统的稳定平衡曲线. 同为跳跃现象, 一种是由光滑 fold 分岔引起的, 而另一种是由非光滑 fold 分岔引起的. 另外, 两激发态分别对应于从轨迹和分界面交点处

向不同区域内子系统的稳定平衡点的收敛的暂态过程, 因此其相应簇发振荡的频率可以由焦点型平衡点特征值的一对共轭复根的虚部决定.

另外, 当非光滑分界面为快子系统的平衡曲线时, 在其相应的簇发振荡中存在着擦边运动行为^[31], 非光滑分岔决定着擦边运动的开始和终结及轨迹穿越分界面的模式^[32]. 而在本文中, 由于子系统的平衡曲线直接穿越非光滑分界面, 两子系统的稳定平衡曲线及其相应吸引域分别存在于不同的区域中, 导致了其簇发振荡中的擦边运动, 并直接决定着擦边运动的开始和结束.

从几何结构上, 该簇发振荡表现为围绕不同平衡点的振荡, 因此, 可以称为周期非光滑点-点型簇发振荡. 而从分岔形式上, 其沉寂态向激发态的转换分别由光滑 fold 分岔和非光滑 fold 分岔引起, 因此, 该簇发振荡也可以称为周期光滑 fold/非光滑 fold 簇发.

4.2 $\beta = 2.0$

由上述分析可知, 增加参数 β 值, 会导致平衡曲线的变化, 从而可能会改变振荡吸引子的结构. 图 4 给出了 $\beta = 2.0$ 时系统在 (x, y) 平面上的相图及其相应的状态变量 x 的时间历程.

从图 4 中可以看出, 系统轨迹虽然也是围绕两平衡点振荡, 但是其穿越非光滑分界面的方式发生了很大的变化, 不仅表现在穿越次数的增加, 同时, 在 y 轴上穿越范围也显著变化. 特别地, 由图 4(b) 可知, 轨迹在非光滑分界面上发生了擦边运动, 这也可以从图 5 中状态变量 x 的时间历程中得到证实.

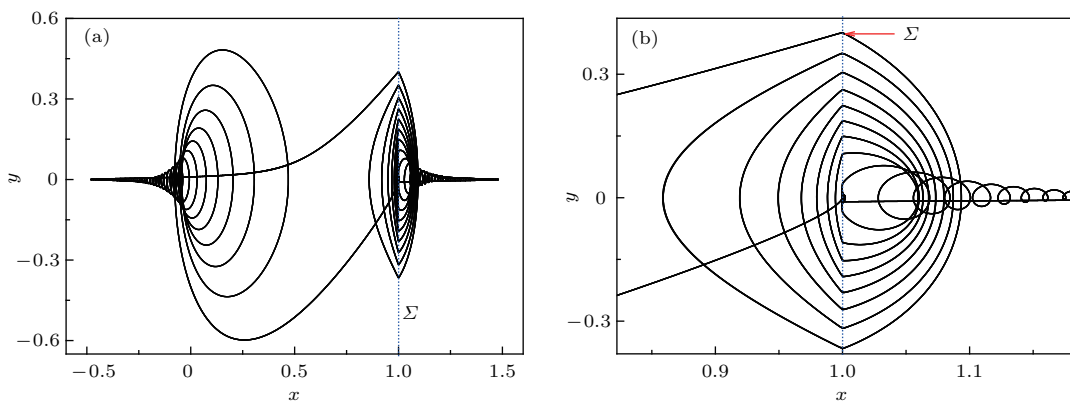


图 4 $\beta = 2.0$ 时系统振荡行为 (a) (x, y) 平面上的相图; (b) (x, y) 平面上的局部放大图

Fig. 4. Oscillatory behavior of system for $\beta = 2.0$: (a) Phase portrait in the (x, y) plan; (b) the locally enlarged parts in the (x, y) plan.

从图 5 中的时间历程及其局部放大图可以发现, 其轨迹依然表现为周期振荡, 且同样包含两个沉寂态 QS_{\pm} 和两个激发态 SP_{\pm} . 然而与 $\beta = 0.5$ 时相比, 发生了明显的变化, 主要表现在: 1) 轨迹存在着多次穿越分界面的非光滑行为, 参见图 4(b) 和图 5(c); 2) 轨迹会沿分界运动一定的时间区间, 即产生擦边运动, 参见图 5(d); 3) 两区域中激发态的振荡周期发生变化, 参见图 5(b) 和图 5(c).

导致激发态周期发生变化的主要原因是, 对于图 5(b) 中的激发态, 由于整个激发振荡的过程不穿越分界面, 其振荡频率可以由位于区域 D_{-} 中的平衡曲线所对应特征值共轭复根的虚部近似, 经计算可知两特征值为 $\lambda_{1,2} = -0.1 \pm 2.16i$, 从而可得激发态振荡频率的理论值近似等于 2.16, 这与图 5(b) 中的数值仿真结果 $\Omega_1 = 2\pi/T_1 = 2.09$ 符合良好. 而对于图 5(c) 中的激发振荡, 其相应轨迹来回穿越分界面 Σ , 因此其振荡频率分别由两部分组成, 即分别由从分界面到位于 D_{\pm} 中不同吸引子振荡趋近部分组成, 经计算其振荡的理论解近似为 3.17, 这也与数值仿真结果 $\Omega_2 = 2\pi/T_2 = 3.14$ 非常一致.

为进一步说明 $\beta = 2.0$ 时振荡行为的产生机理及上述两种不同模式簇发振荡之间的区别, 图 6 给出了 $\beta = 2.0$ 时簇发振荡的转换相图及其与平衡曲线的叠加图. 从图 6(a) 中可以看出, 系统轨迹在 D_{\pm} 区域内分别围绕两稳定平衡曲线振荡, 两振荡过程之间出现了两种形式的连接方式, 一是跳跃连接, 二是先沿非光滑分界面上运行一段时间后, 再产生跳跃连接.

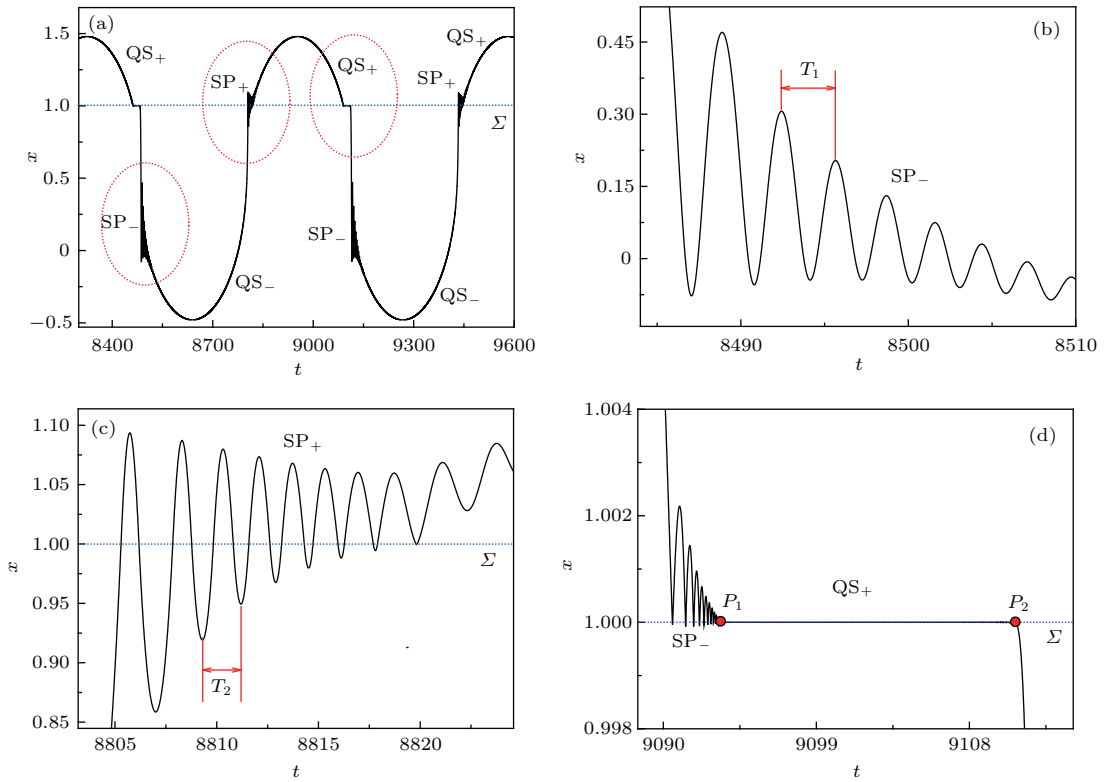


图5 $\beta = 2.0$ 时 x 的时间历程及其局部放大图
 Fig. 5. Time history of x for $\beta = 2.0$ and its locally enlarged part.

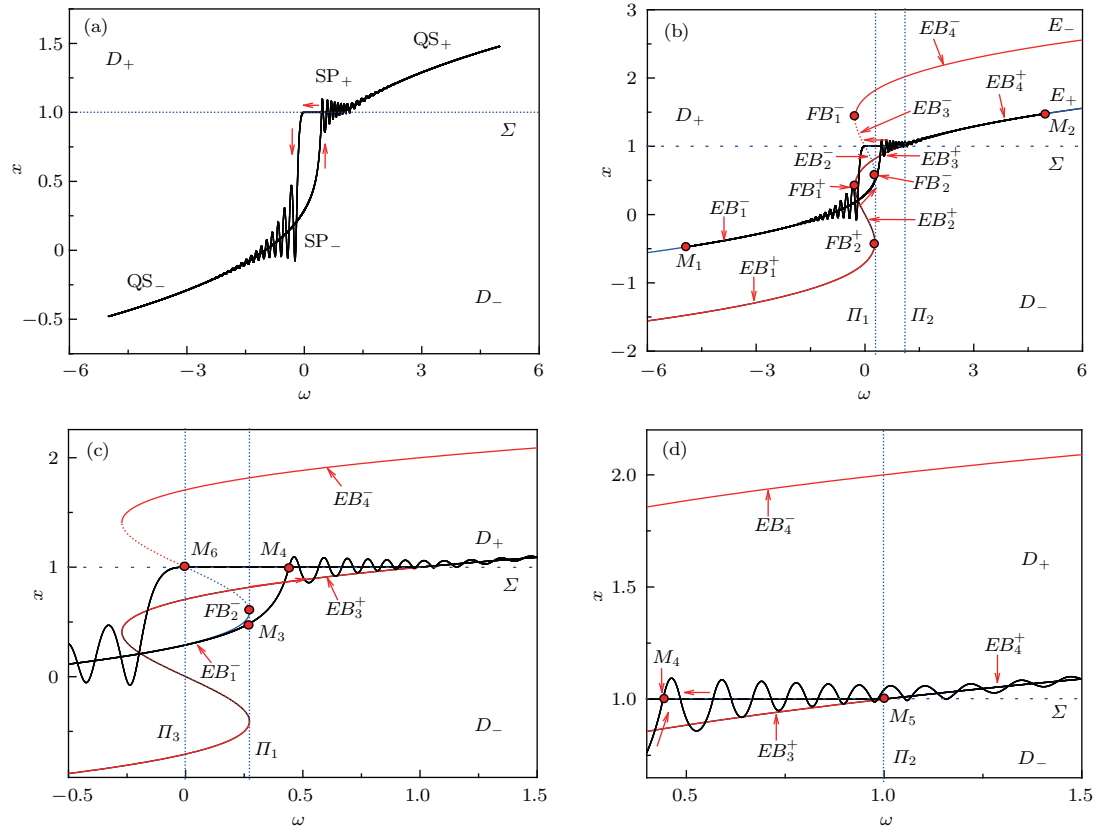


图6 $\beta = 2.0$ 时的簇发振荡 (a) (ω, x) 平面上转换相图; (b) 转换相图与平衡曲线叠加图及局部放大图 (c) 和 (d)
 Fig. 6. Bursting oscillatory for $\beta = 2.0$: (a) Transformed phase portrait on the (ω, x) plane; (b) the overlap of equilibrium branches and transformed phase portrait on the (ω, x) plane and the locally enlarged parts of the overlap in (c) and (d).

为进一步说明簇发振荡模式的机理,下面分析其转换相图与平衡曲线之间的叠加图. 依然假设系统轨迹从 M_1 点出发, 对应于慢变量 ω 取最小值 $\omega = -5.0$ (参见图 6(b)), 由于 M_1 点在 D_- 区域内, 因而轨迹受 D_- 内子系统控制, 而该子系统存在稳定的平衡曲线 EB_1^- , 因此轨迹几乎严格沿 EB_1^- 运动, 表现为沉寂态 QS_- , 直到轨迹抵达与分岔点 FB_2^- 点对应相同 ω 值的 M_3 点 (参见图 6(c)), 由 fold 分岔产生跳跃现象. 由于此时轨迹依然受 D_- 内子系统控制, 轨迹将跳向 D_+ 区域内的稳定平衡曲线 EB_4^+ .

4.2.1 围绕分界面振荡机理

在该跳跃过程中, 当轨迹穿越分界面 Σ 后, 轨迹转为受 D_+ 内子系统控制, 而该子系统仅在 D_- 区域内存在稳定的平衡曲线 EB_3^+ , 因而轨迹又穿越分界面返回 D_- 区域, 转为受 D_- 内子系统控制, 同样, 该子系统仅在 D_+ 区域内存在稳定的平衡曲线 EB_4^- , 轨迹只能穿越分界面回到区域 D_+ . 由于不同区域中子系统的稳定平衡曲线与该子系统分别位于不同的 D_{\pm} 区域内, 因此, 控制轨迹的系统在两子系统之间交替变化, 从而导致轨迹来回穿越非光滑分界面, 形成这种特殊形式的激发态 SP_+ .

随着 ω 的继续增加, 激发态的振荡幅值逐渐减小. 当轨迹抵达 M_5 点时 (参见图 6(d)), 一旦轨迹进入区域 D_+ 后, 由于控制系统与其相应的稳定吸引子均位于同一区域 D_+ 内, 因此轨迹将逐渐稳定于相应的稳定平衡曲线 EB_4^+ 上, 进入沉寂态 QS_+ (参见图 6(d)). 当轨迹几乎严格沿稳定平衡曲线 EB_4^+ 运动到 M_2 时, 即对应于 ω 取最大值 $\omega = +5.0$, 随着时间的继续增加, ω 将逐渐减小, 从而导致轨迹几乎严格沿 EB_4^+ 反向运动 (参见图 6(b)). 当轨迹运动到稳定平衡曲线与分界面的交点, 也即截面 Π_2 上的 M_5 点时, 随着 ω 的继续减小, 会产生擦边运动 (参见图 6(d)).

4.2.2 擦边运动机理

当轨迹运动到分界面上的 M_5 时, 由上述分析可知, 当 ω 取值范围在两截面 Π_1 和 Π_3 之间时, 控制轨迹的系统和其所对应的稳定平衡曲线分别位于不同 D_{\pm} 区域内, 一旦轨迹穿越分界面则必将反向返回, 而在 M_5 点轨迹与分界面之间的距离为零,

因此在两子系统的交替作用下, 轨迹只能驻留在分界面上, 从而导致轨迹的擦边现象.

当轨迹沿分界面擦边运动到位于截面 Π_3 与分界面的交点, 即图 6(c) 中的 M_6 点时, 一旦轨迹进入 D_- , 由于控制轨迹的子系统与相应的稳定平衡曲线均位于同一区域 D_- 内, 因此, 轨迹将跳向稳定平衡曲线 EB_1^- , 由于分界面与焦点型稳定平衡曲线 EB_1^- 之间存在一定的距离, 从而导致大幅振荡趋近过程, 产生激发态 SP_- . 随着 ω 的继续减小, 轨迹的振荡幅值也将逐渐减小, 直到轨迹稳定于平衡曲线 EB_1^- 上. 当轨迹几乎严格沿稳定平衡曲线 EB_1^- 运动到出发点 M_1 时, 完成一个周期的簇发振荡.

4.2.3 擦边运动时间

显然, 当 ω 取值位于两截面 Π_1 和 Π_3 之间时, 会产生擦边运动, 因此擦边运动的时间可以根据 ω 从截面 Π_1 变化到截面 Π_3 所需的时间来近似. 从图 7 中可以得到擦边运动时间的理论近似值为 $T_C = 19.42$, 而从其相应数值计算中的时间历程 (图 5(d)) 可以得到相应擦边运动的时间为 $T_S = 18.63$, 两者符合良好.

从几何结构上, 该簇发振荡依然为周期非光滑点-点型簇发, 而从分岔机理上, 该振荡则为周期非光滑 fold-sliding 簇发振荡.

从上述不同参数条件下系统行为的分析可以发现, 快子系统的平衡曲线及其相应的分岔特性不仅直接影响到系统的簇发振荡形式, 其与分界面之间的关系也会影响簇发振荡轨迹穿越分界面时的动力学行为.

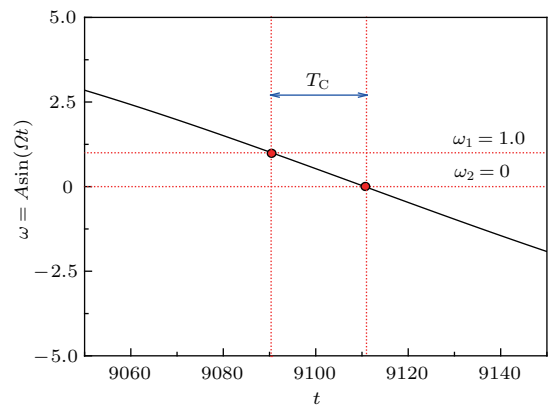


图 7 ω 在两截面 Π_1 和 Π_3 之间的变化情况
Fig. 7. The change of ω between Π_1 and Π_3 .

5 结 论

周期激励下 Filippov 系统存在频域上不同尺度耦合时会产生各种簇发振荡行为. 周期激励频率远小于系统的固有频率的情形, 可以将整个周期激励项视为慢变参数, 从而得到相应的快子系统, 即广义自治系统. 非光滑分界面将整个状态平面划分为不同的区域, 随慢变量的变化, 在各个区域中子系统存在着不同的平衡曲线及分岔特性. 同时, 在非光滑分界面上, 平衡点也会产生相应的非光滑分岔行为, 这些平衡曲线及分岔特性, 不仅影响整个激励系统簇发振荡的结构, 也会影响轨迹在分界面上的行为. 必须指出的是, 在系统运动过程中, 当控制子系统与相应稳定平衡曲线在同一区域时, 轨迹将逐渐稳定于该平衡曲线, 而当控制子系统与相应稳定平衡曲线在不同区域时, 轨迹将产生穿越非光滑分界面的行为. 其穿越方式与稳定平衡曲线的具体分布密切相关, 在不同条件下, 会产生直接穿越现象, 也会产生沿分界面的擦边运动, 其产生机理可以通过相应子系统及其平衡曲线的性质得到.

参考文献

- [1] Duan C, Singh R 2005 *J. Sound Vib.* **285** 1223
- [2] Siefert A, Henkel F O 2014 *Nucl. Eng. Des.* **269** 130
- [3] Chen Z Y, Wang Y M 2016 *J. Henan Sci. Univ.* **37** 87 (in Chinese) [陈章耀, 王亚茗 2016 河南科技大学学报 **37** 87]
- [4] Galvanetto U 2001 *J. Sound Vib.* **248** 653
- [5] Carmona V, Fernández-García S, Freire E 2012 *Physica D* **241** 623
- [6] Dercole F, Gagnani A, Rinaldi S 2007 *Theor. Popul. Biol.* **72** 197
- [7] Zhang S J, Zhou L B, Lu Q S 2007 *J. Mech.* **39** 132 (in Chinese) [张思进, 周利彪, 陆启韶 2007 力学学报 **39** 132]
- [8] Zhang X F, Chen X K, Bi Q S 2012 *J. Mech.* **44** 576 (in Chinese) [张晓芳, 陈小可, 毕勤胜 2012 力学学报 **44** 576]
- [9] Zhou Z, Tan Y, Xie Y 2016 *Mech. Syst. Sig. Process.* **83** 439
- [10] Kahan S, Sicardi-Schifino A C 1999 *Physica A* **262** 144
- [11] Baptista M S 1999 *Physica D* **132** 325
- [12] Leine R I 2006 *Physica D* **223** 121
- [13] Leine R I, Glocker C 2003 *Eur. J. Mech. A: Solids* **22** 193
- [14] Leine R I, Campen D H V 2006 *Eur. J. Mech.* **25** 595
- [15] Izhikevich E M, Desai N S, Walcott E C 2003 *Trends Neurosci.* **26** 161
- [16] Vanag V K, Epstein I R 2011 *Phys. Rev. E* **84** 066209
- [17] Jia Z, Leimkuhler B 2003 *Future Gener. Comp. Syst.* **19** 415
- [18] Yu B S, Jin D P, Pang Z J 2014 *Science China E* **8** 858 (in Chinese) [余本嵩, 金栋平, 庞兆君 2014 中国科学 **8** 858]
- [19] Yang S C, Hong H P 2016 *Eng. Struct.* **123** 490
- [20] Ji Y, Bi Q S 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1434
- [21] Cardin P T, de Moraes J R, da Silva P R 2015 *J. Math. Anal. Appl.* **423** 1166
- [22] Hodgkin A L, Huxley A F 1990 *Bull. Math. Biol.* **52** 25
- [23] Ferrari F A S, Viana R L, Lopes S R, Stoop R 2015 *Neural Networks* **66** 107
- [24] Huang X G, Xu J X, He D H, Xia J L, Lü Z J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1810 (in Chinese) [黄显高, 徐健学, 何岱海, 夏军利, 吕泽均 1999 物理学报 **48** 1810]
- [25] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifurcation Chaos* **10** 1171
- [26] Shimizu K, Saito Y, Sekikawa M 2015 *Physica D* **241** 1518
- [27] Han X J, Bi Q S 2012 *Int. J. Non Linear Mech.* **89** 69
- [28] Wu T Y, Chen X K, Zhang Z D, Zhang X F, Bi Q S 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 35 (in Chinese) [吴天一, 陈小可, 张正娣, 张晓芳, 毕勤胜 2017 物理学报 **66** 35]
- [29] Tana X, Qinc W, Liud X, Jin Y, Jiangb S 2016 *J. Non-linear Sci. Appl.* **9** 3948
- [30] Premraj D, Suresh K, Palanivel J 2017 *Commun. Non-linear Sci.* **50** 103
- [31] Yang X F, Zhang Z D, Li S L 2017 *J. Henan Sci. Univ.* **38** 65 (in Chinese) [杨秀芳, 张正娣, 李绍龙 2017 河南科技大学学报 **38** 65]
- [32] Yang X F 2017 *M. S. Dissertation* (Zhenjiang: Jiangsu University) (in Chinese) [杨秀芳 2017 硕士学位论文(镇江: 江苏大学)]

Bursting oscillations and mechanism of sliding movement in piecewise Filippov system*

Zhang Zheng-Di¹⁾ Liu Ya-Nan¹⁾ Li Jing¹⁾ Bi Qin-Sheng^{2)†}

1) (Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

2) (Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 10 November 2017; revised manuscript received 13 January 2018)

Abstract

Since the wide applications in science and engineering, the dynamics of non-smooth system has become one of the key research subjects. Furthermore, the interaction between different scales may result in special movement which can be usually described by the combination of large-amplitude oscillation and small-amplitude one. The influence of multiple scale on the dynamics of non-smooth system has received much attention recently. In this work, we try to explore the bursting oscillations and the mechanism of non-smooth Filippov system coupled by different scales in the frequency domain. Taking the typical periodically excited Duffing's oscillator for example a Filippov system coupled by two scales in the frequency domain is established when the difference in order between the excited frequency and the system natural frequency is obtained by introducing the piecewise control into the state variable and choosing suitable parameters. For the case in which the exciting frequency is far less than the natural frequency, the whole exciting term can be considered as a slow-varying parameter, also called slow subsystem, which leads to a generalized autonomous system, i.e., the fast subsystem. The equilibrium branches and the bifurcations of the fast subsystem along with the variation of the slow-varying parameter in different regions divided according to non-smooth boundary, can be derived. Two typical cases are taken into consideration, in which different distributions of the equilibrium branches and the relevant bifurcations of the fast subsystem may exist. It is pointed out that the variations of the parameters may influence not only the properties of the equilibrium branches, but also the structures of the bursting attractors. Furthermore, since the governing equation alternates between two subsystems located in different regions when the trajectory passes across the non-smooth boundary, the sliding movement along the non-smooth boundary of the trajectory can be observed under the condition of certain parameters. By employing the transformed phase portrait which describes the relationship between the state variable and the slow-varying parameter, the mechanisms of different bursting oscillations and sliding movements are investigated. The results show that bursting oscillations may exist in a non-smooth Filippov system coupled by two scales in the frequency domain. The alternations of the governing equation between different subsystems located in the two neighboring regions along the non-smooth boundary may result in a sliding movement of the trajectory along the non-smooth boundary.

Keywords: piecewise non-smooth Filippov system, coupling of two scales, bursting oscillations, bifurcation mechanism

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.67.20172421

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11472116, 11472115) and the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11632008).

† Corresponding author. E-mail: qbi@ujs.edu.cn