物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

非扩散洛伦兹系统的周期轨道

董成伟

Periodic orbits of diffusionless Lorenz system

Dong Cheng-Wei

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 67, 240501 (2018)   DOI: 10.7498/aps.67.20181581
在线阅读 View online: http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20181581
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I24

半导体激光器输出混沌光的延时特性和带宽
Time delay characteristics and bandwidth of chaotic laser from semiconductor laser
物理学报.2018, 67(14): 140501   http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20180035

非扩散洛伦兹系统的周期轨道*

董成伟†

(中北大学理学院物理学科部, 太原 030051)

(2018年8月23日收到; 2018年10月22日收到修改稿)

混沌系统的奇怪吸引子是由无数条周期轨道稠密覆盖构成的, 周期轨道是非线性动力系统中除不动点之外最简单的不变集, 它不仅能够体现出混沌运动的所有特征, 而且和系统振荡的产生与变化密切相关, 因此分析复杂系统的动力学行为时获取周期轨道具有重要意义. 本文系统地研究了非扩散洛伦兹系统一定拓扑长度以内的周期轨道, 提出一种基于轨道的拓扑结构来建立一维符号动力学的新方法, 通过变分法数值计算轨道显得很稳定. 寻找轨道初始化时, 两条轨道片段能够被用作基本的组成单元, 基于整条轨道的结构进行拓扑分类的方式显得很有效. 此外, 讨论了周期轨道随着参数变化时的形变情况, 为研究轨道的周期演化规律提供了新途径. 本研究可为在其他类似的混沌体系中找到并且系统分类周期轨道提供一种可借鉴的方法.

关键词: 非扩散洛伦兹系统, 周期轨道, 变分法, 符号动力学

PACS: 05.45.–a, 05.45.Ac, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.67.20181581

1 引 言

1963年, 洛伦兹[1]在研究大气热对流问题时提出了著名的洛伦兹系统. 自此以后, 越来越多的研究者投身到非线性科学的研究中, 这些年来取得了长足的进步. 研究者们不仅关注于洛伦兹系统的动力学性质, 也对其在混沌控制、混沌同步和保密通信等诸多领域的应用做了大量的研究[2]. 与此同时, 人们也提出了一些关于洛伦兹系统的拓展, 例如只含有一个非线性项的勒斯勒系统[3]、四维超混沌洛伦兹系统[4]以及大气物理中的一类扰动洛伦兹系统[5]. 目前, 已经发现洛伦兹系统、陈系统[6]和吕系统[7]能够形成统一的洛伦兹混沌族[8]. 2000年, Schrier和Maas[9]提出了非扩散洛伦兹系统: 该系统是洛伦兹模型的简化, 仅由一个参数来决定. 自那以来, 人们对该系统做了许多研究工作. 文献[10]以李雅普诺夫稳定性理论为基础, 针对非扩散洛伦兹系统, 提出了一种三个耦合的恒等系统的全局混沌同步方案. 文献[11, 12]介绍了非扩散洛伦兹系统在保密通信领域的应用, 该系统可被用作发送器和接收器, 并已在计算机仿真和电子实验电路中得到了验证. 文献[13, 14]研究了分数阶非扩散洛伦兹系统的混沌动力学性质及其控制. 文献[15]采用解析的方式研究了非扩散洛伦兹系统的重要轨道, 如周期轨道和同宿轨道. 文献[16]提出了利用周期参数扰动的方法来控制非扩散洛伦兹系统的混沌行为, 文献[17]则采用计算机数值模拟和实验手段, 研究了周期参数扰动的非扩散洛伦兹系统动力学行为.

在混沌系统中, 当研究长时间的非线性动力学行为时, 由于混沌运动和初始条件紧密相关, 想要精确预言出物理量的值是行不通的[18]. 然而, 由于动力学运动具有各态历经行为, 原则上能够算出物理量的平均值. 周期轨道理论是分析混沌体系动力学行为的一种强有力工具, 轨道展开能够有效计算动力系统物理量的平均值[19–21]. 该理论通过将找到的一定拓扑长度以内的所有周期轨道有序排列, 进而计算出混沌系统的长期平均值. 如果系统是均

* 国家自然科学基金 (批准号: 11647085, 11647086, 11747106)、山西省应用基础研究计划 (批准号: 201701D121011) 和中北大学自然科学研究基金 (批准号: XJJ2016036) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dongchengwei@tsinghua.org.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

匀双曲的, 只计算短的周期轨道忽略长的周期轨道也可以得到很好的精度, 轨道展开随着周期轨道长度的增加快速收敛. 应用周期轨道理论的关键是建立合适的符号动力学[22], 否则的话, 即便发现了一些轨道, 也不知道它们到底存在多少条以及彼此间是如何相关联的. 忽略掉一条短的周期轨道也将对计算精度产生影响. 对于非扩散洛伦兹系统, 周期轨道理论将会继续起着重要的作用. 目前为止, 还没有相关的研究工作对该系统的周期轨道开展系统的研究. 本文提出了一种普适的方法用来系统地计算非扩散洛伦兹系统的周期轨道, 基于轨道在相空间的拓扑结构建立合适的符号动力学, 借此实现对所有短周期轨道进行分类.

本文首先讨论了非扩散洛伦兹系统的动力学性质, 计算非线性耗散系统的周期轨道需要采用数值方法; 其次, 简要介绍变分法, 并采用此方法来计算系统的周期轨道; 然后, 讨论了如何建立一维符号动力学, 这在分类一定拓扑长度内的周期轨道时起着关键作用; 最后, 讨论了周期轨道随着参数变化时的演化情况.

2 非扩散洛伦兹系统的动力学

非扩散洛伦兹系统是由3个微分系统构成的, 其形式如下:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-x-y,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-xz,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=R+xy, \tag{1}$$

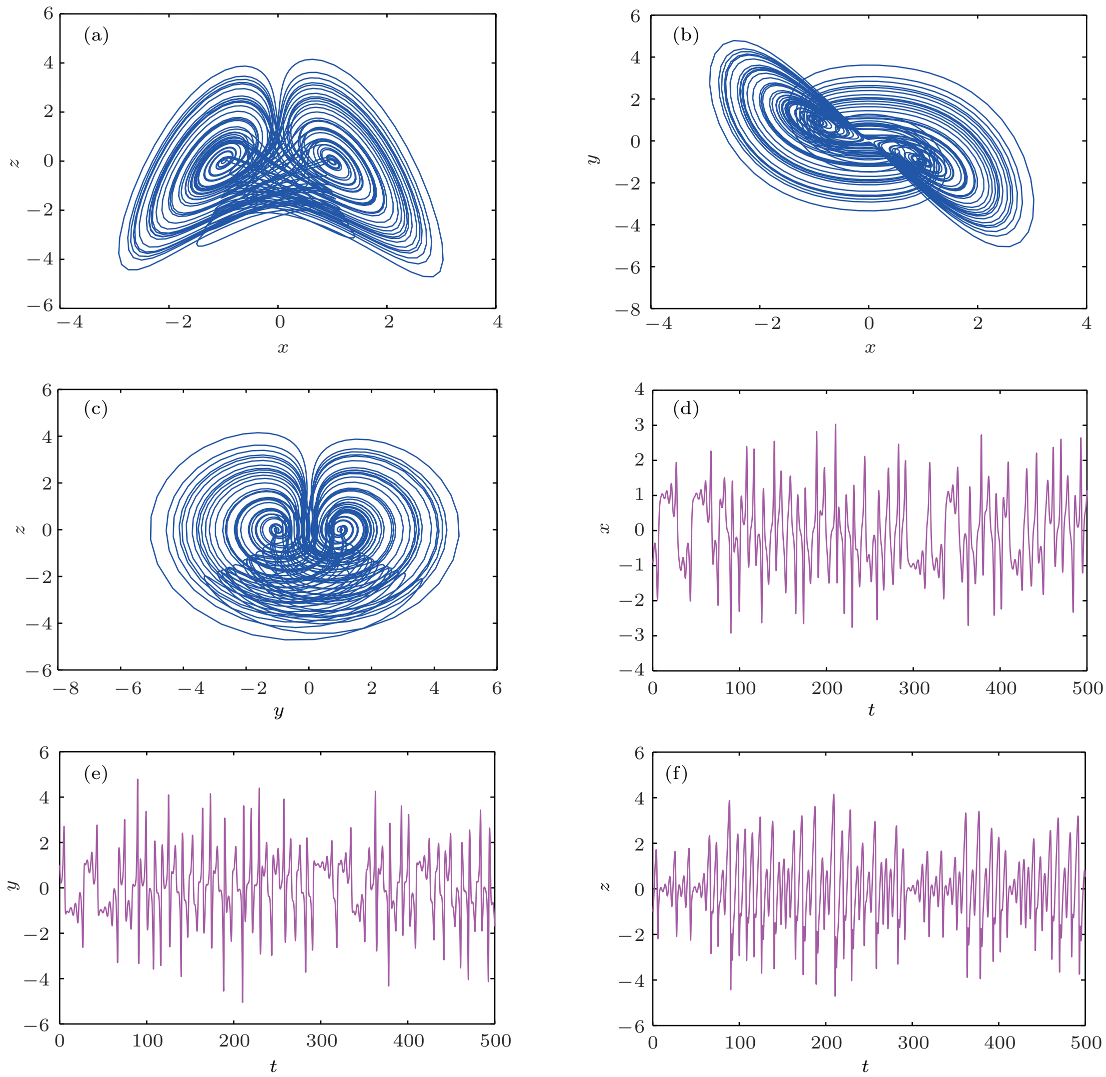

图 1 时间 $t=500$ 时非扩散洛伦兹系统的混沌行为 ($R=1$) (a) x-z 平面、(b) x-y 平面和 (c) y-z 平面相图; (d) 变量 x、(e) 变量 y 和 (f) 变量 z 的时间序列图

Fig. 1. Chaotic behaviors of the diffusionless Lorenz system at time $t=500$ ($R=1$): Phase diagrams of (a) x-z plane, (b) x-y plane, and (c) y-z plane; time series diagrams for (d) x variable, (e) y variable, and (f) z variable.

式中 R 为系统的参数; xz 和 xy 为两个非线性项. 如同洛伦兹系统一样, 非扩散洛伦兹系统进行如(2)式的变换后保持不变:

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z), \tag{2}$$

即系统是关于 z 轴对称的. 非扩散洛伦兹系统的两个不动点分别为

$$\begin{aligned} S_+ &= (\sqrt{R}, -\sqrt{R}, 0), \\ S_- &= (-\sqrt{R}, \sqrt{R}, 0). \end{aligned} \tag{3}$$

系统轨道的演化情况对初始条件的选取非常敏感. 图1展示了当参数 $R = 1$ 时, 非扩散洛伦兹系统复杂的演化轨道在不同二维空间上的投影以及不同变量的时间序列图, 选取的初值为 $[0.9, 1.0, -1.0]$. 此时系统的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -z & 0 & -x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

雅可比矩阵的本征值和不动点给出了此混沌系统更进一步的信息. 本征值满足的特征方程为

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 = 0. \tag{5}$$

由此可得到本征值为

$$\begin{aligned} &(\mu^{(1)} \pm \mathrm{i}\omega^{(1)}, \lambda^{(3)}) \\ =&(0.1766 \pm 1.2028\mathrm{i}, -1.3532). \end{aligned} \tag{6}$$

通过本征值可以计算出轨道在不动点附近旋转的周期大约是 $T \approx |2\pi/\omega^{(1)}| = 5.2211$. 始于不动点附近的一条轨道每旋转一周远离及靠近的特征乘子分别为 $\Lambda_1 \approx \exp(\mu^{(1)}T) = 2.5143$, $\Lambda_3 \approx \exp(\lambda^{(3)}T) = 8.5 \times 10^{-4}$. 系统的奇怪吸引子由无数条稠密覆盖的周期轨道构成, 为了系统地计算出这些不稳定的周期轨道, 第3节将会介绍一种用来计算混沌系统周期轨道的强有力方法.

3 变分法计算周期轨道

变分法是一种计算周期轨道的新颖方法[23]. 这种方法既保留了多点打靶法鲁棒性的特点, 当搜寻过程已经足够接近于真实的周期轨道时, 同时又具有收敛速度快的特点. 变分法的物理思想是: 首先要对想要寻找的不稳定周期轨道作出整体拓扑上的一个粗糙的圈猜想, 然后应用变分法来驱使初始猜想的圈朝着真实的周期轨道逐渐演化. 该方法为了保持鲁棒性, 不是只猜某一条周期轨道上的若干个点, 而是先猜出整条轨道; 为了实现数值方法的稳定性, 采用牛顿下降法代替牛顿-拉弗森迭代法.

变分法能够高效地计算低维耗散动力学系统的周期轨道, 对于这类系统, 相空间的体积在演化过程中不断收缩, 因此存在吸引子. 哈密顿系统和高维复杂体系的周期轨道同样可以利用变分法进行计算. 当前, 我们面临着许多大自由度的非线性复杂体系, 由于需要使用多个变量来描述大量的自由度, 在数值计算时就需要占用大量的计算机内存, 而与之相关的庞大计算会使得计算速度变得很慢. 即使投入了大量的资源得到一些零散的结果, 常常也难以发现其中蕴含的规律, 得出富有洞察力的理解. 因此对于高维系统甚至流体系统而言, 如何有效地简化变分法, 降低计算所需的时间成本, 还需要做进一步的研究.

偏微分方程(7)描述了利用变分法计算时, 初始圈猜想朝着真实周期轨道的演变过程:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial s \partial \tau} - \lambda \boldsymbol{A} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial \tau} - \boldsymbol{v} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = \lambda \boldsymbol{v} - \tilde{\boldsymbol{v}}, \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为流矢量, 定义了动力系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$; 圈的微分 $\tilde{\boldsymbol{v}} = \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}/\mathrm{d}s$ 为矢量, 与由 $s \in [0, 2\pi]$ 参数化的初始猜想圈相切; $\lambda = \lambda(\tau)$ 为用来控制轨道周期的参数, τ 为虚拟的演化时间, 控制迭代次数; $\boldsymbol{A} = \partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{x}$ 为速度场的梯度矩阵.

方程(7)所具有的重要特性是, 当猜想圈逐渐朝着周期轨道演化时计算得到的成本函数 $F^2[\tilde{\boldsymbol{x}}]$ 单调递减:

$$F^2[\tilde{\boldsymbol{x}}] = \frac{1}{2\pi} \oint_{L(\tau)} \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}} [\tilde{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{x}}) - \lambda \boldsymbol{v}(\tilde{\boldsymbol{x}})]^2. \tag{8}$$

每进行一步迭代, 圈的切速度方向和动力系统流的速度方向的差别就在减小. 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, 圈的切速度 $\tilde{\boldsymbol{v}} = \lambda \boldsymbol{v}$ 就和动力系统的流矢量一致, 此时圈猜想收敛到动力系统流 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 定义的真实周期轨道上. 一旦计算出周期轨道, 其周期可通过(9)式得出:

$$T_{\mathrm{p}} = \int_0^{2\pi} \lambda(\tilde{\boldsymbol{x}}(s, \infty)) \mathrm{d}s. \tag{9}$$

此外, 既然此时已经找出这条周期轨道, 也可以取周期轨道上的一个点作为初始点, 直接对动力系统进行积分来计算轨道的周期.

数值计算时, 采用有限差分方法来离散化圈猜想. 为了保证数值稳定性, 可将圈猜想离散成

(10) 式的形式:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_n \equiv \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{x}}}{\partial s}\bigg|_{\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{x}}(s_n)} \approx (\hat{\boldsymbol{D}}\tilde{\boldsymbol{x}})_n. \tag{10}$$

进行数值计算时采用五点法近似:

$$\hat{\boldsymbol{D}} = \frac{1}{12h}\begin{pmatrix} 0 & 8 & -1 & & & & & 1 & -8 \\ -8 & 0 & 8 & -1 & & & & & 1 \\ 1 & -8 & 0 & 8 & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & -8 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & & & & & 1 & -8 & 0 & 8 \\ 8 & -1 & & & & & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 $h = 2\pi/N$. 这里的每个矩阵元代表着一个 $d\times d$ 的矩阵, 空白处代表零, 其中的两个 $2d\times 2d$ 矩阵

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

分别位于右上角和左下角, 用来满足周期性的边界条件.

这样, (7) 式可以写成以虚拟时间步长 $\delta\tau$ 作为迭代的离散化形式:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{A}} & -\hat{\boldsymbol{v}} \\ \hat{\boldsymbol{a}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta\tilde{\boldsymbol{x}} \\ \delta\lambda \end{pmatrix} = \delta\tau\begin{pmatrix} \lambda\hat{\boldsymbol{v}} - \hat{\tilde{\boldsymbol{v}}} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{A}} = \hat{\boldsymbol{D}} - \lambda\,\mathrm{diag}[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_N]$; $\hat{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2, \cdots, v_N)^{\mathrm{T}}$, $\hat{\tilde{\boldsymbol{v}}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_N)^{\mathrm{T}}$ 是我们想要在圈上到处匹配的两个矢量场; $\hat{\boldsymbol{a}}$ 为 Nd 维的行矢量, 其给坐标变量 $\delta\tilde{\boldsymbol{x}} = (\delta\tilde{\boldsymbol{x}}_1, \delta\tilde{\boldsymbol{x}}_2, \cdots, \delta\tilde{\boldsymbol{x}}_N)$ 附加了一个限制条件. 为了求解圈的坐标变量 $\delta\tilde{\boldsymbol{x}}$ 和周期 $\delta\lambda$, 需要对等式左边 $(Nd+1)\times(Nd+1)$ 的大矩阵求逆. 这里对大矩阵的计算采用带状 LU 分解法, 处理矩阵的周期和边界项时采用 Woodbury 公式 [24].

在之前的工作中, 我们应用变分法研究了耗散系统以及存在排斥子系统的周期轨道, 例如 Kuramoto-Sivashinsky 系统及其稳态解 [25−27], 勒斯勒系统 [28] 以及洛伦兹混沌族 [29,30]. 变分法也可以用来计算保守系统的周期轨道, 例如交叉电磁场中的里德伯原子系统 [31]. 显然这里也可以用变分法来研究非扩散洛伦兹系统的周期轨道.

4 拓扑方式分类非扩散洛伦兹系统的周期轨道

4.1 初始化和符号动力学

本节首先讨论如何对非扩散洛伦兹系统所有的短周期轨道进行计算及分类. 我们采用变分法计算, 参数取 $R = 1$. 随后也将讨论改变参数 R 时, 周期轨道的演变情况. 两条短的周期轨道可以被用作基本的组成单元, 据此成功建立了一维符号动力学, 找到了一定拓扑长度内的所有周期轨道.

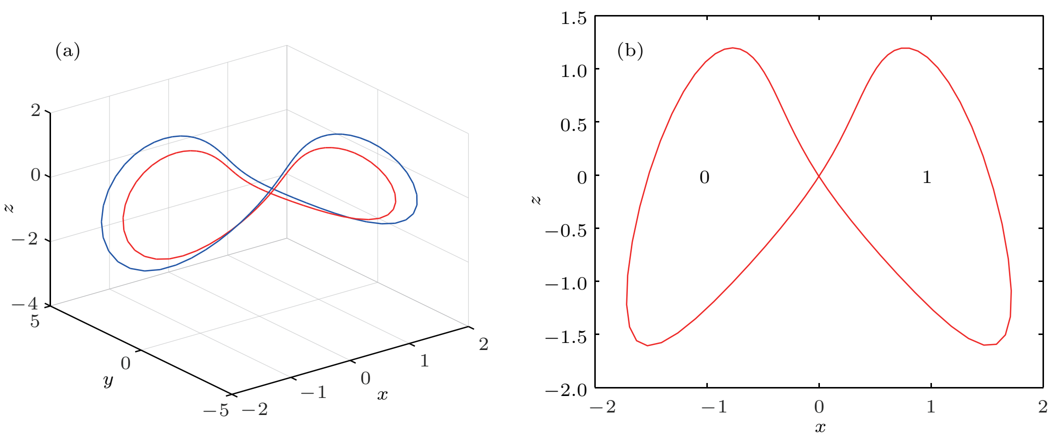

图 2 变分法找到的非扩散洛伦兹系统最短的周期轨道 ($R = 1$) (a) 蓝线是初始猜想的轨道, 红线是系统中真实的周期轨道; (b) 周期轨道 01 的二维投影, 图中标出了轨道片段相对应的符号序列

Fig. 2. Shortest periodic orbit of diffusionless Lorenz system found by variational method ($R = 1$): (a) Blue line denotes the loop guess, and red line represents the periodic orbit; (b) two-dimensional projection of periodic orbit 01; the sequences of symbols corresponding to the orbit fragments are also labeled.

应用变分法时, 有许多种初始化圈猜想的方法. 例如, 为了得到非扩散洛伦兹系统的周期轨道, 首先对动力系统 (1) 式进行长时间的数值积分, 这可以让我们对态空间里轨道密集的区域有一定的了解, 进而从中摘取出接近周期的轨道. 我们选择那些接近闭合的轨道片段, 通过快速傅里叶变换使之平滑, 变成波数表示, 然后去掉高频部分, 做快速傅里叶逆变换到态空间就得到了一个闭合的初始化圈. 通过这种初始化的方式, 经过一些尝试后, 可以计算出系统具有简单拓扑结构的周期轨道. 图 2 展示了利用变分法找到的一条拓扑结构最简单的周期轨道.

为了找到非扩散洛伦兹系统一定拓扑长度以内的所有周期轨道, 可以借助于符号动力学的序列. 对于一维单峰映射, 在区间内只有一个极值点, 因此可以用两个符号来建立系统的符号动力学. 根据迭代, 任何轨道都对应着惟一一段无穷的符号序列, 那么周期轨道就可以通过一个周期序列给出. 以符号序列标记的周期轨道 0, 1, 001 等都是素周期轨道, 而 0101 就不是素周期轨道. 长度为 2 的周期轨道可以由序列 010101 $\cdots$ 来描述, 将该轨道标记为 01. 由于这条轨道的拓扑长度为 2, 其符号序列用两个符号来表示. 这样就可以用不同的符号序列来表示不同拓扑长度的周期轨道.

遗憾的是, 非扩散洛伦兹系统的回归映射是比较复杂的, 并非一维单峰映射, 因此通常的方式很难建立一维符号动力学来系统地计算周期轨道. 需要使用更多的符号序列来表示, 这带来了一定的难度. 如何在非单峰映射中有效建立符号动力学是开放式的问题. 本文提出一种针对非扩散洛伦兹系统建立一维符号动力学的新方式: 利用周期轨道的拓扑结构. 后文还将介绍到计算此混沌体系周期轨道的另一种初始化方法.

4.2　非扩散洛伦兹系统周期轨道的计算

在系统计算非扩散洛伦兹系统的周期轨道时, 初始化过程为: 首先对动力系统进行数值积分, 然后找到那些接近闭合的轨道片段, 并且手动的把它连接成为闭合的圈. 即便圈猜想不足够光滑, 变分法也可以把猜想圈逐渐修正成为系统真实的周期轨道. 通过观察计算出短周期轨道的拓扑结构, 可以建立一维符号动力学. 图 2 (b) 展示了图 2 (a) 的轨道在二维平面的投影. 我们把在不动点 S_- 附近旋转的轨道片段记为符号 0, 把在不动点 S_+ 附近旋转的轨道片段记为符号 1. 因此, 标记图 2 (b) 所示的轨道为 01 轨道, 其拓扑长度为 2, 有最短的周期 $T = 10.769012$, 分别绕着两边的不动点旋转了一周, 计算该轨道时取 100 个点. 这两条轨道片段能够被用作计算其他复杂轨道的组成单元. 应用变分法计算绕着两个不动点旋转多圈的复杂周期轨道时, 需要更精确的初始猜想, 否则很可能寻找失败. 通过对计算出的短周期轨道进行剪切以及黏贴来作为长轨道的猜想圈, 对于非扩散洛伦兹系统, 这种方法为长轨道的初始圈猜想提供一种系统化的方式. 即使手动连接轨道片段使之闭合, 变分法也通常会收敛.

表 1　非扩散洛伦兹系统拓扑长度 5 以内的所有周期轨道

Table 1. Cycles up to topological length of 5 for diffusionless Lorenz system.

拓扑长度	符号序列	轨道周期	x	y	z
1	0	—	—	—	—
	1	—	—	—	—
2	01	10.769012	−1.108113	1.846311	0.946758
3	001	18.962868	−0.352028	0.849944	0.115389
	011	18.962868	0.352028	−0.849944	0.115389
4	0001	24.359449	0.939601	−0.884792	−0.923804
	0011	21.496764	1.000276	0.528713	−1.469846
	0111	24.359449	−0.939601	0.884792	−0.923804
5	00001	28.093996	−0.958485	0.908303	−0.007892
	00011	29.057461	0.366385	−0.878968	0.069750
	00101	29.381527	1.197553	0.066259	−1.492245
	00111	29.057461	−0.366385	0.878968	0.069750
	01011	29.381527	−1.197553	−0.066259	−1.492245
	01111	28.093996	0.958485	−0.908303	−0.007892

通过这种方式, 可以借助于一维符号动力学的符号序列对更长的周期轨道进行初始化. 图3(a)展示了拓扑长度为3的011轨道, 它由3个基本的轨道片段构成, 即两条1轨道片段以及一条0轨道片段. 图3(b)展示了一条拓扑长度为4的0001轨道, 它绕着左边的不动点旋转了三次, 而绕着右边的不动点旋转了一周. 图3(c)和图3(d)展示了拓扑长度为5的两条周期轨道. 在一维符号动力学的帮助下, 能够系统地找到一定拓扑长度以内的所有周期轨道: 首先基于符号动力学构建初始猜想圈, 利用变分法使之朝着真实的周期轨道演化, 以此来验证该符号序列的周期轨道是否存在.

总共找到了12条拓扑长度5以内的周期轨道, 表1列出了这些周期轨道的相关信息, 即轨道的拓扑长度、符号序列、周期以及周期轨道上一点的坐标x, y, z, 不存在的周期轨道用符号“—”表示. 利用变分法计算拓扑长度为3和4的周期轨道时我们取了150个点, 而计算拓扑长度为5的周期轨道时使用了200个点. 计算发现0轨道和1轨道并不存在. 从表1可以看到, 轨道001和011是互相对称的, 它们有着相同的周期, 轨道00011和00111是互相对称的, 而轨道0011则是同自身共轭. 上述规律是由系统的z轴对称性所决定的.

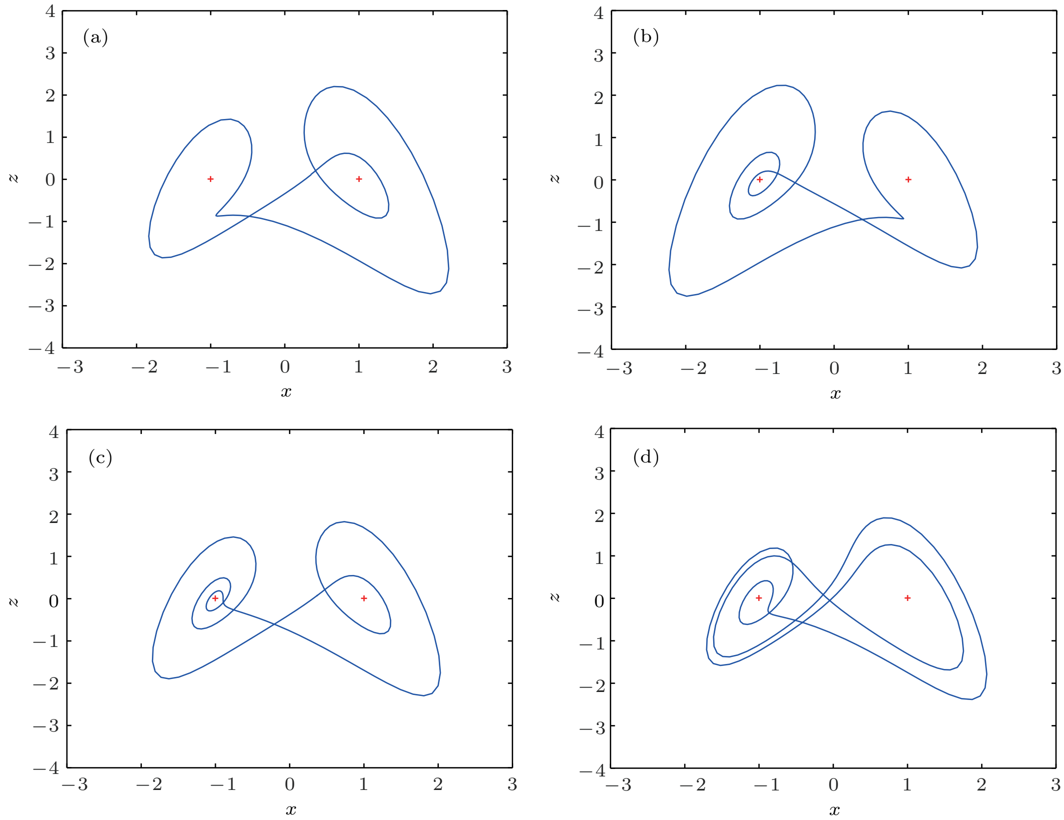

图3 非扩散洛伦兹系统的四条周期轨道 ($R = 1$, “+” 表示两个不动点 S_- 和 S_+ 的位置) (a) 011 轨道; (b) 0001 轨道; (c) 00011 轨道; (d) 00101 轨道

Fig. 3. Four periodic orbits of diffusionless Lorenz system for $R = 1$ (two fixed points S_- and S_+ are marked with “+”): (a) 011 orbit; (b) 0001 orbit; (c) 00011 orbit; (d) 00101 orbit.

4.3 参数变化时周期轨道的演化情况

利用已知轨道的同伦演化也可以方便地进行初始化. 如果动力系统和参数值相关, 当参数值有小的改变时大多数短的不稳定周期轨道变化很小, 所以在某一参数下存在的一个周期轨道, 可以被选作附近的新参数值的初始猜想圈. 实际应用变分法时, 通常只需要少量的迭代计算就可以找到新的周期轨道.

现在研究改变参数R时, 周期轨道的演化情况. 以01轨道为例, 通过不断增大R值获取形变后的新轨道. 在计算时, 前一个R值的周期轨道被用作下一个R值周期轨道的猜想圈, 这样就能够连续形变01轨道. 图4展示了4个不同R值对应的01轨道及轨道周期的演化情况, 可见01轨道的周期随着R值的增大逐渐减小. 从图4可以看到,

R值越小, 01轨道越接近于两边的两个不动点S_-和S_+. 当参数R取很小的值时, 轨道不再绕着两个不动点旋转, 因此01轨道将不再存在. 我们也利用变分法进行了计算, 发现当$R < 0.5$时, 01轨道不再收敛.

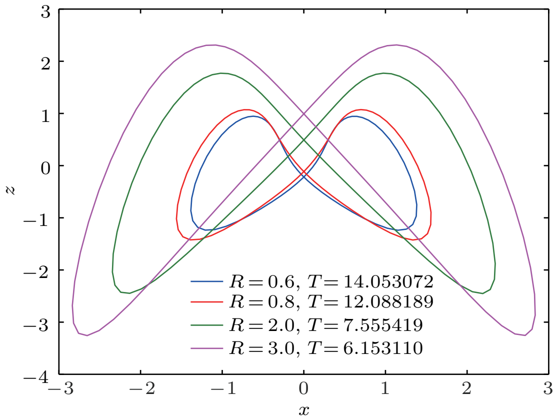

图4 01轨道4个不同R值情况下的形变

Fig. 4. Deformation of cycle 01 with four different R values.

5 结 论

本文利用变分法提出了一种新方式来系统地计算非扩散洛伦兹系统的周期轨道. 基于相空间轨道的拓扑结构, 两条基本的轨道能够被用作初始化圈猜想的组成单元, 我们成功地建立了一维符号动力学实现了对所有短周期轨道的分类; 并研究了当参数值发生变化时, 01轨道的形变情况, 获取了轨道周期随着参数变化的演化规律. 对于非扩散洛伦兹系统, 计算得到的这些周期轨道能够通过周期轨道理论被用来估算动力学量的平均值, 对于更长的周期轨道来讲, 它们仅会对结果起到小的修正. 本文为系统地研究洛伦兹混沌族等低维耗散系统的周期轨道提供了一种普适的方法. 仍然需要对一些问题进行进一步的研究, 例如, 为了有效地获取动力学性质, 应该分析系统的连接轨道等其他的不变集合. 拓扑的分析方法或许可以为我们系统地分类连接轨道以及分析它们彼此间的关联提供一种新途径. 另外, 系统随着参数变化时的各种分岔行为也值得将来做进一步的研究.

参考文献

[1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
[2] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics of Lorenz System Family: Analysis, Control and Synchronization* (Beijing: Science Press) p185 (in Chinese) [陈关荣, 吕金虎 2003 洛伦兹系统族的动力学分析、控制与同步 (北京: 科学出版社) 第185页]
[3] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
[4] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元, 王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
[5] Zhou X C, Lin W T, Lin Y H, Yao J S, Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110207 (in Chinese) [周先春, 林万涛, 林一骅, 姚静荪, 莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 110207]
[6] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation Chaos* **9** 1465
[7] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 1789
[8] Liao X X 2017 *New Research On Some Mathematical Problems of Lorenz Chaotic Family* (Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press) p103 (in Chinese) [廖晓昕 2017 洛伦兹混沌族中若干数学问题新研究 (武汉: 华中科技大学出版社) 第103页]
[9] Schrier G V D, Maas L R M 2000 *Physica D* **141** 19
[10] Song J, Lu D C 2007 *College Mathematics* **23** 54 (in Chinese) [宋娟, 卢殿臣 2007 大学数学 **23** 54]
[11] Dwivedi A, Mittal A K, Dwivedi S 2012 *Iet Commun.* **6** 2016
[12] Pehlivan I, Uyaro Y 2007 *Iet Commun.* **1** 1015
[13] Xu Y, Gu R, Zhang H, Li D 2012 *Int. J. Bifurcation Chaos* **22** 1250088
[14] He S, Sun K, Banerjee S 2016 *Eur. Phys. J. Plus* **131** 254
[15] Huang D 2003 *Phys. Lett. A* **309** 248
[16] Wei Z, Yang Q 2009 *Comput. Math. Appl.* **58** 1979
[17] Wang Z, Li Y X, Xi X J, Wang X F 2014 *Adv. Mater. Res.* **905** 651
[18] Strogatz S H 2000 *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (New York: Perseus Books Publishing) p301
[19] Artuso R, Aurell E, Cvitanović P 1990 *Nonlinearity* **3** 325
[20] Artuso R, Aurell E, Cvitanović P 1990 *Nonlinearity* **3** 361
[21] Cvitanovi P, Artuso R, Mainieri R, Tanner G, Vattay G, Whelan N, Wirzba A 2012 *Chaos: Classical and Quantum* (Copenhagen: Niels Bohr Institute) p395
[22] Hao B L, Zheng W M 1998 *Applied Symbolic Dynamics and Chaos* (Singapore: World Scientific) p13
[23] Lan Y, Cvitanović P 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016217
[24] Press W H, Teukolsky S A, Veterling W T, Flannery B P 1992 *Numerical Recipes in Fortran 77 The Art of Scientific Computing* (New York: Cambridge) p34
[25] Dong C, Lan Y 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** 2140
[26] Dong C W, Li J Z, Chen Y C 2017 *Sci. Tech. Engrg.* **17** 7 (in Chinese) [董成伟, 李金哲, 陈奕辰 2017 科学技术与工程 **17** 7]
[27] Dong C 2018 *Mod. Phys. Lett. B* **32** 1850155
[28] Dong C 2018 *Int. J. Mod. Phys. B* **32** 1850227
[29] Dong C 2018 *Chin. Phys. B* **27** 080501
[30] Dong C 2018 *Europhys. Lett.* **123** 20005
[31] Dong C, Wang P, Du M, Uzer T, Lan Y 2016 *Mod. Phys. Lett. B* **30** 1650183

Periodic orbits of diffusionless Lorenz system*

Dong Cheng-Wei†

(*Department of Physics, School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China*)

(Received 23 August 2018; revised manuscript received 22 October 2018)

Abstract

The strange attractor of a chaotic system is composed of numerous periodic orbits densely covered. The periodic orbit is the simplest invariant set except for the fixed point in the nonlinear dynamic system, it not only reflects all the characteristics of the chaotic motion, but also is closely related to the amplitude generation and change of chaotic system. Therefore, it is of great significance to obtain the periodic orbits in order to analyze the dynamical behaviors of the complex system. In this paper, we study the periodic orbits of the diffusionless Lorenz equations which are derived in the limit of high Rayleigh and Prandtl numbers. A new approach to establishing one-dimensional symbolic dynamics is proposed, and the periodic orbits based on a topological structure are systematically calculated. We use the variational method to locate the cycles, which is proposed to explore the periodic orbits in high-dimensional chaotic systems. The method not only preserves the robustness characteristics of most of other methods, such as the Newton descent method and multipoint shooting method, but it also has the characteristics of fast convergence when the search process is close to the real cycle in practice. In order to apply the method, a rough loop guess must be made first based on the entire topology for the cycle to be searched, and then the variational algorithm will bring the initial loop guess to evolving toward the real periodic orbit in the system. In the calculations, the Newton descent method is used to achieve stability. Two cycles can be used as basic building blocks for initialization, searching for more complex cycles with multiple circuits around the two fixed points requires more delicate initial conditions; otherwise, it will probably lead to nonconvergence. We can initialize the loop guess for longer cycles constructed by cutting and gluing the short, known cycles. For this system, such a method yields quite a good systematic initial guess for longer cycles. Even if we deform the orbit manually into a closed loop, the variational method still shows its powerfulness for good convergence. The topological classification based on the entire orbital structure is shown to be effective. Furthermore, the deformation of periodic orbits with the change of parameters is discussed, which provides a route to the periods of cycles. The present research may provide a method of performing systematic calculation and classification of periodic orbits in other similar chaotic systems.

Keywords: diffusionless Lorenz system, periodic orbit, variational method, symbolic dynamics

PACS: 05.45.–a, 05.45.Ac, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.67.20181581

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11647085, 11647086, 11747106), the Applied Basic Research Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 201701D121011), and the Natural Science Research Fund of North University of China (Grant No. XJJ2016036).

† Corresponding author. E-mail: dongchengwei@tsinghua.org.cn