

贝叶斯频率估计中频率的先验分布对有色噪声作用的影响

杨隼 王元美 李军刚

Influence of parameter prior information on effect of colored noise in Bayesian frequency estimation

Yang Di Wang Yuan-Mei Li Jun-Gang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 67, 060301 (2018) DOI: 10.7498/aps.67.20171911

在线阅读 View online: <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171911>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn/CN/Y2018/V67/I6>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[频差偏差对全视场外差测量精度的影响](#)

Effect of frequency difference deviation on full-field heterodyne measurement accuracy

物理学报.2018, 67(2): 020601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.67.20171837>

[利用金刚石氮-空位色心精确测量弱磁场的探索](#)

Measurement of weak static magnetic field with nitrogen-vacancy color center

物理学报.2017, 66(23): 230601 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.66.230601>

[群速度色散对于纠缠光场二阶关联函数影响的研究](#)

Research of the impact of group velocity dispersion on the second-order correlation of entangled light field

物理学报.2015, 64(7): 070301 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.64.070301>

[混沌微扰导致的量子退相干](#)

Decoherence by a classically small influence

物理学报.2012, 61(24): 240302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.240302>

[厄米多项式算符的新恒等式及其在量子压缩中的应用](#)

New Hermite-polynomial-operator identities and their application in quantum squeezing

物理学报.2012, 61(11): 110302 <http://dx.doi.org/10.7498/aps.61.110302>

# 贝叶斯频率估计中频率的先验分布 对有色噪声作用的影响\*

杨棣 王元美 李军刚†

(北京理工大学物理学院, 北京 100081)

(2017年8月28日收到; 2017年12月28日收到修改稿)

在贝叶斯参数估计理论框架下, 研究了被测参数的先验分布对有色噪声的抑制作用. 选择一个受  $1/f^\alpha$  型谱密度有色噪声影响的自旋  $1/2$  量子比特作为量子探测系统来估计一个磁场强度的大小, 利用贝叶斯代价函数的动力学演化来评判估计的精度, 重点研究先验概率分布对噪声非高斯性的限制作用. 研究发现: 当先验概率的不确定度比较大时, 有色噪声的非高斯性对频率估计精度的影响比较小; 当先验概率的不确定度比较小时, 有色噪声的非高斯性对频率估计精度的影响比较大.

**关键词:** 贝叶斯参数估计, 先验概率, 非高斯噪声

**PACS:** 03.65.Ta, 06.20.-f, 06.20.Dk

**DOI:** 10.7498/aps.67.20171911

## 1 引言

量子参数估计作为量子度量学中的重要内容之一, 在量子基础物理学和量子信息学中有着重重要的研究意义<sup>[1-7]</sup>. 近些年来, 在不同的物理系统和不同的外部环境下进行参数估计的研究工作已经取得了重大的进展<sup>[8-12]</sup>. 量子参数估计过程大致可以分为如下三部分: 首先制备合适的最优量子探测系统, 然后通过探测系统与待测系统的相互作用把待测参数加载到探测系统上, 最后对探测系统的末态进行测量并从测量结果中估计出待测参数的值. 在量子参数估计的过程中, 最重要的就是要尽可能准确地估计待测参数<sup>[13]</sup>. 在量子参数估计理论中, 存在两种不同的方法来研究参数估计过程<sup>[14,15]</sup>. 一种是基于量子费舍尔信息的 Cramér-Rao bound (CRB) 方案<sup>[3,4,16-20]</sup>, 量子费舍尔信息作为参数估计中一个非常重要的概念, 其在理论上给出了一般参数估计实验所能达到的最大估计精度极限<sup>[21,22]</sup>, CRB 方法在量子参数估计

理论研究中有着特殊的地位并已得到了广泛的研究<sup>[23-25]</sup>. 第二种是贝叶斯估计方案<sup>[3]</sup>. 贝叶斯参数估计作为一个很重要的参数估计方案, 在实验设计和数据处理中发挥着重要的作用, 因而被广泛应用到各个研究领域. 在贝叶斯参数估计方案中利用贝叶斯代价函数来评判估计的精度, 可以通过研究贝叶斯代价函数随时间变化的动力学行为从而找到优化方案的方法. 以上两种方法主要的区别在于对被估参数的先验信息的要求不同: 在 CRB 方法中, 几乎要确切知道被测参数的值才能给出最优的测量基, 进而得到最优的估计精度, 因此 CRB 方法在实际实验操作中很难实现. 相反地贝叶斯方案只需要知道被测参数的部分信息, 就可以给出合适的测量基进而得到最优的估计精度, 因此更有利于实验上实现.

严格而言, 自然界中不存在任何孤立的量子系统<sup>[26]</sup>. 例如: 在固态探测系统的实现方面, 特定材料的涨落通常会导导致固有噪声的产生. 多年的实验和理论研究都证实了谱密度为  $1/f^\alpha$  型量子噪声的存在<sup>[27,28]</sup>. 许多情况下导致系统噪声的环境可以

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11775019) 和北京理工大学基础研究基金资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jungl@bit.edu.cn

看作是由涨落子构成的, 它们会引起量子比特系统的相位相干性的衰减. 在很多重要的物理系统中, 由涨落子所产生的噪声被认为是非高斯的<sup>[29]</sup>. 在实际的量子参数估计过程中, 尤其是利用固体探测系统来做参数估计的过程中, 我们不可避免地要考虑到这种非高斯有色噪声的影响.

文献[23]基于CRB方法研究了在有色噪声作用下频率估计的精度问题, 研究发现, 强耦合和弱耦合的条件下都会使参数估计的精度增加. 前面提到, CRB方法对被估计参数的先验概率需求比较大, 当对被估计参数的信息了解不足时, 文献[23]中的结论是否成立还不是很清楚, 因此利用贝叶斯方法来研究有色噪声作用下的频率估计问题非常必要.

本文考虑一个处于谱密度为 $1/f^\alpha$ 型的有色噪声下的自旋为 $1/2$ 的量子比特系统来估计一个未知强度的磁场, 重点研究在广义的先验概率分布下的贝叶斯频率估计问题. 通过研究贝叶斯代价函数随时间的变化规律来分析频率的先验分布对贝叶斯估计过程中非高斯性的抑制行为; 讨论在先验概率的不确定度不同的情况下, 非高斯性对频率估计精度的影响; 进而找到如何合理地利用先验概率的分布情况来提高频率估计的精度方法.

## 2 模型

本文主要研究量子比特系统在有色噪声下的频率估计问题. 在固态量子器件中, 谱密度为 $1/f^\alpha$ 型的有色噪声是引起退相干的主要原因, 其中参数 $\alpha$ 的取值范围从1到2. 有色噪声的“色”可以按照 $\alpha$ 的取值不同来分类. 例如,  $\alpha = 1$ 对应粉色 $1/f$ 噪声; 当 $\alpha = 2$ 时, 谱密度为 $1/f^2$ 的噪声与布朗运动相联系, 所以也被一语双关地称为棕色噪声. 有色噪声的作用可以看成是量子比特系统与大量双态涨落子耦合的综合效果, 其中每个涨落子与系统的耦合作用可以用随机电报噪声模型来描述, 或者可以用翻转率随机变化的单个随机电报噪声模型来描述. 所以有色噪声可以用许多不同翻转率的随机电报噪声的线性叠加来表示. 对于每个翻转率为 $\zeta$ 的涨落子的概率分布可以表示如下<sup>[30]</sup>:

$$\rho_\alpha(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta \ln(\zeta_2/\zeta_1)} & (\alpha = 1), \\ \frac{\alpha - 1}{\zeta^\alpha} \left[ \frac{(\zeta_1 \zeta_2)^\alpha - 1}{\zeta_2^{\alpha-1} - \zeta_1^{\alpha-1}} \right] & (\alpha \neq 1). \end{cases} \quad (1)$$

为了给出有色噪声作用下量子比特系统的密度矩阵, 首先给出单个翻转率为 $\zeta$ 的涨落子影响下量子比特系统的动力学特性. 此时待测系统的哈密顿量可以表示为

$$\mathbf{H}(t) = \frac{1}{2} \mu \omega \boldsymbol{\sigma}_z + \frac{1}{2} \nu c(t) \boldsymbol{\sigma}_z, \quad (2)$$

其中,  $\boldsymbol{\sigma}_z$ 是与量子比特系统相对应的泡利算符;  $\omega$ 代表待测参数, 这里是待估计的磁场的大小;  $\mu$ 和 $\nu$ 分别是量子比特系统和磁场以及环境之间的相互作用强度;  $c(t)$ 代表由于涨落子的影响而引入的随机过程. 注意到(2)式给出的哈密顿量表示了一个纯相位耗散过程, 这也是开放系统中一个经典的模型.

通过对 $c(t)$ 求平均, 可以得到量子比特系统的密度矩阵为

$$\hat{\rho}_\omega(t) = \langle \hat{\rho}^{\text{st}}(t) \rangle, \quad (3)$$

其中,  $\langle \cdot \rangle$ 代表对所有的数求平均值, 随机密度矩阵定义为

$$\hat{\rho}^{\text{st}}(t) = \mathbf{U}(t) \hat{\rho}_0 \mathbf{U}^\dagger(t), \quad (4)$$

这里 $\hat{\rho}_0$ 代表系统的初态. 而么正算符 $\mathbf{U}(t)$ 为

$$\mathbf{U}(t) = \exp \left[ -i \int dt' \mathbf{H}(t') \right]. \quad (5)$$

本文选用随机电报噪声模型来表示涨落子对系统的影响. 经过计算并对其中出现的参数重新标度, 即令 $\gamma = \zeta/\mu$ ,  $\eta = \nu/\mu$ 且 $\tau = \mu t$ , 得到单个涨落子作用下的量子比特系统的约化密度矩阵<sup>[31]</sup>:

$$\hat{\rho}_\omega(\gamma, \tau) = \begin{pmatrix} \rho_0^{00} & \rho_0^{01} e^{-i\omega\tau} G_{\text{RTN}}(\tau) \\ \rho_0^{10} e^{i\omega\tau} G_{\text{RTN}}(\tau) & \rho_0^{11} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

这里

$$G_{\text{RTN}}(\tau) = e^{-\gamma\tau} \left( \cosh \Theta\tau + \frac{\gamma}{\Theta} \sinh \Theta\tau \right), \quad (7)$$

其中,  $\Theta = \sqrt{\gamma^2 - \eta^2}$ . 注意到随机电报噪声是非高斯的, 因此为了得到(6)式, 应该考虑更高阶的关联函数和谱密度. 当 $\gamma < \eta$ 时, 高阶函数则发挥着重要的作用, 因此待测系统的动力学特性表现出振荡的行为, 这种行为与高斯噪声下表现出的行为不同. 然而当 $\gamma \geq \eta$ 时, 高阶统计量非常小以至于可以忽略, 因此非高斯性下的特性表现得很微弱, 这种动力学行为与高斯噪声下的动力学行为是相似的<sup>[23]</sup>.

当考虑大量的涨落子集体作用时, 可以通过对涨落子概率分布的统计平均而得到有色噪

声作用下量子比特系统的密度矩阵, 即  $\hat{\rho}_\omega(\tau) = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \hat{\rho}_\omega(\gamma, \tau) \wp_\alpha(\gamma) d\gamma$ , 这里的  $\wp_\alpha(\gamma)$  是重新标度之后的概率分布. 最后得到

$$\hat{\rho}_\omega(\tau) = \begin{pmatrix} \rho_0^{00} & \rho_0^{01} e^{-i\omega\tau} G(\tau) \\ \rho_0^{10} e^{i\omega\tau} G(\tau) & \rho_0^{11} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

这里  $G(\tau)$  为有色噪声的噪声项, 可以表示为

$$G(\tau) = \left[ \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} G_{\text{RTN}}(\tau) \wp_\alpha(\gamma) d\gamma \right]^{N_f}, \quad (9)$$

其中,  $N_f$  指的是涨落子的数目, 本文中取  $N_f = 5$ ,  $\gamma_1 = 0.01$  且  $\gamma_2 = 100$ . 值得注意的是  $G(\tau)$  随时间的变化特点由  $\alpha$  的大小来决定. 从 (1) 式可以看出, 当  $\alpha$  的值很大时, 翻转率较小的涨落子占的比例较大, 此时噪声的非高斯性就表现得比较明显, 而系统与涨落子之间的有效耦合强度较大而当  $\alpha$  的值很小时, 翻转率大的涨落子占的比例大, 此时环境的非高斯性变弱, 而系统与涨落子之间的有效耦合强度变弱. 下面先简单介绍贝叶斯代价函数的普适定义, 然后给出量子比特系统下的贝叶斯代价函数的通用表达式.

### 3 贝叶斯代价函数

首先介绍贝叶斯代价函数的普适定义. 假设  $\hat{\rho}_\omega$  是描述作为探测系统的量子比特状态的密度矩阵算符, 并已经加载了待测参数  $\omega$ .  $p_\omega$  代表先验概率分布, 并满足均值  $\int d\omega p_\omega \omega = 0$ . 我们用正定算符  $\{\hat{\Pi}_\chi\}$  来表示测量, 正定算符满足  $\{\hat{\Pi}_\chi\} > 0$  和  $\int d\chi \hat{\Pi}_\chi = 1$  条件, 测量结果用  $\chi$  表示, 得到结果后从中推断待测参数  $\omega$ , 这里我们假设  $\chi$  同时也表示参数的估计值. 定义了以上物理量, 便可以表示出条件概率

$$P(\chi|\omega) = \text{Tr}[\hat{\rho}_\omega \hat{\Pi}_\chi], \quad (10)$$

其中,  $\text{Tr}$  代表求迹符号. 贝叶斯代价函数定义为

$$\begin{aligned} C(\hat{\rho}_0, \hat{\Pi}_\chi, t) &= \int_{\Omega} d\omega p_\omega \int_{\Omega} d\chi P(\chi|\omega) C_{\chi, \omega} \\ &= \int_{\Omega} d\chi \text{Tr}[\hat{R}(\chi) \hat{\Pi}_\chi], \end{aligned} \quad (11)$$

这里  $\Omega$  代表参数  $\omega$  和  $\chi$  所有的取值区间. 厄米算符  $\hat{R}(\chi)$  定义为

$$\hat{R}(\chi) = \int_{\Omega} d\omega p_\omega C_{\chi, \omega} \hat{\rho}_\omega, \quad (12)$$

这里  $C_{\chi, \omega}$  表示参数的估计值和真实值差值的平方,

$$C_{\chi, \omega} = (\chi - \omega)^2. \quad (13)$$

把 (13) 式代入 (12) 式, 可以得到

$$\hat{R}(\chi) = \chi^2 \hat{R}_0 - 2\chi \hat{R}_1 + \hat{R}_2, \quad (14)$$

这里

$$\hat{R}_k = \int_{\Omega} d\omega \omega^k p_\omega \hat{\rho}_\omega. \quad (15)$$

值得注意的是,  $C(\hat{\rho}_0, \hat{\Pi}_\chi, t)$  受 3 个量的影响, 分别是正定测量算符  $\hat{\Pi}_\chi$ 、系统的初始状态  $\hat{\rho}_0$  和测量时刻  $t$ . 为了得到最优的估计精度, 需对这三个量进行优化. 首先来优化测量算符. 为了使贝叶斯代价函数尽可能地小, 首先  $\hat{\Pi}_\chi$  需要满足下列约束条件<sup>[3]</sup>:

$$[\hat{R}(\chi) - \hat{I}] \hat{\Pi}_\chi = 0, \hat{R}(\chi) - \hat{I} \geq 0, \quad (16)$$

其中, 拉格朗日算子  $\hat{I}$  为

$$\hat{I} = \int_{\Omega} d\chi \hat{R}(\chi) \hat{\Pi}_\chi = \int_{\Omega} d\chi \hat{\Pi}_\chi \hat{R}(\chi), \quad (17)$$

这里  $\hat{I}$  应该是厄米的. 如果满足上述条件, 那么贝叶斯代价函数可以表示为

$$C(\hat{\rho}_0, t) = \text{Tr}[\hat{R}_2 - \hat{I} \hat{R}_0 \hat{I}]. \quad (18)$$

其中厄米算符  $\hat{I}$  可以通过下式得到

$$\hat{I} \hat{R}_0 + \hat{R}_0 \hat{I} = 2\hat{R}_1. \quad (19)$$

如果 (19) 式成立, 我们可以通过一组正交矢量  $\hat{L}$  给出最佳的正定测量

$$\hat{\Pi}_{\text{opt}} = |\phi\rangle\langle\phi|, \quad (20)$$

其中  $\hat{L}|\phi\rangle = |\phi\rangle\langle\phi|$ . 注意到虽然 (19) 式在一般情况下很难求解, 但是当我们把系统选定为量子比特系统时, 理论上可以得到解析的结果. 下面给出在有噪声模型下贝叶斯代价函数的解析结果.

本文考虑单个量子比特系统, 因此可以用布洛赫矢量来表示相关的物理量<sup>[1]</sup>. 假定待测系统的初态为  $\hat{\rho}_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$ , 其中  $|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle$ . 然后利用布洛赫矢量和密度矩阵的关系式  $\hat{\rho}_\omega(\tau) = [1 + \hat{a}_\omega(\tau)\hat{\sigma}]/2$ , 可以得到

$$a_\omega^x(\tau) = \cos(\omega\tau)G(\tau) \sin\theta, \quad (21)$$

$$a_\omega^y(\tau) = \sin(\omega\tau)G(\tau) \sin\theta, \quad (22)$$

$$a_\omega^z(\tau) = \cos\theta. \quad (23)$$

利用布洛赫矢量可以把 (15) 式中的  $\hat{R}_k$  和厄米算符  $\hat{I}$  写成下列形式:

$$\hat{R}_k = r_0(k) + \hat{r}(k)\hat{\sigma}, \quad (24)$$

$$\hat{I} = l_0 + \hat{l}\hat{\sigma}, \quad (25)$$

其中,  $l_0$  是一个实数,  $\hat{l} = (l_x, l_y, l_z)$  是一个实向量, 而且

$$r_0(k) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\omega \omega^k p_{\omega}, \quad (26)$$

$$\hat{r}(k) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d\omega \omega^k p_{\omega} \hat{a}_{\omega}(\tau). \quad (27)$$

将(25)式代入(19)式, 可以得到  $l_0$  的值和  $\hat{l}$  的表达式.

最后, 利用(26)和(27)式计算出相应的物理量, 然后代入文献[32]的(24)式便得到一个量子比特系统下的贝叶斯代价函数为[32]

$$C(\hat{\rho}_0, \tau) = V_{p_{\omega}} - [A(\tau)]^2 |G(\tau)|^2 \sin^2 \theta, \quad (28)$$

这里  $V_{p_{\omega}}$  是先验概率的方差, 其中,

$$A(\tau) = \int_{\Omega} d\omega \omega p_{\omega} \sin(\omega\tau).$$

通过分析(28)式可以发现,  $\theta = \pi/2$  对应的态是系统的最优初态. 因此我们得到最优初态和最优测量下的贝叶斯代价函数

$$C(\tau) = V_{p_{\omega}} - [A(\tau)]^2 |G(\tau)|^2. \quad (29)$$

在(29)式中,  $|G(\tau)|^2$  表示噪声项, 噪声特性对贝叶斯代价函数的影响主要是通过它来体现的. 可以看到, 噪声项的前面还有一个系数  $[A(\tau)]^2$ , 当该系数的值比较大时, 噪声的影响效果比较大; 当该系数比较小时, 将会导致噪声的影响效果不明显, 而它的大小与先验概率的分布有关, 因此我们可以说先验概率会影响噪声对估计精度的影响. 注意到上面我们利用布洛赫矢量方法得到了与文献[33]中(23)式相似的结果, 这说明本文所得结果是有效的. 下面利用(29)式来具体讨论贝叶斯代价函数在有色噪声的影响下随时间变化的动力学行为.

#### 4 先验概率的影响

在这一部分, 我们将研究在有色噪声的作用下如何利用贝叶斯参数估计方法来估计频率  $\omega$  的大小, 并通过研究贝叶斯代价函数随时间变化的动力学行为来考察参数的先验概率对估计过程的影响. 首先假设待估计频率满足广义的先验概率分布[15]

$$p_{\omega}^{\text{Ge}} = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\omega) e^{-n^2\beta} \right]. \quad (30)$$

其中,  $p_{\omega}^{\text{Ge}}$  的方差可以表示为

$$V_{p_{\omega}^{\text{Ge}}}(\beta) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cos(n\pi) e^{-n^2\beta}}{n^2}. \quad (31)$$

从(31)式不难看出,  $p_{\omega}^{\text{Ge}}$  的方差是  $\beta$  的函数. 如果  $\beta$  趋近于 0, 那么方差也趋近于 0,  $p_{\omega}^{\text{Ge}}$  也就趋近于  $\delta(0)$ . 然而如果  $\beta$  趋于  $\infty$ , 待估频率  $\omega$  则在区间  $(-\pi, \pi)$  内是均匀分布的. 通过相关的计算, 可以得到贝叶斯代价函数的表达式为

$$C(\tau) = V_{p_{\omega}^{\text{Ge}}}(\beta) - [A(\tau, \beta)]^2 |G(\tau)|^2, \quad (32)$$

其中,

$$A(\tau, \beta) = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\tau^2} [\sin(\pi\tau) - \pi\tau \cos(\pi\tau)] + \sum_{n=1}^{\infty} [B(n, \tau) e^{-n^2\beta} \cos(\pi\tau)] \right\}, \quad (33)$$

$$B(n, \tau) = \frac{\pi\tau \cos(\pi\tau)}{n^2 - \tau^2} + \frac{(n^2 + \tau^2) \sin(\pi\tau)}{(n^2 - \tau^2)^2}. \quad (34)$$

文献[23]基于CRB方法研究了有色噪声作用下频率估计的精度问题, 发现强耦合和弱耦合的条件下都会使参数估计的精度增加. 而我们对参数的先验信息了解不是很全面时, 有色噪声对参数估计的影响情况还不是很清楚. 为了讨论当先验信息不足时以上结论是否成立, 图1给出了贝叶斯代价函数最小值随  $\alpha$  以及贝叶斯代价函数随时间  $\tau$  的变化特性.

图1(a)给出了当  $\beta = 0.1$  时, 贝叶斯代价函数最小值  $C_{\min}$  随着  $\alpha$  变化的曲线. 从图1(a)可以看到, 贝叶斯代价函数最小值  $C_{\min}$  开始随着  $\alpha$  的增大而增大, 当达到最大值后, 又随着  $\alpha$  的增大而减小. 这个变化趋势与文献[23]的结果一致, 变化的趋势可以通过贝叶斯代价函数的动力学特性来解释. 图1(b)给出了当  $\beta = 0.1$  时, 贝叶斯代价函数  $C(\tau)$  随时间  $\tau$  的动态演化过程. 从图1(b)可以看到, 当  $\alpha$  比较小时 (如  $\alpha = 1.0$  时),  $C(\tau)$  一开始随着  $\tau$  的增大而减小, 当达到最小值后,  $C(\tau)$  又随着  $\tau$  的增大而增大, 之后趋于一个有限值. 这个变化特性可以这样来理解: 在贝叶斯参数估计中考虑了先验概率对估计精度的影响, 因此在贝叶斯代价函数中出现了先验概率的方差  $V_{p_{\omega}}$ , 见(32)式; 又由于(32)式右边第二项小于或等于零, 所以贝叶斯代价函数的值被限制在  $V_{p_{\omega}}$  以内; 在未进行测量时, 可以从参数的先验分布来估计参数的值, 相应的估计精度正好是先验概率的方差, 因此图1(b)中贝叶斯代价函数值在  $\tau = 0$  时等于先验概率的方差值; 随着时间的增加, 测量所获得的信息也逐渐增加, 因此贝叶斯代价函数会随着时间的增加而减小, 然而由于外部噪声的影响也同时随着时间的增加而

增加, 因此当时间进一步增大时, 噪声的影响效应占了主导地位, 贝叶斯代价函数则会在达到极小值后随时间的增大而增大, 进而趋向一个稳定的有限值. 从图 1 (b) 以及进一步的数值计算结果还可以发现, 当  $\alpha$  从 1 开始增加时,  $C(\tau)$  的最小值也随之增加. 这是因为当  $\alpha$  的取值比较小时, 翻转率大的涨落子出现的概率比较大, 而系统与涨落子之间的相对耦合强度较弱, 环境对估计精度的影响小, 从而  $C(\tau)$  的最小值也就比较小. 这正是图 1 (a) 左端  $C_{\min}$  随着  $\alpha$  的增大而增大的原因.

图 1 (b) 中还有一个有趣之处是, 随着  $\alpha$  增大,  $C(\tau)$  随时间的演化过程中出现了第二个波谷, 并且  $\alpha$  的取值越大, 这个波谷变得越明显. 不难发现,

当取较大的值  $\alpha = 2$  时, 振荡非常明显以至于贝叶斯代价函数在第二个波谷处达到最小值, 并且其最小值比  $\alpha = 1.0$  和  $\alpha = 1.5$  时的最小值都小. 我们可以这样解释: 当  $\alpha$  的取值比较大时, 翻转率小的涨落子出现的概率增大, 此时噪声的非高斯性显现出来从 (32) 式可以看出, 贝叶斯代价函数的值与  $[A(\tau, \beta)]^2 |G(\tau)|^2$  有关, 当选取的  $\beta$  值比较小时, 先验概率的不确定度比较小, 使得  $[A(\tau, \beta)]^2$  在  $|G(\tau)|^2$  出现振荡时取得较大的值, 此时环境的非高斯性表现得非常明显, 进而有效地提高了参数估计的精度, 这正是图 1 (a) 右端  $C_{\min}$  随  $\alpha$  的增大而减小的原因.

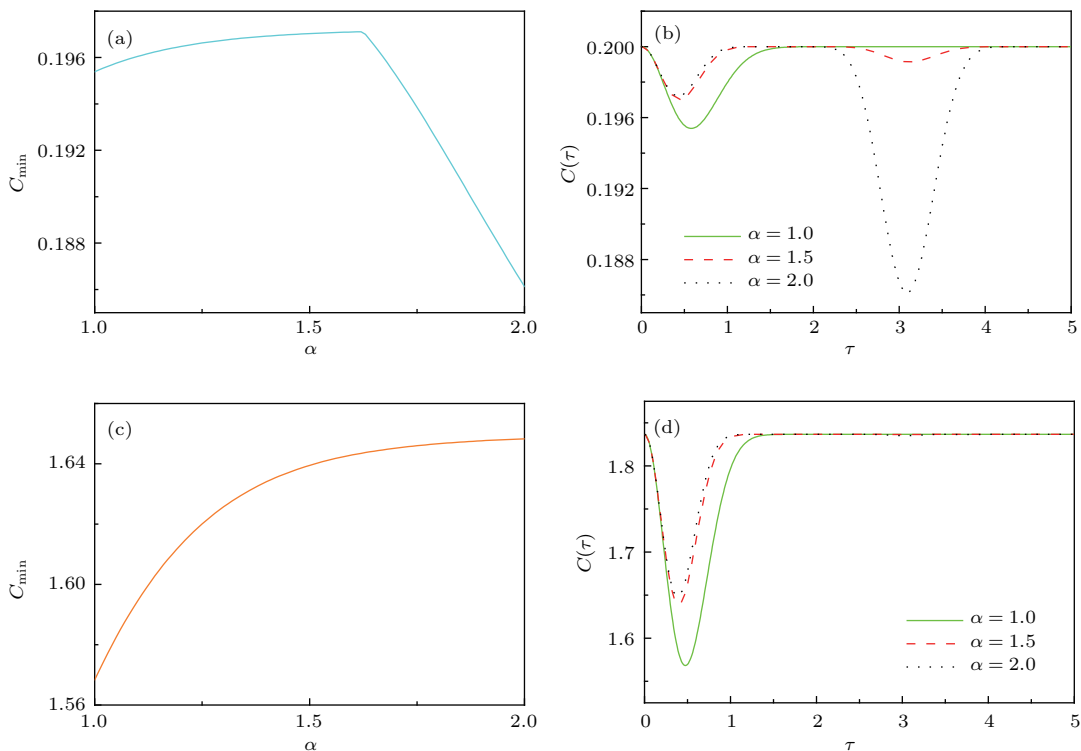


图 1 贝叶斯代价函数最小值随  $\alpha$  以及贝叶斯代价函数随时间  $\tau$  的变化特性 (a)  $\beta = 0.1$ ; (b)  $\beta = 0.1$ ,  $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0$ ; (c)  $\beta = 1.0$ ; (d)  $\beta = 1.0$ ,  $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0$   
 Fig. 1. The behaviors of the minimal value of Bayes cost as a function of  $\alpha$  and Bayes cost as a function of  $\tau$ : (a)  $\beta = 0.1$ ; (b)  $\beta = 0.1$  and  $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0$ ; (c)  $\beta = 1.0$ ; (d)  $\beta = 1.0$  and  $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0$ .

以上结论是否对所有情况都成立呢? 进一步的数值计算之后我们发现, 情况并非如此. 上面的结论只适用于先验概率的不确定度比较小时 (例如  $\beta = 0.1$  的情况), 而当先验概率的不确定度比较大时, 贝叶斯代价函数的动力学行为却有着很大的差别.

图 1 (c) 给出了当  $\beta = 1.0$  时贝叶斯代价函数最小值  $C_{\min}$  随  $\alpha$  的变化曲线. 从图 1 (c) 可以看出, 当

$\alpha$  比较小时,  $C_{\min}$  的变化规律与  $\beta = 0.1$  时的情况一致, 随着  $\alpha$  的增大而增大. 不同的是, 当  $\alpha$  比较大时,  $C_{\min}$  仍然随着  $\alpha$  的增大而增大, 没有减小的趋势. 这仍可从贝叶斯代价函数的动力学特性来解释. 图 1 (d) 给出了当  $\beta = 1.0$  且  $\alpha = 1.0, 1.5, 2.0$  时, 贝叶斯代价函数随  $\tau$  的变化曲线. 比较图 1 (d) 中三条曲线的最小值可以发现, 随着  $\alpha$  的增大, 贝叶斯代价函数的最小值也随之增大. 这是由于随着

$\alpha$  的增大, 系统与涨落子之间的相对耦合强度增大, 量子比特系统受环境的影响变大, 相应的估计精度变得越来越大, 即贝叶斯代价函数所能达到的最小值也随之增大. 然而当  $\alpha$  进一步增大时, 并没有显著地出现第二个波谷, 贝叶斯代价函数仍然在第一个波谷处取得最小值. 这是由于当  $\beta = 1.0$  时, 先验概率的不确定度比较大, 使得  $|G(\tau)|^2$  出现振荡时对应的  $[A(\tau, \beta)]^2$  比较小, 因此环境的非高斯性被压制, 对提高参数估计的精度没有太大的帮助.

比较图 1(a) 和图 1(c) 可以得到以下结论: 掌握的先验信息越多, 有色噪声的非高斯性就越显著, 进而可以提高频率的估计的精度; 相反, 当掌握的先验信息非常少时, 有色噪声的非高斯性被压制, 使得频率估计的精度下降.

我们还研究了在有色噪声的作用下, 贝叶斯代价函数在高斯先验概率和均匀先验概率下随时间变化的动力学行为, 发现贝叶斯代价函数在这两种先验概率下随时间变化的动力学行为与在广义的先验概率下随时间变化的动力学行为是相似的. 总而言之, 当先验概率的不确定度比较小时, 利用有色噪声的非高斯性, 可以使频率估计更加准确. 而当先验概率的不确定度比较大时, 则会降低频率估计的精确度.

## 5 结 论

本文利用贝叶斯估计方法研究了  $1/f^\alpha$  型谱密度的有色噪声对频率估计精度的影响, 重点讨论了广义先验概率的不确定度对有色噪声作用的影响. 研究发现, 先验概率的不确定度对贝叶斯代价函数有着很大的影响. 对于先验概率的不确定度比较小的情况, 如果  $\alpha$  的取值非常小以至于系统与涨落子之间的相对耦合强度较弱, 环境对估计精度的影响小, 这时频率测量就会更加准确; 当  $\alpha$  的取值非常大时, 噪声的非高斯性显现出来, 这时频率估计也会更加准确. 然而对于先验概率的不确定度比较大的情况, 噪声的非高斯性被抑制, 不能再为频率的估计精度的提高起到促进作用. 如果在实验中已知先验概率的分布情况, 利用有色噪声的非高斯性, 可以提高测量的精度.

近年来机器学习技术正在被应用到各个领域, 比如文献 [34, 35] 利用机器学习技术来推断量子系统的哈密顿量, 文献 [36] 则把机器学习用在了量子

系统的消相干刻画方面. 把本文的结果与机器学习方法结合起来, 将是一个很有意义的研究方向.

## 参考文献

- [1] Wiseman H M, Milburn G J 2009 *Quantum Measurement and Control* (England: Cambridge University Press) pp51, 52
- [2] Paris M G A, Řeháček J 2010 *Quantum Estimation Theory* (Berlin: Springer-Verlag) pp1, 2
- [3] Helstrom C W 1976 *Quantum Detection and Estimation Theory* (New York: Academic Press) pp231, 252
- [4] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (Amsterdam: North-Holland) p64
- [5] Dowling J P 2008 *Contemp. Phys.* **49** 125
- [6] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [7] Pairs M G A 2009 *Int. J. Quantum Inform.* **7** 125
- [8] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photon.* **5** 222
- [9] Demkowicz-Dobrzański R, Kołodyński J, Guţă M 2012 *Nat. Commun.* **3** 1063
- [10] Escher B M, de Matos Filho R L, Davidovich L 2011 *Nat. Phys.* **7** 406
- [11] Liu Y C, Xu Z F, Jin G R 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 013601
- [12] Liu G Q, Zhang Y R, Chang Y C, Yue J D, Fan H, Pan X Y 2015 *Nat. Commun.* **6** 6726
- [13] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [14] Jarzyna M, Demkowicz-Dobrzański R 2015 *New J. Phys.* **17** 013010
- [15] Demkowicz-Dobrzański R 2011 *Phys. Rev. A* **83** 061802R
- [16] Cramér H 1946 *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton, NJ: Princeton University Press) pp498–500
- [17] Lu X M, Sun Z, Wang X G, Luo S L, Oh C H 2013 *Phys. Rev. A* **87** 050302
- [18] Li N, Luo S L 2013 *Phys. Rev. A* **88** 014301
- [19] Lu X M, Wang X G, Sun C P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042103
- [20] Zhang Y M, Li X W, Yang W, Jin G R 2013 *Phys. Rev. A* **88** 043832
- [21] Chin A W, Huegla S F, Plenio M B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 233601
- [22] Monras A, Paris M G A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 160401
- [23] Li X L, Li J G, Wang Y M 2017 *Phys. Lett. A* **381** 216
- [24] Ma J, Huang Y X, Wang X G, Sun C P 2011 *Phys. Rev. A* **84** 022302
- [25] Zhong W, Sun Z, Ma J, Wang X G, Nori F 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022337
- [26] Weiss U 1993 *Quantum Dissipative System* (Singapore: World Scientific) p5
- [27] Yoshihara F, Harrabi K, Niskanen A O, Nakamura A, Tsai J S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 167001
- [28] Kakuyanagi K, Meno T, Saito S, Nakano H, Semba K, Takayanagi H, Deppe F, Shnirman A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 047004

- [29] Bergli J, Galperin Y M, Altshuler B L 2009 *New J. Phys.* **11** 025002
- [30] Benedetti C, Buscemi F, Bordone P 2013 *Phys. Rev. A* **87** 052328
- [31] Benedetti C, Paris M G A, Maniscalco S 2014 *Phys. Rev. A* **89** 012114
- [32] Ban M 2016 *Quantum Inf. Process.* **15** 2213
- [33] Li J G, Wang Y M, Yang D, Zou J 2017 *Phys. Rev. A* **96** 052130
- [34] Wiebe N, Granade C E, Ferrie C, Cory D G 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 190501
- [35] Wang J W, Paesani S, Santagati R, Knauer S, Gentile A A, Wiebe N, Petruzzella M, O'Brien J L, Rarity J G, Laing A, Thompson M G 2017 *Nat. Phys.* **13** 551
- [36] Stenberg M P V, Köhn O, Wilhelm F K 2016 *Phys. Rev. A* **93** 012122

## Influence of parameter prior information on effect of colored noise in Bayesian frequency estimation\*

Yang Di Wang Yuan-Mei Li Jun-Gang<sup>†</sup>

(School of Physics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

( Received 28 August 2017; revised manuscript received 28 December 2017 )

### Abstract

Parameter estimation, which undertakes one of the vital missions in quantum metrology, has attracted a lot of attention in recent years. A large number of investigations on the frequency estimation have been carried out. Most of them are based on Cramér-Rao bound estimation approach in which almost perfect knowledge of the parameter to be estimated is given. In reality, however, one has inadequate prior knowledge about the parameter to be estimated. Then the Bayesian estimation approach in which we can perform the estimation even if we only have partial prior information about the parameter would be an ideal choice. Prior information about the parameter can play a significant role in Bayesian statistical inference. So it is interesting to know how the prior knowledge affects the estimation accuracy in the estimation process. In the solid-state realization of probe system, material-specific fluctuations typically lead to the major contribution to the intrinsic noise. Then it is interesting to study the effects of colored noise on the quantum parameter estimation. In this work, we study the inhibitory effects of prior probability distribution of the parameter to be estimated on the effects of colored noise under the framework of Bayesian parameter estimation theory. In particular, we estimate the intensity of a magnetic field by adopting a spin-1/2 system which is influenced by the colored noise with  $1/f^\alpha$  spectrum. To evaluate the accuracy of estimation, we obtain the Bayes cost analytically which can be applied to the noisy channels. We mainly focus on the inhibitory effect of prior probability distribution of measured parameter on the non-Gaussianity of noise. We find that for the case of broad prior frequency distribution, the influence of non-Gaussianity on the estimation is very weak. While for the case of narrow prior frequency distribution, the influence of non-Gaussianity on the estimation is strong. That means that in the Bayesian approach, when we have enough prior information about the frequency, the non-Gaussianity can conduce to the improvement of the accuracy of the estimation of the frequency. When we lose the prior information, we also lose the improvement of the accuracy from the non-Gaussianity. The uncertainty of the prior information tends to eliminate the effects of the non-Gaussianity of the noise.

**Keywords:** Bayesian parameter estimation, prior probability, non-Gaussian noise

**PACS:** 03.65.Ta, 06.20.-f, 06.20.Dk

**DOI:** 10.7498/aps.67.20171911

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11775019) and the Fundamental Research Fund of Beijing Institute of Technology, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: jungl@bit.edu.cn