

超强磁场下中子星壳层的电导率和磁星环向磁场欧姆衰变

陈建玲 王辉 贾焕玉 马紫薇 李永宏 谭俊

Conductivity of neutron star crust under superhigh magnetic fields and Ohmic decay of toroidal magnetic field of magnetar

Chen Jian-Ling Wang Hui Jia Huan-Yu Ma Zi-Wei Li Yong-Hong Tan Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 180401 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190760

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190760>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

超强磁场下电子朗道能级稳定性及对电子费米能的影响

Landau-level stability of electrons in superstrong magnetic fields and its influences on electron Fermi energy

物理学报. 2016, 65(2): 027102 <https://doi.org/10.7498/aps.65.027102>

稳态强磁场的细胞生物学效应

Biological effects on cells in strong static magnetic field

物理学报. 2018, 67(14): 148701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180378>

强磁场下Sm-Fe薄膜不同晶态组织演化及磁性能调控

Evolutions of different crystalline textures in Sm-Fe film fabricated under high magnetic field and subsequent tuning magnetic properties

物理学报. 2018, 67(9): 097501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180212>

匀强磁场对水中气泡运动的影响

Effect of magnetic field on single-bubble in water

物理学报. 2015, 64(12): 124301 <https://doi.org/10.7498/aps.64.124301>

强磁场作用下Cu熔体中富Fe颗粒的迁移与排列

Migration and alignment of Fe-rich particles in Cu melt under high magnetic field

物理学报. 2016, 65(13): 137401 <https://doi.org/10.7498/aps.65.137401>

强激光产生的强磁场及其对弓激波的影响

Strong magnetic fields generated with a metal wire irradiated by high power laser pulses and its effect on bow shock

物理学报. 2017, 66(9): 095202 <https://doi.org/10.7498/aps.66.095202>

超强磁场下中子星壳层的电导率 和磁星环向磁场欧姆衰变*

陈建玲^{1)†} 王辉²⁾ 贾焕玉²⁾ 马紫微¹⁾ 李永宏¹⁾ 谭俊³⁾

1) (运城学院物理与电子工程系, 运城 044000)

2) (西南交通大学物理科学与技术学院, 成都 610031)

3) (运城学院数学与信息技术学院, 运城 044000)

(2019年5月19日收到; 2019年7月12日收到修改稿)

磁星是指主要由磁场提供辐射能量的一类脉冲星. 部分宁静状态下的磁星 X 射线有热起源, 对应的温度 kT 为 0.2—0.6 keV ($1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$), 这比转动供能的脉冲星的典型温度值高很多, 并且可以用黑体谱来拟合. 对磁星的观测和理论研究是当前脉冲星领域一个重要的热点. 结合物态方程, 本文首先计算了在超强磁场下壳层的电导率; 从统计上研究了由于环向磁场衰变, 磁场能释放率与磁星软 X 射线光度之间的关系. 通过分类和数值拟合, 所得到的新的拟合公式能较好地反映磁星软 X 射线光度和旋转能损率之间的关系. 研究发现, 对于绝大多数高 X 射线光度的磁星, 环向磁场欧姆衰变能够提供其观测的软 X 射线辐射; 对于低 X 射线光度的暂变磁星, 其软 X 射线辐射可能来源于旋转能损率、磁层流或粒子星风. 随着对磁星理论和观测研究的深入, 本文模型也会得到进一步的改进, 理论结果将更好地符合磁星的软 X 射线观测.

关键词: 超强磁场, 磁星, 欧姆衰变, 光度

PACS: 05.70.Ce, 13.40.Hq, 72.15.-v, 97.60.Jd

DOI: 10.7498/aps.68.20190760

1 引言

中子星是研究致密天体物理的最佳实验室, 它们有很强的磁场. 已知的中子星磁场或者是相对稳定的、或者随时间缓慢地变化^[1,2]. 磁场在中子星自旋减慢演化及磁层活动中发挥重要作用, 因此得到了广泛的研究^[3-7].

磁星是指主要由磁场提供辐射能量的一类脉冲星. 对磁星的观测和理论研究是当前脉冲星领域一个重要的热点^[2,3]. 磁星大致分为软伽玛射线重复暴 (soft Gamma-ray repeaters, SGRs) 和反常 X 射线脉冲星 (anomalous X-ray pulsars, AXPs),

被发现的磁星及其候选体数量已经增长到约 29 个. 磁星表面偶极磁场可以由转动周期和一阶周期导数来估计, 其量级约为 10^{14} — 10^{15} G ($1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$)^[3-7]. 磁星表现出一系列广泛的 X 射线活动性, 包括短暴、长暴、耀斑和准周期振荡, 通常伴随着一系列有趣的到达时间行为, 如增大的自转减慢、周期跃变和反周期跃变^[8-13]. 这些行为一般被解释为超强磁场的衰变, 或者是由于表面磁张压增加导致磁星壳层破裂, 这会加剧磁层的扭曲^[14]. 近年来, 国内不少专家对中子星 (包括磁星) 的磁场演化、冷却及辐射机制做了大量的、深入的研究^[15], 取得了丰富的成果, 但是涉及到磁星的环向磁场衰变和表面热辐射方面的研究很少.

* 国家自然科学基金 (批准号: U1631106, U1431125, 11573059, 11847307, U1831102)、山西省高等学校科技创新项目 (批准号: 2019L0863) 和运城学院博士启动基金 (批准号: YQ-2014013) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chenjianling62@163.com

我们知道, 具有纯粹的极向磁场构型的中子星是极其不稳定的, 同样地, 由于泰勒不稳定性^[16], 具有纯粹的环向磁场构型的中子星也是不稳定的. 而一个稳定的中子星磁场结构要求在中子星内部具有极向磁场和环向磁场组成的混合磁场, 并且壳层磁场表现为偶极磁场 (占主导) 和高阶多极磁场 (对壳层磁场贡献较小)^[17]. 在霍尔漂移 (Hall drift) 的作用下, 一个纯粹的极向磁场首先会在星体内部产生一个环向磁场, 然后与环向磁场紧密相关的极向电流将极向磁场推压到磁极冠区, 从而增大磁偶极矩^[18,19]. 一个新诞生的中子星 (原中子星) 在壳层形成之前由于对流形成包含多级成分的极向磁场^[20]. 在核塌缩后, 由于较差自转极向磁场不断地被扭曲, 因此, 中子星磁场可能存在一个很强的环向成分, 极向磁偶极矩在径向较差自转的作用下会产生环向的磁四极场^[21].

以往关于中子星磁场的欧姆衰变 (又称欧姆耗散) 的研究主要集中于对普通中子星壳层磁场衰变的研究, 这包括了对壳层磁场欧姆衰变本征模的计算^[22]、星体表面磁场欧姆衰变的自相似解^[23]、欧姆耗散方程^[24,25] 以及由于多极磁场的欧姆衰变导致的磁能湮灭率^[26]. 1994年 Geppert 和 Urpin^[27] 首次研究了在吸积中子星中也会由于欧姆衰变导致磁场演化. 有两个因素可以减缓磁场的衰减: 引力红移效应以及空间内禀的弯曲几何^[28]. 由于广义相对论效应, 磁场衰变时标会增加, 但将与平直时空中磁场衰变时标保持相同的量级^[29–32]. 最近, 王辉、高志福、王娜等^[33] (以下称 WGW19) 在广义相对论框架下推导出普通中子星磁场欧姆衰变的本征值方程. 他们发现: 靠旋转供能的脉冲星 PSR J1640-4631 内部可能发生环向磁场的欧姆衰变, 但是释放的磁场能不足以提供持续的软 X 射线光度, 并且讨论了该源可能的、各向异性的软 X 射线辐射机制.

WGW19 虽然推导出在广义相对论框架下旋转供能脉冲星的偶极环向磁场欧姆衰变本征方程, 但是磁场通过欧姆衰变再以焦耳热的方式释放热能这一现象普遍地存在于包括磁星在内的年轻的中子星内部, WGW19 推导出的方程可能同样地适用于磁星模型, 主要的原因分析如下. 1) 对于包括磁星在内的强磁化的中子星, 磁场能以欧姆耗散焦耳加热在其演化的早期非常重要, WGW19 推导出的偶极环向磁场欧姆衰变本征方程是基于极向磁

场强度不低于约 10^{13} G、温度不高于约 10^8 K 的中子星的模型, 该模型同样地适用于磁星. 2) 相比于依靠旋转供能的脉冲星 (简称普通中子星), 磁星理论上可能具更高的内部多极磁场、扭曲的磁层和几种不同的磁场起源机制^[20], 但是观测上没有证明磁星的磁场结构位型、演化方式与中子星之间存在本质上的差别, 即磁星和普通中子星应当同样地具有极向磁场和环向磁场分量、同样地拥有类似的边值条件. 3) 由于较高的磁能密度贡献, 磁星的物态方程可能比普通中子星的稍硬、质量稍大. 这个物态方程上的理论假设并没有得到观测上的支持. 在描述磁星星体结构时, 通常认为: 磁星和普通中子星一样具有等离子体的磁层、固态的壳层和流体的核, 核内具有核子超流与质子超导. 在壳层中, 电阻率 (电导率) 主要是由于电子-声子和电子-杂质散射过程^[23–27], 导致比在流体内部更有效的欧姆耗散. 4) 按照电动力学, 中子星内部可能存在的径向超导电流能产生环向磁场, 由于核内超导与外部的真空, 磁场能的湮灭最为有效方式是: 在具有电阻的中子星的壳层以欧姆耗散的方式产生焦耳热, 欧姆耗散率由组成物质的有限电导率决定^[33]. 磁场能以欧姆耗散的方式产生焦耳热的情况只会发生在具有电阻的壳层. 5) WGW19 以广义的麦克斯韦方程组为出发点, 采用一个球对称的中子星模型和时空几何, 并假定一个无力场 (force-free) 磁场位型, 在该模型下磁场被限制在壳层, 即核内由于超流排斥作用而不存在磁场. 本文假定磁星具有无力场磁场位型, 并采用球对称的中子星模型和时空几何. 我们有理由相信, WGW19 在广义相对论下推导出的偶极环向磁场欧姆衰变本征方程也同样地用于计算磁星的欧姆衰变率、磁场能释放率以及软 X 射线光度.

观测表明: 部分宁静状态下的磁星存在持续的软 X 射线辐射, 其光度的典型值 L_X 为 10^{34} — 10^{36} erg/s ($1 \text{ erg/s} = 10^{-7} \text{ J/s}$). 磁星在爆发过程中^[34], 软 X 射线光度急剧增加, 可达 10^{38} erg/s 或更高; 在外爆衰退期, 磁星会出现热斑缩小、射电辐射、X 射线谱变软及脉冲轮廓变得简单, 这些与磁星磁层扭曲程度和磁层电流发生变化有关. 软 X 射线光子可能存在热起源, 可以用黑体谱 (幂律+黑体 或者双黑体谱) 来拟合, 对应的温度约为 2×10^6 — 6×10^6 K, 这比依靠转动动能提供能量的脉冲星的典型温度值高很多, 这可能是由于磁场

衰变提供额外的加热^[30]. Kaspi 和 Beloborodov^[9] 讨论了磁星的磁场欧姆衰变和软 X 射线光度之间的关系, 他们认为: 欧姆衰变可以提供磁星软 X 射线辐射所需要的热能, 首先, 相比于磁星的年龄, 磁场的欧姆衰变时标相当的短, 这就要求磁场在一个小尺度范围内发生变化; 其次, 磁场变化幅度 $\delta B \approx 10^{16}$ G. Beloborodov 和 Li^[31] 也认为磁星软 X 射线光度可能与磁场的欧姆衰变有关, 但他们没有在超强磁场中进行电导率的计算, 也没有考虑广义相对论效应对环形磁场的欧姆衰变的影响.

本文将在第 2 节给出广义相对论下霍尔感应方程和核物质状态方程; 第 3 节计算在超强磁场下壳层的电导率、环向磁场衰变率及磁能衰变率; 第 4 节讨论磁星的旋转能损率 L_{rot} 、环向磁场衰变磁能释放率 L_B 及软 X 射线光度 L_X 之间的关系以及软 X-射线可能的各向异性的起源, 第 5 节进行总结与讨论.

2 广义相对论下的霍尔感应方程和核物质状态方程

2.1 霍尔感应方程

为方便起见, 我们假设一个球对称的中子星模型和时空几何, 考虑到广义相对论效应, 中子星的时空几何形状可以由下式描述

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} h_1^2 (dx^0)^2 + V_{ij} dx^i dx^j, \quad (1)$$

其中 $x^0 = ct$, V_{ij} 是空间坐标 x^i 的函数, $\Phi(r)$ 是引力势^[32]. 结合磁流体动力学平衡与欧姆定律, 我们得到广义相对论下中子星磁场霍尔感应方程

$$\frac{\partial B^i}{\partial x^0} + e^{ijk} D_j \left[\frac{c}{4\pi\sigma} e_k^{lm} D_l (e^\Phi B_m) \right] = 0, \quad (2)$$

其中 σ 代表导电率, e^{ijk} 代表完全反对称的 Levi-Civata 张量的分量, D 表示变量微分算子. 在非奇异的、静态的、球对称几何背景下, (1) 式中的空间部分的坐标可以用下式表示:

$$ds^2(3) = h_1^2 (dx^1)^2 + h_2^2 (dx^2)^2 + h_3^2 (dx^3)^2, \quad (3)$$

其中 $h_i = h_i(x^1, x^2, x^3)$ 是标度因子, 它们分别为

$$h_1 = h_r = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1/2},$$

$$h_2 = h_\theta = r, h_3 = h_\phi = \sin\theta, \quad (4)$$

其中 $m(r) = GM(r)/c^2$, $M(r)$ 是半径为 r 的球体内部物质总质量. 消除 (2) 式中磁场的坐标分量,

得到更为简化的感应方程

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \left[\frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times (Z\mathbf{B}) \right] = 0, \quad (5)$$

其中 $Z = e^\Phi \equiv (1 - 2M(R)/R)^{1/2}$ 是红移因子^[29,33].

2.2 磁场的三分量

轴对称条件下, 中子星的磁场 \mathbf{B} 可以分解成极向磁场分量 $\mathbf{B}_p = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta$ 与环形磁场分量 $\mathbf{B}_l = B_\phi \mathbf{e}_\phi$ 两个部分, 其中 \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ 和 \mathbf{e}_ϕ 分别代表 r 方向、 θ 方向和 ϕ 方向的单位矢量. 在广义相对论下磁场三分量由下式给出:

$$B_r = -B \cdot \sum_{lm} F_l(t, r) Y_{lm}, B_\theta = B \cdot \sum_{lm} T_l(t, r) \frac{dY_{lm}}{d\theta},$$

$$B_\phi = -B \cdot \sum_{lm} \frac{r}{2} H_l(t, r) \frac{dY_{lm}}{d\theta}, \quad (6)$$

这里 B 是中子星磁极冠区表面处偶极极向磁场 (与 $l = 1, m = 0$ 相对应); F_l, T_l 和 H_l 是待定函数, Y_{lm} 是 l 阶勒让德多项式. 为了简易起见, 我们仅考虑极向磁场的偶极分量, 即 $l = 1, m = 0$, 于是得到 $dY_{lm}/d\theta = -\sin\theta$ 与 $Y_m = \cos\theta$, 再利用分离分量法^[29], 很容易得到

$$T_1(t, r) = \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial(r^2 F_1(r, t))}{\partial r}. \quad (7)$$

以下为了方便表达, 我们一律省去了脚标 1, 于是 (6) 式简化为

$$B_r = -B \cdot F(r, t) \cos\theta, \quad (8a)$$

$$B_\theta = -B \cdot \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial(r^2 F(r, t))}{\partial r} \sin\theta, \quad (8b)$$

$$B_\phi = B \cdot \frac{r}{2} H(t, r) \sin\theta, \quad (8c)$$

这里 r 为无量纲的距离. 以下星体半径表示为 $R_{\text{NS}} \rightarrow R$. 为了求解 $F(r, t)$ 需要两个边界条件: 磁场局限于从壳层表面到壳核边界处, 或是局限于从核半径 R_{core} 到星体半径 R 处. 磁场的内部边界条件: 当 $r \rightarrow R_{\text{core}}$ 时, $F(r, t) \rightarrow 0$. 其次, 在中子星表面处, 壳层与真空中磁场是连续的, 得到磁场的内部边界条件

$$R \frac{\partial(r^2 F(t, r))}{\partial r} = G(y) r^2 F(t, R),$$

$$G(y) = y \frac{2y \ln(1 - y^{-1}) + \frac{2y - 1}{y - 1}}{y^2 \ln(1 - y^{-1}) + y + \frac{1}{2}}, \quad (9)$$

其中 $y = R/R_S$, $R_S \equiv 2GM/c^2$ 是史瓦西半径. 首先, 由于中子星的核可能具有超导特性, 核内磁场存在的可能性非常小, 在无力场磁场位型下磁场满足

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}, \mathbf{B} \cdot \nabla \mu = 0, \quad (10)$$

其中 μ 是与磁场曲率有关的一个参数, 被解释为斯托克斯函数 $F(r, t)$ 的波数, μ 的值取决于中子星的核物质物态方程. 为了简单起见, 对于 (10) 式中第一个等式, 我们仅考虑 μ 为常数的解, 这样第二个等式就会自动地满足. 为了得到 (10) 式第一等式中内部磁场的一个通解, 我们选择限制条件:

$$H(r, t) = \mu \cdot F(r, t), \quad (11)$$

保证这个解能满足 \mathbf{B} 在 r 和 θ 方向的两个分量之间平衡. 当 \mathbf{B} 被限制在壳层中调整 μ 使 r 分量在壳-核边界处消失, 得到

$$\tan[\mu(R_{\text{core}} - R)] = \mu R_{\text{core}}, \quad (12)$$

其中 R_{core} 表示壳-核边界处到球心距离. 另外还有在两种中子星磁场位型: TC1 与 TC2^[28], 在这两种磁场结构位型中, 环形磁场都仅仅被限制在中子星壳层内部, 而在无力场磁场位型下, 环形磁场可以穿越壳层渗透到星体外部. 利用勒让德函数及球形贝塞尔函数, 可以求解在无力场磁场位型下的高阶环形磁场的欧姆衰变本征方程.

2.3 中子星核物质状态方程

为了得到参数 μ 的值, 需要采用较为实际的中子星结构参量, 即采用较为实际的核物质状态方程. 预计的中子星最大质量是依赖于不同模型下的核物质状态方程^[34,35]. 中子星的最大质量与最小质量的数值都具有争议性. 观测的中子星质量约在 $(1-2)M_\odot$ 的范围内 (<http://www.stellarcollapse.org/>). 尽管从状态方程的角度来看, 中子星的质量可以小于一倍 M_\odot , 但很难从超新星爆发的机理来解释其成因. 在外壳层区域, 我们采用 Baym-Pethick-Sutherland 物态方程^[36]; 在内壳层区域,

我们采用可压缩的液滴模型, 即 Baym-Bethe-Pethick 物态方程 (BBP 模型)^[37]; 在中子星的核内, 我们采用相对论平均场 (relative mean-field, RMF) 理论模型, RMF 是在具有修正效应的有效耦合常数的基础上建立起来的, 是研究有限核的一个标准方法. 作为对比, 我们选用三个具有代表性的 RMF 模型——NL3^[38], GM1^[39] 和 TMA^[40,41].

表 1 中 ρ_0 表示饱和核密度; E_0 , K_0 , m^* , K' , J , L_0 , K_{sym}^0 , Q_{sym}^0 和 $K_{\tau,V}^0$ 分别表示对称核物质饱和密度下的结合能、不可压缩系数、无量纲的有效核子质量、偏斜系数、对称能、对称能的坡度、对称能曲率、对称能偏斜系数和与体积相关的同位旋不可压缩系数. TMA 模型在高密度下的物态方程与 Dirac-Brueckner-Hartree-Fock 理论所预测的行为一致, 因此 TMA 是当前最为成功的 RMF 参数组之一. 从表 1 可以看出, 相比于 GM1 和 NL3 模型, TMA 模型具有较软的对称能, 因此给定中子星最大质量值也较小. 图 1 所示为在 NL3, GM1 和 TMA 模型中中子星的质量和半径的关系. NL3 模型给出中子星最大质量 $M_{\text{max}} = 2.78M_\odot$, GM1 模型给出中子星最大质量 $M_{\text{max}} = 2.45M_\odot$, 而 TMA 模型给出最大质量 $M_{\text{max}} = 2.032M_\odot$, 这个值非常接近目前观测到的中子星的最大质量^[42], 因此, TMA 模型较为实际和可靠. 在以下计算中, 我们将一律采用 TMA 模型的物态方程. 采用由文献 [7] 中更为恰当的 M - R - I 关系近似表达式,

$$\frac{I}{MR^2} = 0.01 + (1.200^{+0.006}_{-0.006})\beta^{1/2} - 0.1839\beta - (3.735^{+0.975}_{-0.975})\beta^{3/2} + 5.278\beta^2, \quad (13)$$

其中 $\beta = \left(\frac{M}{R} \frac{\text{km}}{M_\odot}\right)$, I 为星体转动惯量, 并运用到磁星的核物质物态方程中. (13) 式展示了计算 I 的更小的不确定性. 结合 (13) 式与 TMA 模型的参数组, 得到磁星 I 随 M 和 R 的变化关系, 如图 2 所示. 当中子星的质量由 $1.0M_\odot$ 增加到 $2.0M_\odot$ 的过程中, 星体半径先增加后减小, 但是转动惯量不

表 1 在 NL3, GM1 和 TMA 模型下饱和核物质特性.

Table 1. Saturation properties of nuclear matter in the parameterizations for NL3, GM1 and TMA models.

RMF模型	ρ_0/fm^{-3}	E_0/MeV	K_0/MeV	m^*	K'/MeV	J/MeV	L_0/MeV	$K_{\text{sym}}^0/\text{MeV}$	$Q_{\text{sym}}^0/\text{MeV}$	$K_{\tau,V}^0/\text{MeV}$
NL3	0.148	-16.24	271.53	0.60	-202.91	37.40	118.53	100.88	181.31	-698.85
TMA	0.147	-16.33	318.15	0.635	572.12	30.66	90.14	10.75	-108.74	-367.99
GM1	0.153	-16.02	300.50	0.70	215.66	32.52	94.02	17.98	25.01	-478.64

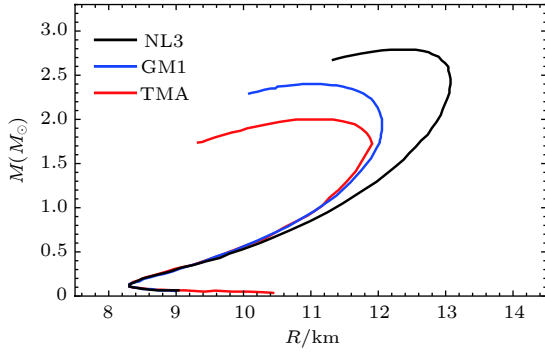


图 1 在 NL3, GM1 和 TMA 模型下中子星的质量和半径的关系

Fig. 1. Relationships between mass and radius of neutron stars in NL3, GM1 and TMA model.

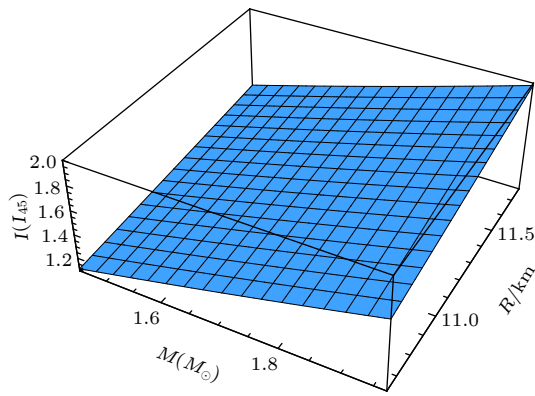


图 2 在 TMA 模型中磁星的转动惯量 I 随质量 m 和半径 R 的关系

Fig. 2. Relationship of moment of inertia I to mass M and radius R for magnetars in TMA models.

断增加, 由 $I = 0.78(1) \times 10^{45} \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ 增加到 $I = 2.05(1) \times 10^{45} \text{ g}\cdot\text{cm}^2$.

将内壳层的厚度近似地看成为中子星总的壳层厚度 $R_c = 0.97 \text{ km}$ (BBP 模型), 结合 TMA 模型和 (9), (10) 式, 可以计算在 TMA 模型中对应任意最大质量的磁星的 μ 和 I 的值, 并将计算结果列于表 2. 尽管磁星的 I 随质量的增加而增大, 但是 μ 的值比较稳定 ($\mu = 1.67\text{--}1.68$). 为了比较在无力磁场结构位型下弯曲时空中磁场三分量之间的关系, 我们选择一个典型质量 $M = 1.45M_\odot$ 的磁星, TMA 模型中, 对应 $\mu = 1.676$ 及 $x = r/R = 0.917\text{--}1.0$. 利用 (8)–(13) 式, 得到归一化的磁场三分量: $B_r/(B \cos \theta)$, $B_\theta/(B \sin \theta)$ 及 $B_\phi/(B \sin \phi)$ 随 x 的变化, 其中 B 为在中子星磁极表面处 ($x = 1$) 极向偶极磁场. 如图 3 所示, B_r 与 B_ϕ 都随 x 的增加而增大, 但是后者增加比前者快得多; 在星体表面处, $B_\phi/(B \sin \phi)$ 达到极大值, 这时 B_ϕ 的强度

表 2 在 TMA 模型中磁星的 m , R , R_{core}/R , μ 和 I 的部分值

Table 2. Partial values of m , R , R_{core}/R , μ and I for magnetars in TMA model.

m/M_\odot	R/km	R_{core}/R	μ	$I/\text{g}\cdot\text{cm}^2$
1.20	11.42	0.915	1.678	$1.03(1) \times 10^{45}$
1.45	11.77	0.917	1.676	$1.47(2) \times 10^{45}$
1.72	12.05	0.919	1.675	$1.87(2) \times 10^{45}$
2.03*	11.25	0.914	1.679	$2.09(2) \times 10^{45}$

注: *在 TMA 模型下由物态方程给出的最大中子星质量.

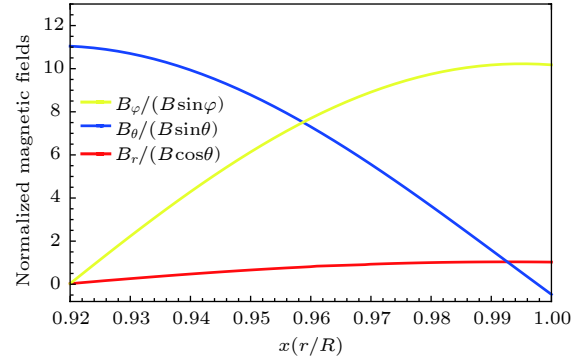


图 3 在无力磁场结构位型下壳层归一化磁场分量 $B_r/(B \cos \theta)$ (红线), $B_\theta/(B \sin \theta)$ (蓝线), 及 $B_\phi/(B \sin \phi)$ (黄线) 与归一化径向坐标 x 的关系 (选取 $\mu = 1.676$, 对应 TMA 模型下的 $M = 1.45M_\odot$, $R = 11.77 \text{ km}$ 及 $I = 1.45 \times 10^{45} \text{ g}\cdot\text{cm}^2$)

Fig. 3. Normalized magnetic field components of the crustal confined for the force-free field: $B_r/(B \cos \theta)$ (red line), $B_\theta/(B \sin \theta)$ (blue line), and $B_\phi/(B \sin \phi)$ (yellow line) vs. normalized radial coordinate x . Here we assume the parameter $\mu = 1.676$, corresponding to $M = 1.45M_\odot$, $R = 11.77 \text{ km}$ and $I = 1.45 \times 10^{45} \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ in the TMA model.

高于 B_r 约一个量级.

3 磁星环向磁场欧姆衰变

3.1 环向磁场的本征方程

WGW19 为了研究旋转供能脉冲星 PSR J1640-4631 壳层磁场演化, 推导出在广义相对论框架下偶极环向磁场欧姆衰变本征方程, 引入一个矢量 $\mathbf{K} = \frac{c}{4\pi\sigma} \nabla \times (Z\mathbf{B})$, 因此, (5) 式中 \mathbf{B} 的 ϕ 分量可以写为

$$\frac{1}{c} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{K})_\phi = 0. \quad (14)$$

对于任意一个矢量 \mathbf{A} , 它的旋度服从以下规律

$$(\nabla \times \mathbf{A})_i = \frac{\varepsilon^{ijk} h_i}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial (h_k A_k)}{\partial x^j} e_i. \quad (15)$$

于是得到 \mathbf{K} 的旋度在 φ , θ 和 r 方向的分量, 并利用分离变量法, 得到.

$$\frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial H(r,t)}{\partial x^0} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial}{\partial r} \left[Z \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} \frac{\partial (r^2 H(r,t))}{\partial r} \right] - \frac{2ZH(r,t)}{r^2}. \quad (16)$$

通过比较 (16) 式与文献 [29] 中 (3.9) 式, WGW19 发现 $H(r,t)$ 与 $F(r,t)$ 有相同的演化方式. 结合 (8), (10) 和 (11) 式, 得到

$$B_r = -B \cdot F(r,t) \cos \theta, \quad (17a)$$

$$B_\theta = -B \cdot \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{1/2} \frac{\partial (r^2 F(r,t))}{\partial r} \sin \theta, \quad (17b)$$

$$B_\varphi = B \cdot \frac{r}{2} \mu \cdot F(t,r) \sin \theta. \quad (17c)$$

由 (17) 式可知, 在广义相对论框架下, 磁场三分量均可以由标量的斯特克斯函数 $F(r,t)$ 来表示. 磁场在 φ 方向和 r 方向上的强度之比值关系为

$$\frac{|B_\varphi|}{|B_r|} = \frac{1}{2} \mu x R, \quad (18)$$

这里 R 是无量纲的中子星半径. 通过耦合爱因斯坦方程与流体的能量-动量-张量, 得到关于 $m(r)$ 和 $\Phi(r)$ 的微分方程以及流体静力学的方程 $P(r)$ [29]. 将 $m(r)$, $\Phi(r)$ 和 $P(r)$ 代入文献 [29] 中方程 (3.9), 得到

$$\frac{4\pi\sigma}{c^2} e^{-\Phi(r)} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \times [2m(r) + 4\pi r^2 (P - \rho)] \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2F}{r^2}. \quad (19)$$

(19) 式必须需要满足相对论的斯托克斯流函数 $F(t,r)$. 为了解出方程 (19), 将 $F(t,r)$ 展开成多项式形式

$$F(t,x) = \sum_n A_n e^{-\frac{c^2 \lambda_n t}{4\pi\sigma R^2}} X_n(x), \quad (20)$$

其中 $n = 1, 2, \dots$, $x = r/R$; \sum 是对与所有本征模求和; $X_n(x)$ 满足边值条件

$$LX_n(x) + \lambda_n e^{-\Phi} X_n(x) = 0, \quad (21)$$

L 表示本征算符 [29]. 通过引入一阶球形贝塞尔函数, 得到

$$X_n(x) = \frac{j_1(n\pi x)}{xR^2} = \frac{\sin(n\pi x) - n\pi x \cos(n\pi x)}{n^2 \pi^2 R^2 x^3}, \quad (22)$$

其中, 扩展系数 $A_n = \left(\int_0^1 x j_1(n\pi x) x^2 dx \right) / \int_0^1 j_1^2(n\pi x) x^2 dx$. 于是得到弯曲时空下极向磁场 (r 和 θ 方向的分量) 本征方程

$$\begin{aligned} B_r &= -B \cdot F(r,t) \cos \theta \\ &= -B \cdot \sum_n A_n \frac{1}{xR^2} j_1(n\pi x) e^{-\frac{c^2 \lambda_n t}{4\pi\sigma R^2}} \cos \theta, \\ B_\theta &= -B \cdot \frac{1}{2r} \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{1/2} \frac{\partial (r^2 F(r,t))}{\partial r} \sin \theta \\ &= \frac{-B}{2r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} \left[2rF + x^2 R \frac{\partial F}{\partial x} \right] \sin \theta \end{aligned} \quad (23)$$

和弯曲时空下环向磁场本征方程

$$\begin{aligned} B_\varphi &= B \cdot \frac{r}{2} \mu \cdot F(t,r) \sin \theta \\ &= B \cdot \frac{1}{2} \mu x R \sum_n A_n \frac{1}{xR^2} j_1(n\pi x) e^{-\frac{c^2 \lambda_n t}{4\pi\sigma R^2}} \sin \theta. \end{aligned} \quad (24)$$

作为对比, 文献 [28] 忽略了广义相对论效应, 通过引入标量函数 $\tilde{S}(x,t)$ 和 $\tilde{T}(x,t)$, 在平直空间将磁场的三分量表示如下:

$$\begin{aligned} B_r &= B \cdot \frac{\cos \theta}{x^2} \tilde{S}(x,t), \quad B_\theta = -B \cdot \frac{\sin \theta}{2x} \frac{\partial \tilde{S}(x,t)}{\partial x}, \\ B_\varphi &= B \cdot \frac{\sin \theta}{2x} \tilde{T}(x,t), \end{aligned} \quad (25)$$

这里的 $\tilde{S}(x,t)$ 对应于弯曲空间的 $F(r,t)$, $\tilde{T}(x,t)$ 对应于弯曲空间的 $H(r,t)$, 即 $F(r,t) \rightarrow \frac{-\tilde{S}(x,t)}{x^2}$,

$H(r,t) \rightarrow \frac{-\tilde{T}(x,t)}{xr}$, $x = r/R_{\text{SN}}$, R_{SN} 是无量纲的中子星半径. 文献 [28] 中也采用 F-F 磁场位型, 为了满足磁场的限制条件, 即文献 [28] 中 (6) 式, 对应本文中 (10) 式, 文献 [28] 的作者采用的限制条件:

$\tilde{T}(x,t) = \mu R \cdot \tilde{S}(x,t)$ (对应文献 [28] 中 (7) 式, 但是该作者由于失误在方程右边漏写了无量纲的中子星半径 R), 最终得到在平直空间中磁场在 φ 方向和 r 方向上的强度之比值关系:

$|B_\varphi| / |B_r| = \frac{1}{2} \mu x R$, 即与 (11) 式相同. 定义在壳层中任意位置 r 处的磁场能密度 $\rho(x) = \frac{B^2(x)}{8\pi}$, 则磁场在 φ 方向和 r 方向上的磁能密度之比 $\rho_\varphi(x) : \rho_r(x) = \frac{B_\varphi^2}{8\pi} : \frac{B_r^2}{8\pi}$

$$\frac{1}{4}\mu^2 x^2 R^2.$$

由以上分析可知,在无力磁场位型下,由于磁场在 (r, θ) 方向必须满足相同的平衡条件和在 (r, φ) 方向满足相同的限制条件,在平直空间和弯曲空间中,磁场的三个分量都可以由一个分量函数来表示,并且环向磁场和极向磁场的强度之比、磁能密度之比是相同的.尽管如此,由于广义相对论效应,平直空间中的 $\tilde{S}(x, t)$ 和弯曲空间中的 $F(r, t)$ 表达形式和演化并不相同.为了探索出磁场的演化形式,必须要确定电导率 σ 的限制范围.

3.2 强磁场下中子星壳层的电导率

壳层内电导率分别来源于电子-声子散射与电子-杂质散射对电导率的贡献.电导率大小非常依赖温度 T 与密度 ρ ,后者跨越6个或6个以上数量级.决定电导率 σ 的第三个参量是介质的不纯净度,由于在低密度的外壳层区域电导率非常低,磁场欧姆衰变时标特别短($\tau_{\text{Ohm}} \approx 10-10^2$ a),因此外壳层将不再考虑.根据BBP模型,内壳层密度范围约为:从中子滴出密度 $\rho \sim 4.66 \times 10^{11} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 到壳-核边界 $\rho \sim 1.30 \times 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$,由于随着核子数 Z 与质量数 A 单调而任意地增加,BBP模型的物态方程在较高密度 $\rho \geq 1.72 \times 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 遭到Shapiro和Teukolsky^[43]的质疑,我们将停止在相应的较高密度区的计算.在超强磁场下,壳层中重子数密度 n_{B} 可以被看成是一个不变的量,电子丰度 $Y_{\text{e}} = Zn_{\text{N}}/n_{\text{B}}$,其中 n_{N} 是原子核数密度,则电子数密度 $n_{\text{e}} = n_{\text{B}}Y_{\text{e}} = Zn_{\text{N}}$.本文将利用由文献[44]开发的、较为实际的电导率的程序(公开下载的网页为<http://www.ioffe.ru/astro/conduct>),并且结合BBP模型,来计算磁星壳层的电导率.由于文献[44]考虑到强磁场因素,较之以往的计算电导率程序,这个程序提供的结果更能反映中子星壳层电导率的真实情形.

我们计算出在BBP模型中不同的 T 和 Q 下磁星壳层电导率,部分计算结果列于表3.表3上半部分对应 $B_{\text{p}} = 5.0 \times 10^{14} \text{ G}$,表3下半部分对应 $B_{\text{p}} = 3.0 \times 10^{15} \text{ G}$.可以看出,在给定 T , Q 和 B_{p} 的情况下, σ 随着 ρ 增加而增大;在给定 T , ρ 和 B_{p} 的情况下, σ 随着 Q 增加而减小;在给定 Q , ρ 和 B_{p} 的情况下, σ 随着 T 增加而减小;在给定 Q , ρ 和 T 的情况下, σ 随着 B_{p} 增加而增大,磁场在低

密度区域对 σ 的影响比在低密度区影响大,在高密度区域, σ 相对增加率 $\Delta\sigma/\sigma \leq 5\%$;在高密度区域,由于 $\Delta\sigma/\sigma \leq 10^{-3}$,磁场对 σ 的影响忽略不计.为了简单起见,在表3中我们假定不纯净度参数 Q 是一个不变的量,这与中子星壳层的实际情形可能相差很大,必须给出一个合理的 Q 值范围.

我们知道,在较高的温度和较低的密度下,晶格声子限制了电子的运动,因此热和电荷的运输由电子-声子散射(碰撞)主导,而在高密度环境下,热和电荷的运输由电子-杂质散射主导.文献[16]对于以电子-声子散射主导电荷运输的低密度层进行研究,给出一个小的 Q 值范围: $Q \sim 0.001-0.1$;最近,对于以电子-杂质散射主导的更深的高密度层的研究预示不纯净度参数更高: $Q > 1$.通过对中子星磁热演化的研究,文献[45]给出更高不纯净度参数: $Q > 1$.通过对中子星磁热演化的研究,文献[46]给出中子星内壳层不纯净度的范围: $Q \sim 1-100$;磁星内壳层温度比星体表面温度高出1-2个量级,但是最高温度不能超过各异性中子超流的临界温度,我们选取一个比表3更为合理的磁星壳层温度范围 $T \sim 5.0 \times 10^7 - 2.0 \times 10^8 \text{ K}$,在较低密度层 $\rho \sim 4.66 \times 10^{11} - 1.0 \times 10^{13} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 对应 $Q \sim 0.001-0.1$;在较高密度层 $\rho \sim 1.0 \times 10^{13} - 1.30 \times 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 对应 $Q \sim 1-25$;选取一个典型超强磁场 $B_{\text{p}} = 5.0 \times 10^{15} \text{ G}$,给出在一定磁场下电导率随温度和不纯净度的变化关系图,如图4所示.由于 ρ , T 及 Q 来决定 σ 的值确实存在很大的不确定性,为了方便计算,我们给出合理的参数范围:对于低密度层电导率由电子-声子散射主导,选取 $Q \sim 0.1$,对于较高密度层 $\rho \sim 1.0 \times 10^{13} - 5.0 \times 10^{13} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ 电导率由电子-杂质散射主导,选取 $Q \sim 1$,对于更高密度层电导率仍由电子-杂质散射主导, Q 值可能增大,选取 $Q \sim 2$;对应壳层温度稍低的磁星, $T = 6.0 \times 10^7 \text{ K}$,得到壳层 σ 的变化范围 $\sigma \sim 8.65 \times 10^{23} - 8.75 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$;对应壳层温度稍高的磁星, $T = 2.0 \times 10^8 \text{ K}$,得到壳层 σ 的变化范围 $\sigma \sim 1.09 \times 10^{23} - 2.52 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$.

3.3 超强磁场下的磁能释放率

选择典型质量为 $M = 1.45M_{\odot}$ 的磁星,并且采用BBP和TMA物态方程,对应 $R = 11.77 \text{ km}$ 及 $\mu = 1.676$.将(22)和(23)式进行求导,得到环向磁场和极向磁场的变化率:

表 3 在不同温度和不同纯净度参数下磁星壳层电导率的部分值 (采用 BBP 模型)

Table 3. Partial values of electrical conductivity for different temperatures and impurity parameters in the crust of magnetars. Here we use the equation of station (EOS) of BBP model.

		$T = 1 \times 10^8$ K					$T = 2 \times 10^8$ K			$T = 3 \times 10^8$ K			
		$Q = 1$			$Q = 5$		$Q = 10$			$Q = 1$	$Q = 5$	$Q = 10$	
		$\rho/\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$	Z	A	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	$\sigma/10^{23} \text{ s}^{-1}$	
$B_p = 5 \times 10^{14}$ G	4.66×10^{11}	40	127		0.455	2.15	0.752	1.69	1.15	0.591	0.998	0.821	0.490
	6.61×10^{11}	40	130		0.641	2.58	0.865	2.24	1.45	0.703	1.18	0.982	0.592
	8.79×10^{11}	41	134		0.928	3.22	0.991	2.97	1.54	0.822	1.31	1.20	0.702
	1.20×10^{12}	42	137		1.26	3.72	1.15	3.88	2.21	0.953	2.08	1.49	0.787
	1.47×10^{12}	42	140		1.97	4.63	1.23	4.89	2.50	1.04	2.43	1.69	0.867
	2.00×10^{12}	43	144		2.62	4.78	1.42	6.31	3.10	1.22	3.18	2.11	1.03
	2.67×10^{12}	44	149		2.67	5.59	1.68	7.82	3.75	1.41	4.08	2.59	1.29
	3.51×10^{12}	45	154		3.42	6.41	1.85	10.30	4.52	1.62	5.20	3.14	1.40
	4.54×10^{12}	46	161		4.20	7.26	2.08	15.60	5.24	1.89	6.53	3.78	1.65
	6.25×10^{12}	48	170		5.58	8.56	2.37	17.50	6.42	2.18	8.60	4.68	1.96
	8.38×10^{12}	49	181		6.95	9.67	2.66	22.20	7.46	2.49	10.90	5.55	2.23
	1.10×10^{13}	51	193		8.58	11.40	2.99	27.90	8.75	2.81	13.70	6.60	2.55
	1.50×10^{13}	54	211		10.80	12.90	3.45	35.60	10.40	3.24	17.30	7.95	2.95
	1.99×10^{13}	57	232		13.00	14.90	3.95	43.60	12.10	3.73	21.20	9.37	3.12
	2.58×10^{13}	60	257		15.20	16.90	4.46	51.20	13.80	4.22	24.90	10.80	3.88
	3.44×10^{13}	65	296		17.70	19.70	5.22	59.60	16.20	4.93	28.90	12.50	4.53
4.68×10^{13}	72	354		20.40	23.50	6.23	67.70	19.10	5.87	32.60	14.60	5.37	
5.96×10^{13}	78	421		21.70	26.50	7.08	69.00	21.10	6.63	33.80	15.90	6.02	
8.01×10^{13}	89	548		22.10	31.20	8.48	69.80	23.80	7.82	34.70	17.20	6.95	
9.83×10^{13}	100	683		23.20	35.30	9.78	69.80	25.40	8.83	36.00	17.50	7.64	
1.30×10^{14}	120	990		25.50	40.30	11.80	70.80	26.50	10.10	38.20	18.10	8.20	
$B_p = 3 \times 10^{15}$ G	4.66×10^{11}	40	127		0.463	2.21	0.764	1.70	1.18	0.603	1.04	0.830	0.505
	6.61×10^{11}	40	130		0.649	2.67	0.873	2.29	1.50	0.721	1.36	1.04	0.605
	8.79×10^{11}	41	134		0.943	3.30	1.09	3.05	1.71	0.842	1.42	1.29	0.723
	1.20×10^{12}	42	137		1.32	3.77	1.19	3.98	2.32	1.01	2.21	1.59	0.854
	1.47×10^{12}	42	140		1.70	4.76	1.36	5.09	2.84	1.19	2.66	1.87	0.937
	2.00×10^{12}	43	144		2.00	4.85	1.65	6.41	3.29	1.30	3.40	2.28	1.12
	2.67×10^{12}	44	149		2.66	5.66	1.81	7.99	3.79	1.43	4.18	2.65	1.31
	3.51×10^{12}	45	154		3.48	6.49	1.91	11.30	4.58	1.64	5.20	3.17	1.45
	4.54×10^{12}	46	161		4.20	7.32	2.11	15.80	5.31	1.92	6.56	3.81	1.69
	6.25×10^{12}	48	170		5.58	8.64	2.44	17.90	6.49	2.24	8.65	4.74	1.99
	8.38×10^{12}	49	181		6.94	9.74	2.69	23.10	7.53	2.52	11.20	5.61	2.27
	1.10×10^{13}	51	193		8.58	12.00	3.06	28.80	8.80	2.86	13.80	6.65	2.68
	1.50×10^{13}	54	211		10.90	13.20	3.50	35.70	10.80	3.29	17.40	7.98	2.97
	1.99×10^{13}	57	232		13.10	15.10	3.98	43.70	12.60	3.77	21.30	9.40	3.45
	2.58×10^{13}	60	257		15.30	17.00	4.48	51.30	14.00	4.24	25.00	11.10	3.90
	3.44×10^{13}	65	296		17.70	19.90	5.25	59.70	16.40	4.95	28.90	12.70	4.55
4.68×10^{13}	72	354		20.50	23.70	6.25	67.70	19.30	5.89	32.70	14.70	5.38	
5.96×10^{13}	78	421		21.80	26.70	7.10	69.00	21.30	6.65	33.80	16.00	6.03	
8.01×10^{13}	89	548		22.10	31.30	8.49	69.80	23.90	7.83	34.70	17.30	6.96	
9.83×10^{13}	100	683		23.20	35.40	9.79	70.30	25.50	8.85	36.10	17.70	7.65	
1.30×10^{14}	120	990		25.50	40.30	11.80	70.80	25.50	10.10	28.20	18.10	8.20	

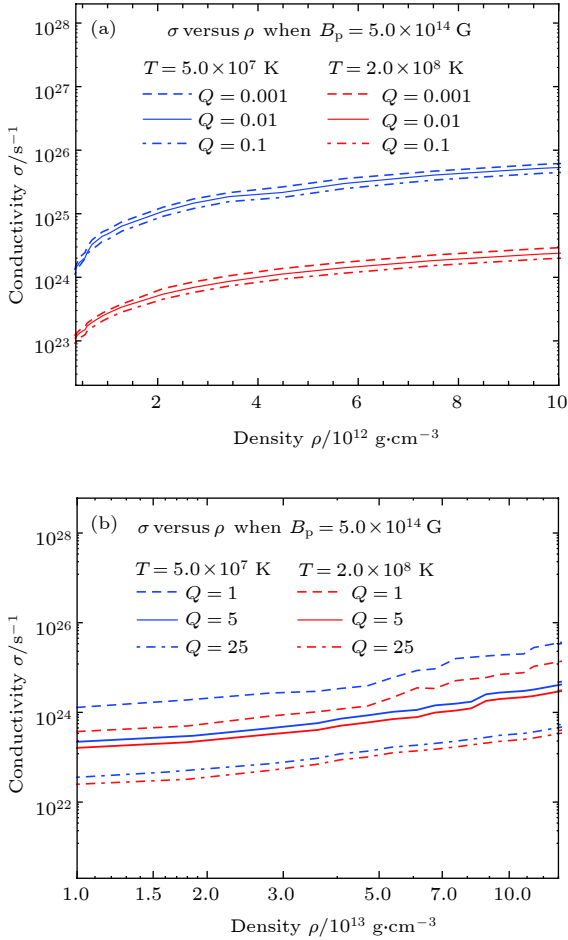


图 4 磁星壳层电导率随密度、温度及不纯净度参数的变化 (a) 电导率由电子-声子散射主导; (b) 电导率由电子-杂质散射主导; 物态方程一律采用 BBP 模型

Fig. 4. Relationship of σ to ρ , T and Q in the inner crust for magnetar: (a) The conductivity due to electron-phonon scattering; (b) the conductivity due to electron-impurity scattering. The EOS of BBP model is used.

$$\begin{aligned} \frac{dB_p}{dt} &= \frac{dB_r}{dt} \\ &= B \cdot \frac{c^2 \lambda_n}{4\pi\sigma R^2} \sum_n A_n \frac{j_1(n\pi x)}{xR^2} e^{-\frac{c^2 \lambda_n t}{4\pi\sigma R^2}} \cos \theta, \\ \frac{dB_t}{dt} &= \frac{dB_\varphi}{dt} \\ &= -B \cdot \frac{\mu x c^2 \lambda_n}{8\pi\sigma R} \sum_n A_n \frac{j_1(n\pi x)}{xR^2} e^{-\frac{c^2 \lambda_n t}{4\pi\sigma R^2}} \sin \theta. \end{aligned} \quad (26)$$

磁场能释放率也是时间的函数, 可以用下式来进行估算:

$$L_{p/t} = \frac{-1}{4\pi} \int_V B_{p/t} \frac{dB_{p/t}}{dt} dV, \quad (27)$$

其中 $dV = 4\pi r^2 dr$, $R_c = 0.98$ km. 磁能释放率主要是由环向磁场所主导:

$$L_B = L_p + L_t \approx L_t. \quad (28)$$

选择一个典型的强磁场 $B_p(0) = 2.0 \times 10^{15}$ G, 计算了磁场的衰变率和磁能释放率, 部分结果列在表 4 中.

将 $\sigma = 8.75 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$ 和 $\sigma = 2.52 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$ 分别代入方程组 (22), (23), (26), (27) 中, 用数值模拟方法得到在 $B_p(0) = 3.0 \times 10^{15}$ G 和 $B_p(0) = 5.0 \times 10^{14}$ G 两种情况下 B_p , dB_p/dt , L_p , B_t , dB_t/dt , L_t 和 L_B 随时间的变化, 如图 5 所示. 由图 5 可以看出, B_p 和 B_t 都同样地经历缓慢衰变和快速衰变的过程.

4 与磁星的观测对比

4.1 磁星旋转能损率和软 X 射线光度

从 McGill 磁星数据网站 (<http://www.physics.mcgill.ca/~pulsar/magnetar/main.html>) 上, 可以看到有 29 颗磁星及其候选体, 其中 22 颗源: CXOU J164710.2-455216 (缩写 CXOU J164710), CXOU J0100430.1-721134 (缩写 CXOU J01004), 1RXS J170849.0-400910 (缩写 1RXS J170849), 1E 2259+586, 1E 1048.1-5937, 1E 1841-045, 4U 0142+61, SGR 0418+5729, SGR 0526-66, SGR 1900+14, SGR 1806-20, 1E 1547.0-5408, XTE J1810-197, CXOU J171405.7-381031 (缩写 CXOU J171405), SGR 1627-41, Swift J1822-1606, Swift J1834.9-0864, SGR J1745-2900, PSR J1622-4950, PSR J1846-025, 暂变源 AX J1845.0-0258 及 3XMM J185246.6+003377 (缩写 3XMM J185246), 它们具有软 X 射线光子. 周期约为 7 s 的 X 射线的源 AX J1845.0-0300, 与超新星遗迹 G29.6+0.1 成协, X 射线亮度较低, 光谱较软, 表明它可能是制动的 X 射线脉冲星^[47]. 然而, 由于缺乏精确稳定的周期导数值, 人们无法对其旋转能量损失率进行评估. 因此 AX J1845.0-0258 的磁场衰变、旋转能损率与软 X-射线光度的关系将不再被考虑. 3XMM J185246 的旋转周期 $P = 11.5587$ s, 周期导数的上限 $\dot{P} < 1.4 \times 10^{-13} \text{ s}^{-1}$, 假定一个经典的偶极制动模型, 给出偶极磁场的上限 $B_d < 4.6 \times 10^{13}$ G 及旋转能损率上限 $L_{\text{rot}} < 4.75 \times 10^{30} \text{ erg/s}$, 该源与超新星遗迹 Kes 73 成协, 超新星遗迹 (supernova remnant, SNR) 年龄 $\tau_{\text{SNR}} = 4.4 \text{ ka}$ —

表 4 当 $B_p(0) = 2.0 \times 10^{15}$ G 时 B_p , dB_p/dt , L_p , B_t , dB_t/dt , L_t 和 L_B 的部分值 (假定一个中等质量的磁星 $M = 1.45M_\odot$, $R = 11.77$ km, $R_c = 0.98$ km, 对应着 $I = 1.47I_{45}$ 和 $\mu = 1.676$; 表格上和下半部分分别对应着 $\sigma = 8.75 \times 10^{24}$ s $^{-1}$ 和 $\sigma = 2.52 \times 10^{24}$ s $^{-1}$)

Table 4. Partial values of B_p , dB_p/dt , L_p , B_t , dB_t/dt , L_t and L_B when $B_p(0) = 2.0 \times 10^{15}$ G. Here we assume a medium-mass magnetar $M = 1.45M_\odot$, $R = 11.77$ km, $R_c = 0.97$ km, corresponding to $I = 1.47I_{45}$ and $\mu = 1.676$, respectively. The top and bottom parts correspond to $\sigma = 8.75 \times 10^{24}$ s $^{-1}$ and $\sigma = 2.52 \times 10^{24}$ s $^{-1}$, respectively.

σ /s $^{-1}$	t/a	B_p /G	dB_p/dt /G·a $^{-1}$	L_p /erg·s $^{-1}$	B_t /G	dB_t/dt /G·a $^{-1}$	L_t /erg·s $^{-1}$	L_B /erg·s $^{-1}$
8.75×10^{24}	5.0×10^2	1.995×10^{15}	-5.92×10^9	1.57×10^{34}	1.965×10^{16}	-5.84×10^{10}	6.28×10^{35}	6.44×10^{35}
	2.0×10^3	1.981×10^{15}	-4.65×10^9	1.15×10^{34}	1.953×10^{16}	-4.58×10^{10}	4.59×10^{35}	4.70×10^{35}
	2.0×10^4	1.954×10^{15}	-1.37×10^8	3.61×10^{33}	1.927×10^{16}	-1.35×10^{10}	1.44×10^{35}	1.48×10^{35}
	2.0×10^5	1.844×10^{15}	-5.91×10^8	1.63×10^{33}	1.818×10^{16}	-5.84×10^{10}	6.52×10^{34}	6.68×10^{34}
	2.0×10^6	1.373×10^{15}	-8.61×10^7	1.56×10^{32}	1.354×10^{16}	-8.48×10^8	6.24×10^{33}	6.40×10^{33}
	2.0×10^7	6.865×10^{14}	-4.36×10^7	7.85×10^{31}	6.772×10^{15}	-4.29×10^8	3.14×10^{33}	3.22×10^{33}
2.52×10^{24}	5.0×10^2	1.990×10^{15}	-1.51×10^{10}	3.98×10^{34}	1.96×10^{16}	-1.49×10^{11}	1.59×10^{36}	1.63×10^{36}
	2.0×10^3	1.977×10^{15}	-5.43×10^{10}	1.65×10^{34}	1.95×10^{16}	-5.36×10^{10}	6.61×10^{35}	6.77×10^{35}
	2.0×10^4	1.931×10^{15}	-1.86×10^9	4.74×10^{33}	1.905×10^{16}	-1.83×10^{10}	1.90×10^{35}	1.94×10^{35}
	2.0×10^5	1.745×10^{15}	-7.21×10^9	1.69×10^{33}	1.721×10^{16}	-7.11×10^{10}	6.76×10^{34}	6.93×10^{34}
	2.0×10^6	8.712×10^{14}	-3.87×10^9	4.46×10^{32}	8.592×10^{15}	-3.82×10^{10}	1.78×10^{34}	1.83×10^{34}
	2.0×10^7	2.749×10^{13}	-1.33×10^7	4.82×10^{29}	2.711×10^{14}	-1.31×10^8	1.93×10^{31}	1.98×10^{31}

4.7 ka, 宁静状态下的软 X 射线光度上限为: $L_X^\infty < 4.0 \times 10^{30}$ erg/s^[48]. 初始磁场可以选取与 SGR 0418–5729 相同, 因为它和 SGR 0418–5729 一样, 属于低偶极磁场、低光度、暂变的 X 射线源 (X 射线流量仍然在缓慢下降, 没有得到相对稳定的值). 在表 5 中, 名称依次为: 源名、自转周期 (P)、自转周期导数 (\dot{P})、特征年龄 ($\tau_c = P/2\dot{P}$)、真实年龄估计、可能成协的物体 (如 SNR、大质量分子云、大质量星团、氢 II 区、大、小麦哲伦云、银河系中心)、实际年龄确定方法、软 X 射线光度、旋转能损率. 动力学年龄是指磁星从最初位置 (如星团) 移动到现在所处位置的时间, 通过测量 SNR 的年龄、自行年龄或特征年龄来估算. 有关与超新星遗迹的距离和年龄信息请参考 SNR 网站 <http://www.physics.umanitoba.ca/snr/SNRcat/>. 被观测到的磁星软 X 射线光度是指经过引力红移的、各向同性的软 X 射线光度, 由下式进行估算:

$$L_X^\infty = 4\pi D^2 (F_X^\infty)^4, \quad (29)$$

其中 D 是源到地球的距离, F_X^∞ 是指观测到的软 X 射线谱流, 即在 $kT \sim 0.5-10$ keV ($1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ J) 范围内没有被星际介质吸收软 X 射线谱流). 中子星旋转能量损失率被定义为

$$L_{\text{rot}} = I\Omega\dot{\Omega} = 4\pi^2 I\nu\dot{\nu} = -4\pi^2 I\dot{P}P^{-3}, \quad (30)$$

其中 Ω 是角速度, $\dot{\Omega}$ 是 Ω 的导数, $\nu = \Omega/2\pi$ 是自

转频率. 本文采用 TMA 参数组, 取中等质量的中子星 $M = 1.45M_\odot$, 对应 $I = 1.45(2) \times 10^{45}$ g·cm 2 .

根据 (30) 式, 我们计算了磁星的 L_{rot} 值, 发现 10 颗磁星两种光度的关系为, $L_{\text{rot}} > L_X^\infty$. SGR 0501+4516, SGR 1627–41, SGR J1745–2900 属于暂变磁星, 其软 X 射线光度在外暴和周期跃变 (glitch) 后持续下降, 并且他们持续的 X 射线光度低于旋转能损率 $L_X^\infty < L_{\text{rot}}$, 内部超强的多级磁场提供外暴所需能量. IE 1547.0–5408, XTE J1810–197 与 CXOU J171405 都属于反常 X 射线磁星, 前两者属于暂变源, 软 X 射线光度可能来源于旋转能损率, CXOU J171405.7–38031 的 L_{rot} 与 L_X^∞ (2–10 keV) 之比略大于 1, 这颗源可能是介于磁星和暂变射电脉冲星之间的另一类脉冲星; Swift J1822–1606 与 Swift J1834.9–0864 属于新一类软 Gamma-射线重复暴, Swift J1822–160 的偶极磁场略高于 SGR 0418+5729 的偶极磁场 $B_d = 6.7 \times 10^{12}$ G; Swift J1822–1606 与 Swift J1834–0864 都具有延展的 X 射线辐射和相联系的脉冲星星风云 (pulsar wind nebula), 其软 X 射线光子可能来源于磁星星风云, 变化的相对论粒子流导致星体自转变化率发生变化^[86]. PSR J1846–0258 被认为是旋转供能的反常 X 射线磁星, 也可能是介于磁星和旋转供能脉冲星之间的一个独特暂变源^[87].

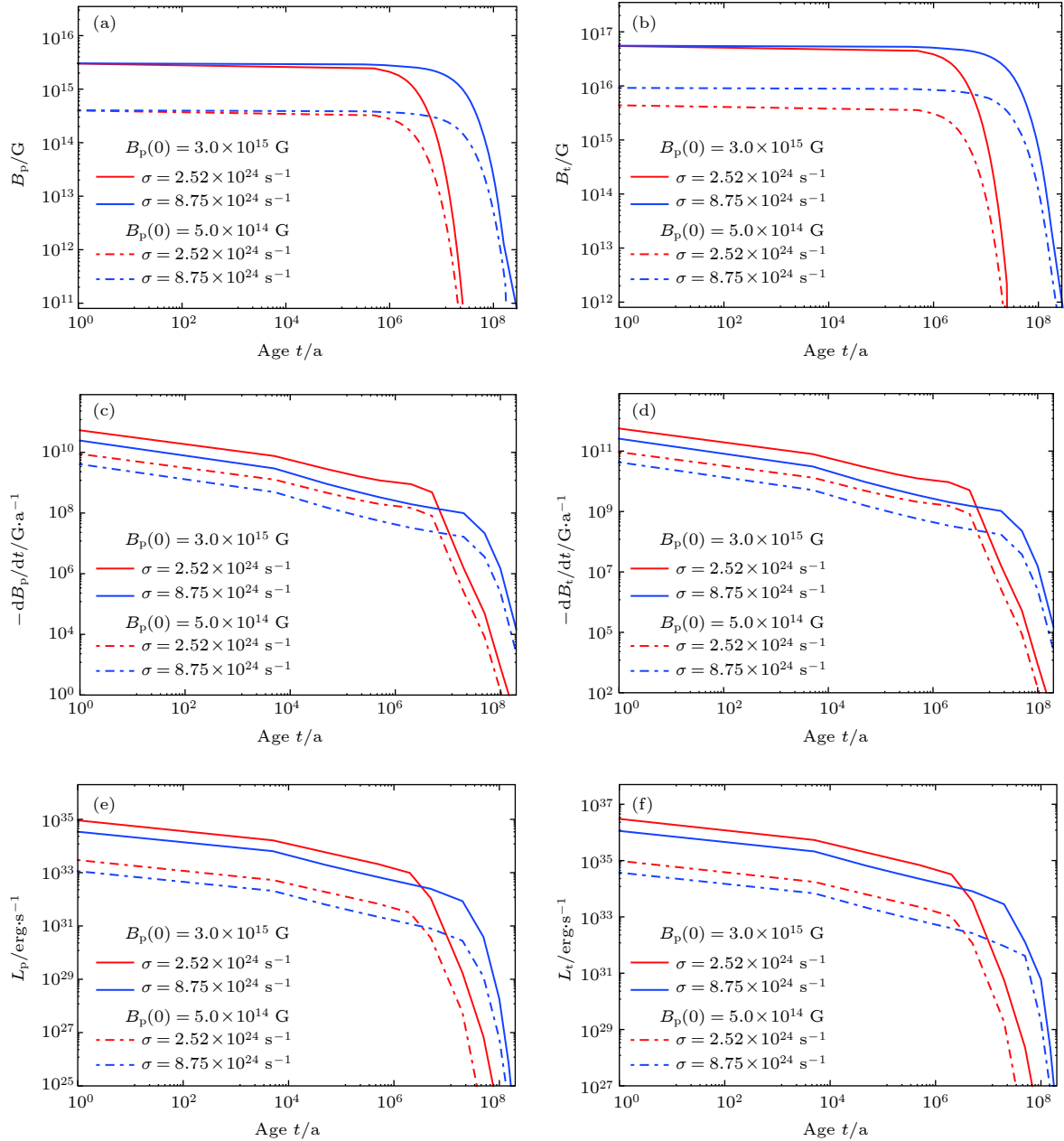


图 5 磁星磁场欧姆衰变的数值模拟 (a) 在 $x=1$ 处极向磁场 B_p 随时间 t 的变化; (b) 在 $x=1$ 处极向磁场 B_t 随时间 t 的变化; (c) 在 $x=1$ 处极向磁场衰减率 dB_p/dt 随时间 t 的变化; (d) 在 $x=1$ 处环向磁场衰减率 dB_t/dt 随时间 t 的变化; (e) 极化磁场的能量衰减率 L_p 随时间 t 的变化; (f) 环向磁场的能量衰减率 L_t 随时间 t 的变化; 在 (a)–(f) 图中红色和蓝色颜色的线分别表示 $\sigma = 2.52 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$ 和 $\sigma = 8.75 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$

Fig. 5. Numerical fitting of Ohmic decay for magnetars: (a) The poloidal magnetic field, B_p , as a function of t at $x=1$; (b) the toroidal magnetic field, B_t , as a function of t when at $x=1$; (c) the poloidal magnetic field decay rate, dB_p/dt , as a function of t when at $x=1$; (d) the toroidal field decay rate, dB_t/dt , as a function of t when at $x=1$; (e) the poloidal field energy decay rate, L_p , as a function of t ; (f) the toroidal field energy decay rate, L_t , as a function of t . The red and blue lines in (a)–(f) indicate $\sigma = 2.52 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$ and $\sigma = 8.75 \times 10^{24} \text{ s}^{-1}$, respectively.

尽管不少研究者对磁星的辐射特性进行研究^[8–15], 但是很少看到关于磁星的 $L_X^\infty - L_{\text{rot}}$ 的线性拟合. 文献^[88, 89]对包括磁星在内致密天体的 $L_X^\infty - L_{\text{rot}}$ 的关系进行了研究, 如图 6 所示.

在图 6 中, Radio PSR 表示 160 颗普通的射

电脉冲星^[89]; HB 表示 15 颗强磁场脉冲星; XINS 表示 7 颗 X 射线的孤立中子星^[90,91]; CCO 表示 8 颗中心致密天体^[92]; 实线是利用文献^[89]给出的公式 $L_X^\infty = 10^{-3} L_{\text{rot}}$ 进行拟合得到的图线. 点划线是利用文献^[88]给出的经验公式

表 5 具有软 X 射线辐射的 22 颗磁星的到达时间及其辐射特性

Table 5. The persistent timing, ages and emission characteristics for 22 magnetars with observed soft X-ray flux.

Source	P/s	$\dot{P}/10^{-11} s^{-1}$	τ_c/ka	Age Est/ka	Associa.	Method	$L_X^\infty/erg \cdot s^{-1}$	$L_{rot}/erg \cdot s^{-1}$	Refs.
SGR 0418+5729	9.07839	0.0004(1)	36000	550	SMC	磁热模拟	9.60×10^{29}	3.1×10^{29}	[46,48,49]
1E 2259+586	6.97904	0.04837	230.0	10—20	SNR CTB109	SNR年龄	1.70×10^{34}	7.37×10^{31}	[50—52]
4U 0142+61	8.68870	0.2022(4)	68.0	68.0	SMC	特征年龄	1.05×10^{35}	1.85×10^{32}	[49,50,53]
CXOU J164710	10.61	<0.04	>420.0	>420	Cluster Wdl	特征年龄	4.50×10^{32}	$<1.88 \times 10^{31}$	[54,55]
1E 1048-5937	6.45787	2.250	4.5	4.5	GSH 288.3-0.5-28	特征年龄	4.90×10^{34}	4.65×10^{33}	[56—58]
CXOU J010043	8.02039	1.88(8)	6.8	6.8	SMC	特征年龄	6.50×10^{34}	2.33×10^{33}	[49,59]
1RXS J170849	11.00502	1.9455(13)	9.0	9.0	MC 13A	特征年龄	4.20×10^{34}	7.37×10^{32}	[50,55]
1E 1841-045	11.78898	4.092(15)	4.70	0.5—1.0	SNR Kes73	SNR年龄	1.84×10^{35}	1.47×10^{33}	[50,60]
SGR 0501+4516	5.76206	0.594(2)	16.00	4—6	SNR HB9	SNR年龄	8.10×10^{32}	1.85×10^{33}	[61—63]
SGR 0526-66	8.054(2)	3.8(1)	3.400	4.8	SNR N49	SNR年龄	1.89×10^{35}	4.22×10^{33}	[64,65]
SGR 1900+14	5.19987	9.2(4)	0.900	3.98—7.9	Massive star Cluster	自行年龄	9.00×10^{34}	3.79×10^{34}	[66—68]
SGR 1806-20	7.54773	49.5000	0.240	0.63—1.0	W31, MC13A	自行年龄	1.63×10^{35}	6.68×10^{34}	[68,69]
XTE J1810-197	5.54035	0.777(3)	11	11	W31, MC13A	特征年龄	4.3×10^{31}	2.93×10^{35}	[69,70]
1E 1547-5408	2.07212	4.77	0.69	0.63	SNR G327.24-013	SNR年龄	1.3×10^{33}	3.11×10^{35}	[71,72]
3XXMJ185246	11.5587	<0.014	>1300	5—7	SNR Kes 79	SNR年龄	$<4.0 \times 10^{38}$	$<4.8 \times 10^{38}$	[73,74]
CXOU J171405	3.82535	6.40	0.95	5	CTB 37B	SNR年龄	5.6×10^{34}	6.13×10^{34}	[45,75]
SGR 1627-41	2.59458	1.9(4)	2.2	5.0	SNR G337.0-0.1	SNR年龄	3.6×10^{33}	5.87×10^{34}	[76,77]
Swift J1822-1606	8.43772	0.0021(2)	6300	6300	HII region	特征年龄	$<4.0 \times 10^{29}$	2.0×10^{30}	[78,79]
Swift J1834-0864	2.4823	0.796(12)	4.9	60200	SNR W41	SNR年龄	$<8.4 \times 10^{30}$	3.1×10^{34}	[80,81]
PSR J1622-4950	4.326(1)	1.7(1)	4.0	≤ 6.0	SNR G33.9+0.0	SNR年龄	4.40×10^{32}	1.18×10^{34}	[63,82]
SGR J1745-2900	3.7636	1.385(15)	4.30	4.30	Galaxy Center	特征年龄	1.10×10^{32}	1.47×10^{34}	[83,84]
PSR J1846-0258	0.32657	0.71070	0.73	0.9-4.3	SNR Kes75	SNR年龄	1.90×10^{34}	8.10×10^{36}	[49,85]

$$L_X^\infty (0.5 - 10 \text{ keV}) = 10^{31.69} (L_{rot}/L_0)^\alpha \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \quad (31)$$

所得到的拟合图线, 其中 $L_0 = 10^{35.38} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 1.03 + 0.27$. 然而, 从图 6 中磁星的分布来看, 文献 [88, 89] 所得到的拟合公式与大部分磁星在 $L_X^\infty - L_{rot}$ 关系图的分布偏离太远, 特别是高 X 射线的磁星, 它们在图中的位置远高于两条所谓的经验拟合曲线, 说明文献 [88, 89] 拟合得到的曲线并不能反映出磁星的软 X 射线辐射的内在物理. 为了更真实地反映磁星软 X 射线辐射特性, 可以分两种情况: 1) $L_X^\infty < L_{rot}$ 和 2) $L_X^\infty > L_{rot}$, 对磁星软 X 射线光度和旋转能损率的关系进行拟合. 使用 ROOT 软件 (<https://root.cern/>) 进行处理数据, 对于 12 颗满足情况 (1) 的磁星, 得到:

$$L_X^\infty (0.5 - 10 \text{ keV}) = 10^{33.41 \pm 4.11} (L_{rot}/10^{32.15 \pm 2.48})^{1.08 \pm 0.17} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (32)$$

同样地, 对于 10 颗满足情况 2) 的磁星, 得到拟合公式:

$$L_X^\infty (0.5 - 10 \text{ keV}) = 10^{32.24 \pm 1.36} (L_{rot}/10^{33.75 \pm 3.71})^{0.695 \pm 0.21} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (33)$$

卡方/自由度 (χ^2/df) 的比值反映拟合的准确度, 理论上 χ^2/df 的值越接近 1 越好. 对于 (32) 和 (33) 式, χ^2/df 的值分别为 8.51/7 和 7.98/9, 这说明拟合的表达式和数据非常吻合. 随着磁星样本的增加, 我们会修正拟合的表达式.

表 5 中磁星的 L_X^∞ 和 L_{rot} 的值表示成为对数, (32) 与 (33) 式变成线性函数 (见图 7). 总之, 相比于以往的研究, 我们将磁星软 X 射线辐射按照能量损失机制分为两类进行拟合, 拟合的结果与观测更为吻合, 更为体现磁星的辐射特性和内在物理. 2017 年, Coelho 等 [93] 利用广义相对论的旋转磁偶极子模型, 分析了磁星在 2—10 keV 波段的软 X-射线光度, 在物态方程所允许的范围内计算了 22 颗 SGRs/AXPs 的旋转能量损失率, 认为九颗源 ($L_X^\infty/L_{rot} < 1$) 属于旋转供能的脉冲星, 它们的名称分别为: SGR 0501+4516, SGR 1627-41,

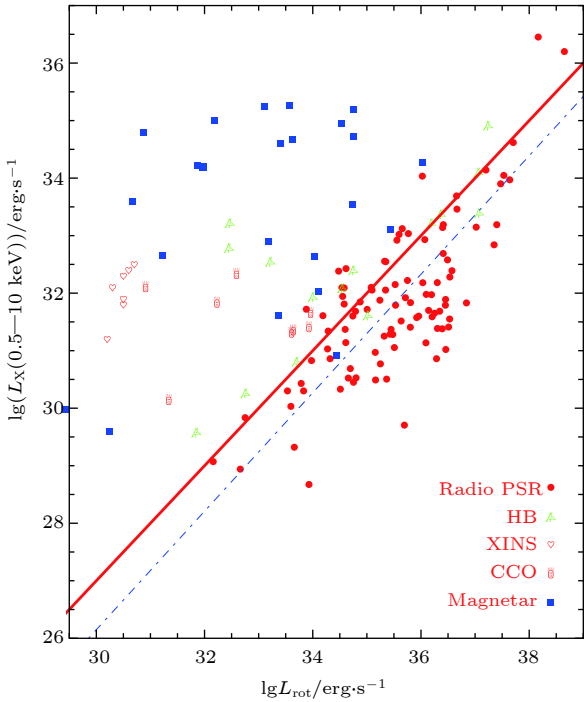


图 6 在各向同性加热模型下磁星及相关致密天体 $L_X^\infty - L_{rot}$ 的关系图

Fig. 6. The $L_X^\infty - L_{rot}$ plot for our magnetars and selected objects in isotropic heating models.

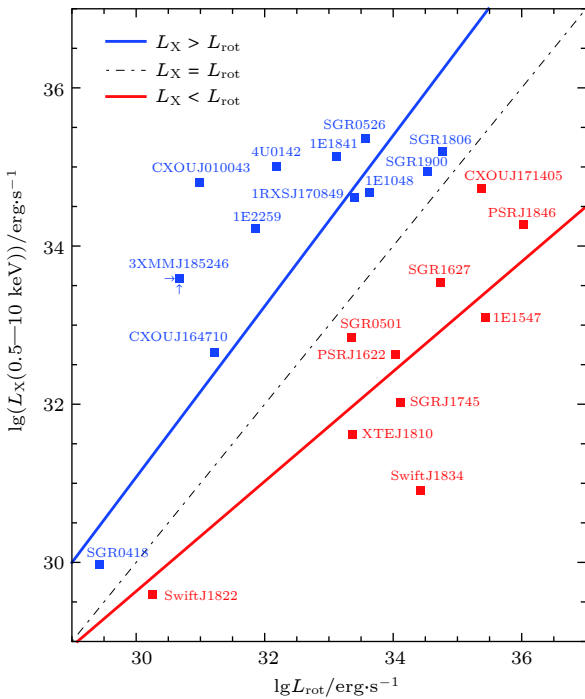


图 7 在各向同性加热模型下拟合得到的磁星的旋转能损率与软 X 射线光度的关系

Fig. 7. Fitting relationship between the soft X-ray luminosity and rotational energy loss rate of magnetars in the isotropic heating model.

SGR J1745–2900, 1E 1547.0–5408, XTE J1810–197, CXOU J171405, Swift J1834.9–0864, PSR J1622–4950 和 PSR J1846–0258. 在以上九颗源中, 三颗源被观测到硬 X 射线, 如果硬 X 射线光子也来源旋转供能, 以上旋转供能的九颗源变为七颗. 文献 [93] 的结论部分地支持了本文的上述结果.

4.2 磁星 X 射线辐射和环向磁场的欧姆衰变

本节只考虑 12 颗旋转能损率远小于软 X 射线光度的磁星. 假定内部环向磁场的欧姆衰变可以提供磁星各向同性的软 X 射线辐射. 为了估计这 12 颗磁星的 $B_p(0)$ 值, 我们引用 Viganò等 [46] 的工作:

1) 通过引入最先进的动力学系数, 并且考虑到霍尔漂移项的重要影响, Viganò等 [46] 给出中子星磁-热演化二维模拟最新结果, 并与包括 17 颗磁星在内的 40 个源的观测进行比较. 结果发现, 仅靠改变初始磁场、质量和包层成分, 在该理论模型下, 磁星、高磁场射电脉冲星、孤立暗 neutron 星等观测多样性可以得到很好地解释.

2) 通过比较具有磁场 $B_p(0) = 10^{15}$ G 的铁壳层中子星的冷却曲线, 推断 8 颗磁星 (CXOU J171405, SGR 1900+14, 1E 1048.1–5937, SGR 0526–66, CXOU J010043, 1RXS J170849, 1E 1841–045, SGR 1806–20) 能自诞生时就具有量级为几个 10^{15} G 的磁场, 磁场能提供硬 X 射线辐射, 总的光度 $\sim 10^{36}$ erg·s⁻¹ [46].

3) 通过比较具有磁场 $B_p \sim 1-5 \times 10^{14}$ G 的中子星群的冷却曲线, 得到启示: 9 颗磁星 (1E 1547.0–5408, SGR 1627–41, SGR 0501+4516, XTE J1810–197, CXOU J164710, 1E 2259+586, 4U 0142+61, Swift 1822.3–1606, SGR 0418+5729) 可能具有初始磁场 $B_p(0) = 3 \times 10^{14}$ G, 这样的磁场能够解释观测的到达时间特性和持续的软 X 射线光度.

结合文献 [25] 和当前的磁星观测 (软 X 射线光度、表面热温度和实际年龄等), 我们给出 12 颗磁星 ($L_X^\infty > L_{rot}$) 的初始磁场和相关参数, 列举在表 6 中. 在中子星内部可能存在着超流涡丝爬行、放射性同位素化学元素衰变 [94]、最小冷却等各向同性加热机制, 但是这些加热机制热能产生率与磁星高值的 X 射线光度相比忽略不计 [33]. 我们假定

表 6 12 颗旋转能损率远小于软 X 射线光度的磁星的辐射特性及磁场能衰变率

Table 6. The X-ray emission characteristics and magnetic field energy decay rates of 12 magnetars with rotational energy loss rates less than their soft X-ray luminosities.

Source	$B_p(0)/G$	PL Ind.	T_{BB}^∞/keV	D/kpc	$F_X^\infty/erg\cdot s^{-1}\cdot cm^2$	$L_X^\infty/erg\cdot s^{-1}$	$L_B^a/erg\cdot s^{-1}$	$\eta^a/\%$	$L_B^b/erg\cdot s^{-1}$	$\eta^b/\%$	Ref.
SGR 0418-5729	3.0×10^{14}	—	0.30	2.0	2.0×10^{-11}	9.60×10^{29}	5.35×10^{32}	0.31	2.26×10^{32}	0.74	[48,49,50]
1E 2259+586	5.0×10^{14}	3.75(4)	0.37(1)	3.2(2)	1.41×10^{-11}	1.70×10^{34}	$6.5(1.0) \times 10^{35}$	22(6)	$1.4(3) \times 10^{35}$	47(8)	[50–52]
CXOU J164710	3.0×10^{14}	3.86(22)	0.59(6)	3.9(7)	2.54×10^{-11}	4.50×10^{32}	8.65×10^{33}	9	3.62×10^{33}	21	[50,54,95]
3XXMJ185246	3.0×10^{14}	—	0.6	7.1	1.0×10^{-15}	4.0×10^{33}	3.53×10^{34}		3.11×10^{35}		[73,74]
4U 0142+61	3.0×10^{15}	3.88(1)	0.41	3.6(4)	6.97×10^{-11}	1.0×10^{35}	1.14×10^{36}	15	4.85×10^{35}	37	[50,53,96]
1E1048-5937	1.0×10^{15}	3.14(11)	0.56(1)	9.0(1.7)	5.11×10^{-11}	4.90×10^{34}	7.19×10^{35}	12	3.08×10^{35}	27	[50,57,58]
CXOU J010043	1.0×10^{15}	—	0.30(2)	62.4(1.6)	1.40×10^{-11}	6.50×10^{34}	6.82×10^{35}	16	3.22×10^{35}	34	[50,97]
IRXS J170849	1.0×10^{15}	2.79(1)	0.456	3.8(5)	2.43×10^{-11}	4.20×10^{34}	7.65×10^{35}	9	3.23×10^{35}	21	[50,53,96]
1E1841-045	1.0×10^{15}	1.9(2)	0.45(3)	8.6(1.1)	2.13×10^{-11}	1.84×10^{35}	$1.2(2) \times 10^{36}$	26(4)	$5.9(7) \times 10^{35}$	46(4)	[50,98,99]
SGR 0526-66	3.0×10^{15}	$2.5^{+0.11}_{-0.12}$	0.44(2)	53.6(1.2)	5.50×10^{-11}	1.89×10^{35}	2.28×10^{36}	8	7.11×10^{35}	26	[50,65]
SGR1900+14	3.0×10^{15}	1.9(1)	0.47(2)	13.0(1.2)	4.82×10^{-12}	9.0×10^{34}	$2.2(6) \times 10^{36}$	7(1)	$7.8(8) \times 10^{35}$	19(2)	[50,66]
SGR1806-20	3.0×10^{15}	1.6(1)	0.55(7)	8.8(1.6)	1.81×10^{-12}	1.63×10^{35}	$3.8(4) \times 10^{36}$	7.4(8)	$8.9(9) \times 10^{35}$	26(2)	[50,69]

注: a表示 $\sigma = 2.52 \times 10^{24} s^{-1}$ 的情况; b表示 $\sigma = 8.75 \times 10^{24} s^{-1}$ 的情况; PL Ind. 表示幂率指数.

各向同性的软 X-射线辐射来自星体表面, 给定磁星初始偶极磁场的估计值和实际年龄, 计算出在两个典型电导率情况下磁场能释放率, 计算结果列于表 6 中.

从表 6 可以看到, 磁星内部磁场由于欧姆衰变, 磁场能释放率普遍地高于其软 X 射线光度 1—2 个数量级, 主导磁能释放率的环向磁场衰变足够提供磁星宁静状态下持续的 X 射线辐射, 表 6 中 L_B 的计算结果支持了本文的理论模型. 客观上讲, 我们对 L_B 的理论计算与磁星内部磁场欧姆衰变实际情形还存在一定的差异. 这是由于对磁星初始磁场、实际年龄和内壳层厚度的估算还存在一定的不确定性, 另外, 由于星际介质对 X 射线的吸收以及磁星距离估计的不确定性, 由磁星网站所给出的 L_X^∞ 的值 (表 5 中第 8 列) 也存在一定的不确定性. 随着对磁星观测手段、观测设备、观测方法的改进, 以及理论方面的深入研究, 本文模型也会得到进一步改进, 理论结果将更好地符合磁星的高能观测.

由于欧姆衰变过程释放的热能, 绝大部分由热中微子带走, 还有一部分被星体物质吸收维持热平衡, 因此, 只有很少部分的湮灭的磁场能转换为热 X 射线光子. 我们定义磁星的软 X 射线的转换系数为

$$\eta = \frac{L_B^S}{L_X^\infty} = \frac{L_X^\infty}{L_B} \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right)^{-1}, \quad (34)$$

其中 L_X^S 表示没有经过引力红移的磁星表面 X 射线光度, G 是引力常数. 由表 6 可知, 11 颗高 X 射线光度磁星 L_B 的范围:

$$L_B \sim 1.26 \times 10^{32} - 3.84(6) \times 10^{36} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (35)$$

对于每颗磁星来说, 其软 X 射线的转换系数的大小存在一定的差异, 我们利用 (34) 式算出在两种电导率下软 X 射线的转换系数的值, 分别列于表 6 中第 8 和第 10 列中, 发现 12 颗磁星的 η 分布范围为 10^{-2} — 10^{-1} . 从理论上讲, 一旦确定磁星的 η 和 L_B 的值, 通过下式来估计表面有效温度 T_S ,

$$\eta L_B = 4\pi R^2 \sigma_S T_S^4, \quad (36)$$

这里 σ_S 为 Stefan-Boltzmann 常数. 由于引力红移, 观测的磁星表面温度 T_S^∞ 小于表面有效温度 T_S , 两者关系: $T_S^\infty = T_S(1 - r_g/R)^{1/2}$, 其中 $r_g = GM/c^2$ 为史瓦西半径.

对于表 6 中 (第 4 列) 所列的每颗磁星的 T_{BB}^∞ 的值通常取决于两种拟合模型: 1) 幂率 + 黑体; 2) 黑体 + 黑体. 前者模型给出一个黑体温度; 后者模型给出一个较高的温度和一个较低的温度, 较高的温度对应较小的黑体半径 ($R_{BB}^\infty \sim 0.1 - 3 \text{ km}$), 较高的温度对应较大的黑体半径 ($R_{BB}^\infty \leq 10 \text{ km}$)^[8,9,15]. 关于表 6 中的磁星的软 X 射线光子, 较为实际的情况可能是: 一部分源的热辐射来自各向同性加热 (前面已经提及), 一部分则来自各向异性加热. 软 X 射线的光子可能来源于磁斑点

(magnetic spot)^[100]、扭曲的磁层 (twisted magnetosphere)^[101]、相对论的粒子星风以及热塑性流波加热 (thermal plastic wave heating)^[102]，各向异性的 X 射线流对应的黑体半径 R_{BB}^∞ 约为 1 千米至几千米，这比星体半径小，所以拟合的黑体温度要比各向同性的热的磁星要高 ($T_{BB}^\infty \sim 0.3\text{--}1$ keV，见文献 [15])。以 SGR 0418+5729 为例，尽管这颗源是已知的偶极磁场最小的磁星，但是通过磁场和热演化模型研究发现，这颗磁星具有典型的初始偶极磁场 $B_p(0) = 3 \times 10^{14}$ G。这颗源从被发现到现在，其软 X 射线流量从 1.4×10^{-11} erg·cm⁻²·s⁻¹ 降低到 $(1\text{--}3.4) \times 10^{-15}$ erg·cm⁻²·s⁻¹。并且 X 射线宁静状态下的辐射是由一个温度为 $kT \sim 0.3$ keV、半径大约是 0.16 km 的非常小的热斑所主导 [46]。我们没有计算每颗磁星预期的表面温度 T_S^∞ ，因为我们关注的是所有磁星预期的 T_S^∞ 分布范围。利用 (35) 和 (36) 式，得到在各向同性的加热模型下 11 颗磁星的 T_S^∞ 分布范围：

$$\begin{aligned} T_S^\infty &= \left(\frac{\eta}{0.2}\right)^{1/4} \times (2.7 - 6.8) \times 10^6 \text{ K} \\ &= \left(\frac{\eta}{0.2}\right)^{1/4} \times (0.23 - 0.61) \text{ keV}. \end{aligned} \quad (37)$$

这个表面温度的预期范围接近于观测到的磁星表面热温度 T_{BB}^∞ 的范围。综上所述，我们的理论模型不仅解释磁星高值的软 X 射线光度，而且也能解释较高的表面热温度。

5 总结与讨论

磁星的活动性和辐射特征归因于内部可能存在的超强磁场。在 WGW19 的工作基础上 [33]，我们计算了超强磁场下的中子星壳层电导率、由于欧姆衰变内部磁场衰变率和磁场能释放率。我们重新研究了 22 颗具有软 X 射线辐射的磁星的 L_X - L_{rot} 关系，得到了新的拟合公式。我们发现，对于 $L_X < L_{\text{rot}}$ 的磁星，其软 X 射线辐射可能来源于旋转能损率、磁层流或者粒子星风加热；对于 $L_X > L_{\text{rot}}$ 的磁星，内部环向磁场的欧姆衰变可以提供其高光度的软 X 射线辐射并维持较高的表面热温度。

关于磁星初始偶极磁场，我们主要参考了文献 [43]，因为文献 [43] 首次提出了中子星磁热演化模型，这个模型可以成功地解释年轻的中子星 (包括磁星以及高磁场脉冲星在内) X 射线的辐射机制

和冷却机制。

我们还讨论了磁星软 X 射线其他可能的各向异性的起源机制，例如磁斑点、热塑性流波加热等。尽管这些加热机制与欧姆衰变不同，但是这些加热机制都要求磁星内部必须存在超强的环向磁场，各向异性的加热机制要求磁星内部存在更高的磁多极场 (如磁八极场)，并且涉及到复杂的霍尔漂移，这些将成为我们未来关注的焦点。随着对磁星观测手段、观测设备、观测方法的改进，以及理论方面的深入研究，本文模型也会得到进一步的改进，理论结果将更好地符合磁星的软 X 射线辐射和表面热温度的观测。

参考文献

- [1] Goldreich P, Julian W H 1969 *Astrophys. J.* **157** 869
- [2] Goldreich P, Reisenegger A 1992 *Astrophys. J.* **395** 250
- [3] Gao Z F, Wang N, Xu Y, Shan H, Li X D 2015 *Astron. Nachr.* **336** 866
- [4] Gao Z F, Li X D, Wang N, Yuan J P, Wang P, Peng Q H, Du Y J 2016 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **456** 55
- [5] Gao Z F, Shan H, Wang W, Wang N 2017 *Astron. Nachr.* **338** 1066
- [6] Gao Z F, Wang N, Shan H 2017 *Astron. Nachr.* **338** 1060
- [7] Gao Z F, Wang N, Shan H, Li X D, Wang W 2017 *Astrophys. J.* **849** 19
- [8] Mereghetti S, Pons J A, Melatos A 2015 *Space Sci. Rev.* **191** 315
- [9] Kaspi V M, Beloborodov A M 2017 *Annu. Rev. Astron. Astr.* **55** 261
- [10] Gao Z F, Peng Q H, Wang N, Chou C K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 057109
- [11] Gao Z F, Peng Q H, Wang N, Yuan J P 2012 *Astrophys. Space Sci.* **342** 55
- [12] Gao Z F, Wang N, Peng Q H, Li X D, Du Y J 2013 *Mod. Phys. Lett. A* **28** 1350138
- [13] Yuan J P, Manchester R N, Wang N, Zhou X, Liu Z Y, Gao Z F 2010 *Astrophys. J. Lett.* **719** L111
- [14] Olausen S A, Kaspi V M 2014 *Astrophys. J. Suppl. S.* **212** 6
- [15] Gao Z F, Peng Q H, Wang N, Chou C K, Huo W S 2011 *Astrophys. Space Sci.* **336** 427
- [16] Flowers E, Ruderman M A 1977 *Astrophys. J.* **215** 302
- [17] Yan W M, Wang N, Manchester R N, Wen Z G, Yuan J P 2018 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **476** 3677
- [18] Gourgouliatos K N, Cumming A 2014 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **438** 1618
- [19] Gourgouliatos K N, Cumming A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 171101
- [20] Thompson C, Murray N 2001 *Astrophys. J.* **560** 339
- [21] Tiengo A, Esposito P, Mereghetti S, Turolla R, Nobili L, Gastaldello F, Götz D, Israel G, Rea N, Stella L, Zane S, Bignami G 2013 *Nature* **500** 312
- [22] Gao Z F, Wang N, Yuan J P, Jiang L, Song D L, 2011 *Astrophys. Space Sci.* **332** 129
- [23] Urpin V A, Chanmugam G, Sang Y 1994 *Astrophys. J.* **433** 780

- [24] Urpin V A, Muslimov A G 1992 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **256** 261
- [25] Muslimov A, Page D 1996 *Astrophys. J.* **458** 347
- [26] Mitra D, Konar S, Bhattacharya D 1999 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **307** 459
- [27] Geppert U, Urpin V 1994 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **271** 490
- [28] Konar S, Bhattacharya D 1997 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **284** 311
- [29] Geppert U, Page D, Zannias T 2000 *Phys. Rev. D* **61** 123004
- [30] Aguilera D N, Pons J A, Miralles J A 2008 *Astron. Astrophys.* **486** 255
- [31] Beloborodov A M, Li X 2016 *Astrophys. J.* **833** 261
- [32] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago: University of Chicago Press)p 504
- [33] Wang H, Gao Z F, Wang N, Jia H Y, Li X D, Zhi Q J 2019 *Publ. Astron. Soc. Pac.* **131** 054201
- [34] Esposito P, Rea N, Israel G L 2018 arXiv: 1803.057167
- [35] Li X H, Gao Z F, Li X D, Xu Y, Wang P, Wang N, Peng Q H 2016 *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 1650002
- [36] Baym G, Bethe H A, Pethick C J 1971 *Nucl. Phys. A.* **175** 225
- [37] Baym G, Pethick C, Sutherland P 1971 *Astrophys. J.* **170** 299
- [38] Lalazissis G A, König J, Ring P 1997 *Phys. Rev. C.* **55** 540
- [39] Glendenning N K, Moszkowski S A 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 2414
- [40] Geng L, Toki H, Meng J 2005 *Prog. Theor. Phys.* **113** 785
- [41] Singh D, Saxena G 2012 *Int. J. Mod. Phys. E* **21** 1250076
- [42] Demorest P B, Pennucci T, Ransom S M, Roberts M S E, Hessels J W T 2010 *Nature* **467** 1081
- [43] Shapiro S L, Teukolsky S A 1983 *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (New: York: John Wiley & Sons)
- [44] Potekhin A Y, Chabrier G 2013 *Astron. Astrophys.* **550** 16
- [45] Sato T, Bamba A, Nakamura R, Ishida M 2010 *Pub. Astron. Soc. J.* **62** L33
- [46] Viganò D, Rea N, Pons J A, Perna R, Aguilera D N, Miralles J A 2013 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **434** 123
- [47] Torii K, Kinugasa K, Katayama K, Tsunemi H, Yamauchi S 1998 *Astrophys. J.* **503** 843
- [48] Rea N, Israel G L, Pons J A, Turolla R, Viganò D, Zane S, Esposito P, Perna R, Papitto A, Terreran G, Tiengo A, Salvetti D, Girart J M, Palau A, Possenti A, Götz D, Mignani R P, Ratti E, Stella L 2013 *Astrophys. J.* **770** 65
- [49] Lamb R C, Fox D N, Macomb D J, Prince J A 2002 *Astrophys. J.* **574** L29
- [50] Dib R, Kaspi V M 2014 *Astrophys. J.* **784** 37
- [51] Zhu W W, Kaspi V M, Dib R, Woods P M, Gavriil F P, Archibald A M 2008 *Astrophys. J.* **686** 520
- [52] Fahlman G G, Gregory P C 1981 *Nature* **293** 202
- [53] Rea N, Nichelli E, Israel G L, Perna R, Oosterbroek T, Parmar A N, Turolla R, Campana S, Stella L, Zane S, Angelini L 2007 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **381** 293
- [54] An H, Kaspi V M, Archibald R, Cumming A, 2013 *Astrophys. J.* **763** 82
- [55] Muno M P, Clark J S, Crowther P A, Dougherty S M, de Grijs R, Law C, McMillan S L W, Morris M R, Negueruela I, Pooley D, Portegies Z S, Yusef-Zadeh F 2006 *Astrophys. J. Lett.* **636** L41
- [56] Dib R, Kaspi V M, Gavriil F P 2009 *Astrophys. J.* **702** 614
- [57] Tam C R, Gavriil F P, Dib R, Kaspi V M, Woods P M, Bassa C 2008 *Astrophys. J.* **677** 503
- [58] Gaensler B M, McClure-Griffiths N M, Oey M S, Haverkorm M, Dickey J M, Green A J 2005 *Astrophys. J.* **620** L95
- [59] McGarry M B, Gaensler B M, Ransom S M, Kaspi V M, Veljkovic S 2005 *Astrophys. J.* **627** L137
- [60] Vasisht G, Gotthelf E V 1997 *Astrophys. J.* **486** L129
- [61] Camero A, Papitto A, Rea N, Viganò D, Pons J A, Tiengo A, Mereghetti S, Turolla R, Esposito P, Zane S, Israel G L, Götz D 2014 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **438** 3291
- [62] Lin L, Kouveliotou C, Baring M G 2011 *Astrophys. J.* **739** 87
- [63] Anderson G E, Gaensler B M, Slane P O, Rea N, Kaplan D L, Posselt B, Levin L, Johnston S, Murray S, Brogan C L, Bailes M, Bates S, Benjamin R A, Bhat N D R, Burgay M, Burke-Spolaor S, Chakrabarty D, D'Amico N, Drake J J, Esposito P, Grindlay J E, Hong J, Israel G L, Keith M J, Kramer M, Lazio T J W, Lee J C, Mauerhan J C, Milia S, Possenti A, Stappers B, Steeghs D T H 2012 *Astrophys. J.* **751** 53
- [64] Tiengo A, Esposito P, Mereghetti S, Israel G L, Stella L, Turolla R, Zane S, Rea N, Götz D, Feroci M 2009 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **399** L74
- [65] Park S, Hughes J P, Slane P O, Burrows D N, Lee J J, Mori K 2012 *Astrophys. J.* **748** 117
- [66] Mereghetti S, Esposito P, Tiengo A, Zane S, Turolla R, Stella L, Israel G L, Götz D, Feroci M 2006 *Astrophys. J.* **653** 1423
- [67] Vrba F J, Henden A A, Luginbuhl C B, Guetter H H, Hartmann D H, Klose S 2000 *Astrophys. J.* **533** L17
- [68] Tendulkar S P, Cameron P, Brian K, Shrinivas R 2012 *Astrophys. J.* **761** 76
- [69] Woods, Peter M, Kouveliotou C, Finger M H, Göğüş E, Wilson, C A, Patel S K, Hurley K, Swank J H 2007 *Astrophys. J.* **654** 470
- [70] Camilo F, Cognard I, Ransom S M, Halpern J P, Reynolds J, Zimmerman N, Gotthelf E V, Helfand D J, Demorest P, Theureau G, Backer D C 2007 *Astrophys. J.* **663** 497
- [71] Dib R, Kaspi V M, Scholz P, Gavriil F P 2012 *Astrophys. J.* **748** 3
- [72] Bernardini F, Israel G L, Stella L, Turolla R, Esposito P, Rea N, Zane S, Tiengo A, Campana S, Götz D, Mereghetti S, Romano P 2011 *Astron. Astrophys.* **529** A19
- [73] Rea N, Viganò D, Israel G L, Pons J A, Torres D F 2014 *Astrophys. J. Lett.* **781** L17
- [74] Zhou P, Chen Y, Li X D, Safi-Harb S, Mendez M, Terada Y, Sun W, Ge M Y 2014 *Astrophys. J. Lett.* **781** L16
- [75] Halpern J P, Gotthelf E V 2010 *Astrophys. J.* **710** 941
- [76] Esposito P, Burgay M, Possenti A, Turolla R, Zane S, de Luca A, Tiengo A, Israel G, Mattana F, Mereghetti S, Bailes M, Romano P, Götz D, Rea N 2009 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **399** L44
- [77] Corbel S, Chapuis C, Dame T M, Durouchoux P 1999 *Astrophys. J.* **526** L29
- [78] Scholz P, Ng C Y, Livingstone M A, Kaspi V M, Cumming A, Archibald R F 2012 *Astrophys. J.* **761** 66
- [79] Scholz P, Kaspi V M, Cumming A 2014 *Astrophys. J.* **786** 62
- [80] Kargaltsev O, Kouveliotou C, Pavlov G G, Göğüş E, Lin L, Wachter S, Griffith R L, Kaneko Y, Younes G 2012 *Astrophys. J.* **748** 26
- [81] Leahy D A, Tian W W 2008 *Astrophys. J.* **135** 167
- [82] Levin L, Bailes M, Bates S, Bhat N D R, Burgay Marta, Burke-Spolaor S, D'Amico N, Johnston S, Keith M, Kramer M, Milia S, Possenti A, Rea N, Stappers B, van Straten W 2010 *Astrophys. J. Lett.* **721** L33
- [83] Kaspi V M, Archibald R F, Bhalerao V, Dufour F, Gotthelf E V, An H J, Bachetti M, Beloborodov A M, Boggs S E,

- Christensen F E, Craig W W, Grefenstette B W, Hailey C J, Harrison F A, Kennea J A, Kouveliotou C, Madsen K K, Mori K, Markwardt C B, Stern D, Vogel J K, Zhang W W 2014 *Astrophys. J.* **786** 84
- [84] Mori K, Gotthelf E V, Zhang S, An H J, Baganoff F K, Barrière N M, Beloborodov A M, Boggs S E, Christensen F E, Craig W W, Dufour F, Grefenstette B W, Hailey C J, Harrison F A, Hong J, Kaspi V M, Kennea J A, Madsen K K, Markwardt C B, Nynka M, Stern D, Tomsick J A, Zhang W W 2013 *Astrophys. J. Lett.* **770** L23
- [85] Gotthelf E V, Vasisht G, Boylan-Kolchin M, Torii K 2000 *Astrophys. J.* **542** L37
- [86] Tong H, Xu R X 2013 *Res. Astron. Astrophys.* **13** 1207
- [87] Livingstone Margaret A, Ng C Y, Kaspi Victoria A 2011 *Astrophys. J.* **730** 66
- [88] Becker W, Truemper J 1997 *Astron. Astrophys.* **326** 682
- [89] Shibata S, Watanabe E, Yatsu Y, Enoto T, Bamba A 2016 *Astrophys. J.* **833** 14
- [90] Kaplan D L, van Kerkwijk M H 2009 *Astrophys. J.* **705** 798
- [91] Haberl F 2007 *Astrophys. Space Sci.* **308** 181
- [92] Bogdanov S, Ng C Y, Kaspi V M 2014 *Astrophys. J. Lett.* **792** L36
- [93] Coelho J G, Cáceres D L, de Lima R C R, Malheiro M, Rueda J A, Ruffini R 2017 *Astron. Astrophys.* **599** A87
- [94] Gonzalez D, Reisenegger A 2010 *Astron. Astrophys.* **522** A16
- [95] Kothes R, Dougherty S M 2007 *Astron. Astrophys.* **468** 993
- [96] Durant M, van Kerkwijk, Marten H 2006 *Astrophys. J.* **652** 576
- [97] Tiengo A, Esposito P, Mereghetti S 2008 *Astrophys. J.* **680** L133
- [98] Kumar H S, Safi-Harb S 2010 *Astrophys. J. Lett.* **725** L191
- [99] Tian W W, Leahy D A 2008 *Astrophys. J.* **677** 292
- [100] Gourgouliatos K N, Hollerbach R 2018 *Astrophys. J.* **852** 21
- [101] Beloborodov A M 2011 *High-Energy Emission from Pulsars and their Systems, Astrophysics and Space Science Proceedings* (Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg) p299
- [102] Beloborodov A M, Levin Y 2014 *Astrophys. J. Lett.* **794** L24

Conductivity of neutron star crust under superhigh magnetic fields and Ohmic decay of toroidal magnetic field of magnetar^{*}

Chen Jian-Ling^{1)†} Wang Hui²⁾ Jia Huan-Yu²⁾ Ma Zi-Wei¹⁾
Li Yong-Hong¹⁾ Tan Jun³⁾

1) (*Department of Physics and Electronic Engineering, Yuncheng University, Yuncheng 044000, China*)

2) (*School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

3) (*Maths and Information Technology School, Yuncheng University, Yuncheng 044000, China*)

(Received 19 May 2019; revised manuscript received 12 July 2019)

Abstract

Magnetar is a kind of pulsar powered by magnetic field energy. Part of the X-ray luminosities of magnetars in quiescence have a thermal origin and can be fitted by a blackbody spectrum with temperature $kT \sim 0.2\text{--}0.6$ keV, much higher than the typical values for rotation-powered pulsars. The observation and theoretical study of magnetar are one of hot topics in the field of pulsar research. The activity and emission characteristics of magnetar can be attributed to internal superhigh magnetic field. According to the work of WGW19 and combining with the equation of state, we first calculate the electric conductivity of the crust under a strong magnetic field, and then calculate the toroidal magnetic field decay rate and magnetic energy decay rate by using an eigenvalue equation of toroidal magnetic field decay and considering the effect of general relativity. We reinvestigate the L_X - L_{rot} relationship of 22 magnetars with persistent soft X-ray luminosities and obtain two new fitting formulas on L_X - L_{rot} . We find that for the magnetars with $L_X < L_{\text{rot}}$, the soft X-ray radiations may originate from their rotational energy loss rate, or from magneto-sphere flow and particle wind heating. For the magnetars with $L_X > L_{\text{rot}}$, the Ohmic decay of crustal toroidal magnetic fields can provide their observed isotropic soft X-ray radiation and maintain higher thermal temperature.

As for the initial dipole magnetic fields of magnetars, we mainly refer to the research by Viganò et al. (Viganò D, Rea N, Pons J A, Perna R, Aguilera D N, Miralles J A 2013 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **434** 123), because they first proposed the up-dated neutron star magneto-thermal evolution model, which can successfully explain the X-ray radiation and cooling mechanism of young pulsars including magnetars and high-magnetic field pulsars. Objectively speaking, as to the decay of toroidal magnetic fields, there are some differences between our theoretical calculations of magnetic energy release rates and the actual situation of magnetic field decay in magnetars, this is because the estimate of initial dipolar magnetic field, true age and the thickness of inner crust of a magnetar are somewhat uncertain. In addition, due to the interstellar-medium's absorptions to soft X-ray and the uncertainties of distance estimations, the observed soft X-ray luminosities of magnetars have certain deviations. With the continuous improvement of observation, equipment and methods, as well as the in-depth development of theoretical research, our model will be further improved, and the theoretical results are better accordant with the high-energy observation of magnetars.

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. U1631106, U1431125, 11573059, 11847307, U1831102), the Scientific and Technological Innovation Programs of Higher Education Institutions in Shanxi, China (Grant No. 2019L0863), and the Scientific Research Project of Yuncheng University, China (Grant No. YQ-2014013).

[†] Corresponding author. E-mail: chenjianling62@163.com

We also discuss other possible anisotropy origins of soft X-ray fluxes of magnetars, such as the formation of magnetic spots and thermoplastic flow wave heating in the polar cap. Although anisotropic heating mechanisms are different from Ohmic decay, all of them require that there exist strong toroidal magnetic fields inside a magnetar. However, the anisotropic heating mechanisms require higher toroidal multipole fields inside a magnetar (such as magnetic octupole field) and are related to complex Hall drift: these may be our research subjects in the future.

Keywords: superhigh magnetic field, magnetar, Ohmic decay, luminosity

PACS: 05.70.Ce, 13.40.Hq, 72.15.-v, 97.60.Jd

DOI: [10.7498/aps.68.20190760](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190760)