

碟形玻色-爱因斯坦凝聚体中(0, 0, 2)剪刀模的朗道阻尼和频移

赵军亚 李晨旭 马晓栋

Landau damping and frequency-shift of (0, 0, 2) scissors mode in a disc-shaped Bose-Einstein condensate

Zhao Jun-Ya Li Chen-Xu Ma Xiao-Dong

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 230304 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190661

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190661>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自旋-轨道耦合作用下玻色-爱因斯坦凝聚在量子相变附近的朗道临界速度

Landau critical velocity of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate across quantum phase transition

物理学报. 2017, 66(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.220301>

光腔中两组分玻色-爱因斯坦凝聚体的受激辐射特性和量子相变

Stimulated radiation characteristics and quantum phase transition for two-component Bose-Einstein condensate in optical cavity

物理学报. 2018, 67(18): 183701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180971>

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

# 碟形玻色-爱因斯坦凝聚体中 $(0, 0, 2)$ 剪刀模的朗道阻尼和频移\*

赵军亚<sup>1)</sup> 李晨旭<sup>2)</sup> 马晓栋<sup>1)†</sup>

1) (新疆师范大学物理与电子工程学院, 乌鲁木齐 830054)

2) (新疆医科大学医学工程技术学院, 乌鲁木齐 830011)

(2019年5月3日收到; 2019年9月21日收到修改稿)

应用哈特里-福克-博戈留波夫平均场理论近似和基于托马斯-费米近似的解析方法, 研究碟形玻色-爱因斯坦凝聚体中  $(0, 0, 2)$  剪刀模的朗道阻尼和频移, 计算阻尼系数和频移大小以及它们的温度依赖. 计算中, 在集体激发本征频移微扰关系中考虑元激发弛豫及其弛豫之间的正交关系以获得阻尼和频移的计算公式, 把凝聚体基态波函数取为高斯分布函数的一级近似以消除托马斯-费米近似中三模耦合矩阵元的发散. 采用与相关实验研究相同的粒子数、囚禁频率和各向异性参量, 理论计算结果与相关实验测量结果相符合. 由于理论的复杂性和计算的困难性, 在大多数基于平均场理论的单分量和两分量玻色-爱因斯坦凝聚集体激发阻尼和频移的研究中采用半经典近似, 把准粒子激发能谱看成是连续的来积分计算各个准粒子跃迁对阻尼和频移的贡献, 而本文和本文前期工作按分立的准粒子激发频谱计算阻尼或频移, 并在研究过程中提出了考虑元激发弛豫及弛豫之间正交关系的改进方法, 希望这种方法对今后的工作有一定参考价值.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚, 朗道阻尼和频移, 哈特里-福克-博戈留波夫近似, 托马斯-费米近似

**PACS:** 03.75.Kk, 05.30.Jp, 67.85.De

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190661

## 1 引言

玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein-condensation, BEC) 的集体激发作为一个基本问题对于多体问题的研究显然是至关重要的. 元激发是统计与凝聚态物理学的基本研究内容之一, 集体激发的研究是捕陷玻色凝聚气体的实验和理论研究活动的主要兴趣领域之一<sup>[1–23]</sup>. 研究集体激发对于了解凝聚体的基态、热力学性质及其超流特性都有十分重要的意义, 阻尼和频移是 BEC 中集体激发的主要特征, 其中有四个实验<sup>[24–27]</sup>对 BEC 系统中激发模阻尼和频移有完整的温度依赖测量. 粒子间相

互作用导致集体激发振幅的衰减 (阻尼) 和频率的改变 (频移). 阻尼和频移的机制有朗道 (Landau) 和巴利耶夫 (Beliaev) 两种, 朗道机制是一个准粒子激发吸收一个集体激发变为另一个准粒子激发, 巴利耶夫机制是一个集体激发变为两个准粒子激发. 其中巴利耶夫机制在能级分立的系统中对低能量集体激发阻尼和频移的贡献很小.

对于 BEC 动力学的研究方法主要有高温高密度下的二流体理论方法<sup>[28–31]</sup>和低温低密度下的平均场理论方法<sup>[32–48]</sup>. 其中大多数实验研究的是低温低密度系统.

平均场理论框架下理论工作具体的探究方法也不尽相同, 有文献<sup>[32–35]</sup>的微扰理论、文献<sup>[36,37]</sup>

\* 国家自然科学基金 (批准号: 100864006, 11264039)、新疆维吾尔自治区高校科研计划重点项目 (批准号: XJEDU20141029)、新疆师范大学“物理学”特色专业 and 新疆师范大学“物理学”重点学科资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [xdma07@aliyun.com](mailto:xdma07@aliyun.com)

的格林函数方法、文献 [38] 的二阶量子场理论和文献 [39–44] 的哈特里-福克-博戈留波夫 (Hartree-Fock-Bogoliubov, HFB) 理论. 文献 [34–40] 都聚焦于对实验 [27] 中集体模阻尼和频移温度依赖的理论解释. 这些工作都有一个共同点, 在求和计算各个准粒子跃迁对集体激发阻尼和频移的贡献时, 都采用了半经典近似, 即把准粒子激发能谱看成是连续的而进行积分运算. 与文献 [34–40] 不同, 文献 [32,33,41–44] 按分立的准粒子激发频谱来求和计算朗道阻尼或频移. 其中文献 [41–44] 是本文的前期工作, 文献 [41] 应用的方法与文献 [32] 相同, 而文献 [42–44] 则在文献 [32,33] 方法的基础上进行了发展和改进.

文献 [32] 在文献 [34] 的频率微扰理论公式中考虑元激发的弛豫而引入洛伦兹宽度  $\Delta$ , 得到计算集体激发朗道阻尼的公式

$$\gamma = \sum_{ij} \gamma_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\Delta/2}{(\omega_0 + \omega_i - \omega_j)^2 + (\Delta/2)^2}.$$

文献 [32] 计算阻尼的公式中含有洛伦兹宽度, 应用公式计算时, 不考虑阻尼强度大的准粒子共振跃迁、只考虑一部分阻尼强度小的准粒子背景跃迁对阻尼的贡献, 在阻尼  $\gamma$  随洛伦兹宽度  $\Delta$  的缓变范围内取阻尼的计算值. 由于在某些系统中不出现阻尼随洛伦兹宽度缓变的情况, 文献 [33] 把文献 [32] 阻尼公式中的洛伦兹半宽认定为集体激发的阻尼

$$\Delta/2 = \sum_{ij} \gamma_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\Delta/2}{(\omega_0 + \omega_i - \omega_j)^2 + (\Delta/2)^2}$$

用迭代的方法计算朗道阻尼. 文献 [32,33] 有一个共同点, 它们在考虑元激发的实际弛豫时, 把三个元激发 (朗道机制中相互耦合的一个集体激发和两个准粒子激发) 的弛豫简单地加在一起, 把  $\Delta/2$  看作是加在一起的结果. 另外, 阻尼和频移是相伴的物理现象, 但文献 [32] 只计算了阻尼, 而文献 [33] 虽然阻尼和频移都计算了, 但在其计算中对阻尼和频移的物理考虑有比较大的差别.

与文献 [33] 相同, 文献 [42–44] 也把洛伦兹半宽认定为集体激发的阻尼, 也用迭代的方法计算阻尼. 但与文献 [32,33] 不同, 文献 [42–44] 在考虑三个元激发的弛豫时, 还考虑了三个元激发弛豫的正交关系, 理由是三个元激发的本征函数是正交的.

应用文献 [42–44] 提出的考虑元激发弛豫及其各弛豫间正交关系的方法, 不仅给出了阻尼的计算公式, 而且同时给出了频移的计算公式, 先用迭代的方法计算出阻尼, 再根据阻尼的计算结果计算频移, 分别得到了与实验相符或与相近实验对比合理的理论计算结果. 这些问题将在 2.3 节详细说明.

总体上看, BEC 中集体激发阻尼和频移的理论研究开展不足. 如前所述文献 [34–40] 采用处理连续本征值元激发谱的半经典近似方法, 与实验 [24–27] 中本征值分立的轴对称系统有很大的差别. 迄今为止, 只有几个关于两分量玻色-爱因斯坦凝聚 (two-component Bose-Einstein condensations, 2BECs) 集体激发阻尼和频移的理论研究 [45–48], 它们都是采用 HFB 平均场理论, 也都采用了半经典近似. 由于问题的复杂性, 计算球对称和轴对称系统中集体激发的阻尼和频移, 首先要计算大量分立的元激发本征函数和本征值, 数值模拟工作相当困难, 目前只有文献 [32] 这一个数值模拟工作, 而且研究的是较为简单的球对称系统. 这是理论工作开展不足的一个原因, 但这不是主要原因. 其主要原因是文献 [32–41,45–48] 在考虑元激发的弛豫时, 把三个元激发的弛豫简单地相加在一起, 这是值得商榷的. 因为如前所述三个元激发的本征函数是正交的, 例如在 HFB 平均场理论中, 元激发本征函数和本征频率是通过对角化系统巨正则哈密顿得到的.

需要说明一点, 文献 [41–44] 是解析研究工作, 在阻尼或频移的计算中, 分别应用了文献 [22,23] 的球对称和轴对称 BEC 元激发分立的本征函数和本征函数解析解, 而这种解析方法是在 HFB 平均场理论 [39,40] 框架下, 忽略正常和反常准粒子平衡密度, 并通过改进托马斯-费米近似 (Thomas-Fermi approximation, TFA) 得到的. 这个问题将在 2.4 节详细说明.

本文研究蝶形 BEC 中剪刀模的朗道阻尼和频移, 计算中采用文献 [27] 实验的系统参量, 理论计算结果与实验的测量数据相对比, 进一步检验文献 [42–44] 提出的考虑元激发弛豫及其正交关系的方法, 并进行更详细的说明, 希望这种方法能够得到推广和发展, 对研究 BEC 和 2BECs 中集体激发阻尼和频移的工作开展有一定的参考价值.

## 2 关于 BEC 中集体激发朗道阻尼和频移的 HFB 平均场理论

采用基于 HFB 平均场理论的博戈留波夫-德热纳 (Bogoliubov-de Gennes, BdG) 方程组本征函数集 [22,23] 和集体激发本征频率微扰关系 [39,40], 分别在 2.1 节和 2.2 节简要介绍.

采用文献 [42–44] 在集体激发本征频率微扰关系中考虑元激发弛豫及弛豫间正交关系而获得的阻尼和频移计算公式, 在 2.3 节详细讨论.

采用文献 [42–44] 在凝聚体基态波函数引入参量  $q = 1$  以消除 TFA 三模耦合矩阵元发散的方法, 在 2.4 节详细讨论.

### 2.1 BdG 方程的本征函数集

稀薄囚禁 BEC 原子气体在轴对称外势阱  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = m\omega_{\text{ho}}^2 r^2/2$  ( $r^2 = s^2 + \lambda^2 z^2$ ,  $s^2 = x^2 + y^2$ ,  $m$  是原子质量,  $\omega_{\text{ho}}$  是横向谐振频率,  $\lambda$  是各向异性参量, 即纵向横向谐振频率之比  $\lambda = \omega_z/\omega_{\text{ho}}$ ) 中的巨正则哈密顿量为

$$K = H - \mu N = \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) H_0 \psi(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \int d\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

其中  $H_0 = -\hbar^2 \nabla^2 / (2m) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu$ ,  $\mu$  是系统化学势、耦合常数  $g = 4\pi\hbar^2 a_{\text{sc}}/m$ ,  $a_{\text{sc}}$  是 s 波散射长度. 玻色场算符  $\psi(\mathbf{r}, t)$  的运动方程为

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_0 \psi(\mathbf{r}, t) + g \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

玻色场算符  $\psi$  可分解为凝聚部分  $\phi = \langle \psi \rangle$  和非凝聚部分  $\tilde{\psi}$ , 即  $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) + \tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$ , 凝聚部分又分解为静态部分  $\phi_0 = \langle \psi \rangle_0$  和激发态部分  $\delta\phi$ , 即  $\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r}, t)$ , 非凝聚部分的正常、反常热粒子密度  $\tilde{n} = \langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \rangle$ ,  $\tilde{m} = \langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle$  也分别分为静态部分  $\tilde{n}^0 = \langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \rangle_0$ ,  $\tilde{m}^0 = \langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle_0$  和激发部分  $\delta\tilde{n}$ ,  $\delta\tilde{m}$ , 即  $\tilde{n}(\mathbf{r}, t) = \tilde{n}^0(\mathbf{r}) + \delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\tilde{m}(\mathbf{r}, t) = \tilde{m}^0(\mathbf{r}) + \delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t)$ , 其中  $\langle \dots \rangle$  和  $\langle \dots \rangle_0$  分别代表非平衡平均和平衡平均.

采用近似: 1)  $\langle \tilde{\psi} \rangle = 0$ ; 2)  $\tilde{n}^0 = 0$ ,  $\tilde{m}^0 = 0$ ; 3)  $\langle \tilde{\psi} \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \tilde{\psi} \rangle = 0$ ; 4)  $\tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} \tilde{\psi} = 4\tilde{n} \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi} + \tilde{m} \tilde{\psi}^\dagger \tilde{\psi}^\dagger + \tilde{m}^* \tilde{\psi} \tilde{\psi}$ .

利用上述分解和近似, 可以得到凝聚部分波函数满足的方程

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = H_0 \phi(\mathbf{r}, t) + g |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \phi(\mathbf{r}, t) + 2g \phi(\mathbf{r}, t) \delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t) + g \phi^*(\mathbf{r}, t) \delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

忽略 (3) 式中的  $\delta\tilde{n}$  和  $\delta\tilde{m}$  可以得到凝聚静态部分基态波函数满足的格罗斯-皮塔耶夫斯基 (Gross-Pitaevskii, GP) 方程

$$[H_0 + g n_0(\mathbf{r})] \phi_0(\mathbf{r}) = 0, \quad (4)$$

其中  $n_0 = \phi_0^2$  为凝聚体密度.

采用博戈留波夫变换

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left[ u_k(\mathbf{r}) \alpha_k^\dagger(t) + v_k^*(\mathbf{r}) \alpha_k(t) \right],$$

( $\int d\mathbf{r} [u_k^*(\mathbf{r}) u_{k'}(\mathbf{r}) - v_k(\mathbf{r}) v_{k'}^*(\mathbf{r})] = \delta_{kk'}$  为其归一化条件, 而玻色算符  $\alpha_k$  满足  $[\alpha_k^\dagger, \alpha_{k'}] = \delta_{kk'}$ ), 并对角化哈密顿量 (1), 得到非凝聚激发部分准粒子本征函数集满足的 BdG 方程组

$$\begin{aligned} \mathcal{L} u_j(\mathbf{r}) + g n_0 v_j(\mathbf{r}) &= \epsilon_j u_j(\mathbf{r}), \\ \mathcal{L} v_j(\mathbf{r}) + g n_0 u_j(\mathbf{r}) &= -\epsilon_j v_j(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中算子  $\mathcal{L} = H_0 + 2g n_0$ .

由 (3) 式还可得到描述凝聚激发部分的运动方程

$$i\hbar \frac{\partial \delta\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [H_0 + 2g n_0] \delta\phi(\mathbf{r}, t) + g n_0 \delta\phi^*(\mathbf{r}, t) + 2g \phi_0 \delta\tilde{n}(\mathbf{r}, t) + g \phi_0^* \delta\tilde{m}(\mathbf{r}, t), \quad (6)$$

略去 (6) 式中  $\delta\tilde{n}$  和  $\delta\tilde{m}$ , 容易看出凝聚体中的集体激发  $\delta\phi(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}) \exp(-i\epsilon_0 t/\hbar)$  和  $\delta\phi^*(\mathbf{r}, t) = v_0(\mathbf{r}) \exp(-i\epsilon_0 t/\hbar)$  也决定于 BdG 方程, 即  $u_0(\mathbf{r})$ ,  $v_0(\mathbf{r})$  和  $\epsilon_0$  满足于 (5) 式.

通过无量纲化  $\bar{r} = r/R_0$ ,  $\bar{\nabla} = R_0 \nabla$  ( $R_0 = \sqrt{2\mu/m\omega_{\text{ho}}^2}$  是凝聚体特征半径) 并引入  $\zeta = \hbar\omega_{\text{ho}}/(2\mu)$ , (4) 式变为无量纲形式

$$\zeta^2 \sigma(\bar{\mathbf{r}}) + \bar{r}^2 - 1 + |\phi_0(\bar{\mathbf{r}})/\phi_0(0)|^2 = 0, \quad (7)$$

其中  $\sigma(\bar{\mathbf{r}}) = -[\bar{\nabla}^2 \phi_0(\bar{\mathbf{r}})]/\phi_0(0)$  是一个正比于凝聚静态部分动能的量. 通过无量纲化元激发频率  $\bar{\omega} = \omega/\omega_{\text{ho}}$  ( $\omega = \epsilon/\hbar$ ) 并定义  $\phi_j^\pm = u_j \pm v_j$ , (5) 式变为无量纲形式

$$\begin{aligned}
 & -\bar{\nabla}^2(1-\bar{r}^2)\phi_j^+ - (1-\bar{r}^2)\sigma\phi_j^+ \\
 & + \frac{\zeta^2}{2}[\bar{\nabla}^4 + 3\bar{\nabla}^2\sigma + \sigma\bar{\nabla}^2 + 3\sigma^2]\phi_j^+ = 2\bar{\omega}_j^2\phi_j^+, \\
 & - (1-\bar{r}^2)\bar{\nabla}^2\phi_j^- - (1-\bar{r}^2)\sigma\phi_j^- \\
 & + \frac{\zeta^2}{2}[\bar{\nabla}^4 + \bar{\nabla}^2\sigma + 3\sigma\bar{\nabla}^2 + 3\sigma^2]\phi_j^- = 2\bar{\omega}_j^2\phi_j^-. \quad (8)
 \end{aligned}$$

(7)式改进的托马斯-费米近似 (beyond Thomas-Fermi-approximation, bTFA) 解为

$$\phi_0(\bar{\mathbf{r}}) = \phi_0(0)(1-\bar{s}^2-\lambda^2\bar{z}^2)^{(q+1)/2}, \quad (9)$$

其中  $\bar{s} = s/R_0$ ,  $\bar{z} = z/R_0$ ,  $\phi_0(0) = \lambda [N_0/(2\pi R_0^3 \times B(3/2, 2+q))]^{1/2}$  是归一化常数, 而  $B(3/2, 2+q)$  是贝塔函数,  $N_0 = R_0^3 \int d\bar{\mathbf{r}} |\Phi_0(\bar{\mathbf{r}})|^2$  是凝聚体粒子数, 化学势  $\mu = \hbar\omega_{\text{ho}} [4\lambda P/B(3/2, 2+q)]^{2/5}/2$ , 而  $P = N_0 a_{\text{sc}}/a_{\text{ho}}$  是原子相互作用强度且  $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\text{ho}}}$  是线性谐振子的特征半径.

(8)式元激发本征函数的 bTFA 解为

$$\begin{aligned}
 \phi_{n_z n_s m}^{\pm}(\bar{\mathbf{r}}) &= \frac{(\zeta \bar{\omega}_{n_z n_s m})^{\pm 1/2}}{\sqrt{2\pi R_0^3 I_{n_z n_s m}}} (1-\bar{s}^2-\lambda^2\bar{z}^2)^{(q\mp 1)/2} \\
 &\times \bar{s}^m P_{n_p}^{(2n_s)}(\bar{s}, \bar{z}) e^{im\varphi}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中  $\bar{\omega}_{n_z n_s m}$  是本征值,  $I_{n_z n_s m}$  是归一化系数,  $n_p = 0, 1, 2, \dots$  是主量子数,  $n_s = 0, 1, 2, \dots, \text{int}[n_p/2]$  是径向量子数,  $n_z = n_p - 2n_s$  是轴向量子数,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  是方位角量子数. 径向和轴向耦合函数  $P_{n_p}^{(2n_s)}$  满足一个二维微分方程, 解的形式为

$P_{n_p}^{(2n_s)}(\bar{s}, \bar{z}) = \sum_{k=0}^{n_p} \sum_{n_s=0}^{\text{int}[k/2]} b_{k, n_s} \bar{z}^{k-2n_s} \bar{s}^{2n_s}$ . 元激发的本征值  $\bar{\omega}_{n_z n_s m}$  由如下封闭方程决定:

$$\begin{aligned}
 -1 &= \frac{g_0}{1 + \frac{g_1}{1 + \frac{g_2}{1 + \dots}}} \\
 &\quad \vdots \\
 &1 + \frac{gZ-2}{1+0}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 g_{n_s} &= \frac{-4\lambda^2(n_s+1)(n_s+|m|+1)(n_p-2n_s-1)(n_p-2n_s)}{2\gamma-2|m|(1+q)-4n_s(n_s+|m|+1+q)-\lambda^2(n_p-2n_s)(n_p-2n_s+1+2q)} \\
 &\times [2\gamma-2|m|(1+q)-4(n_s+1)(n_s+|m|+2+q) \\
 &- \lambda^2(n_p-2n_s-2)(n_p-2n_s-1+2q)]^{-1}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

而  $Z = 1 + \text{int}[n_p/2]$  且  $\gamma = \bar{\omega}_{n_z n_s m}^2$ . 系数  $b_{k, n_s}$  由如下递推关系决定

$$\begin{aligned}
 &4(n_s+1)(n_s+|m|+1)b_{k+2, n_s+1} + (k-2n+2)(k-2n_s+1)b_{k+2, n_s} \\
 &= 4\lambda^2(n_s+1)(n_s+|m|+1)b_{k, n_s+1} - t[2\gamma-2|m|(1+q)-4n_s(n_s+|m|+1+q) \\
 &- \lambda^2(k-2n_s)(k-2n_s+1+2q)]b_{k, n_s} + (k-2n_s+2)(k-2n_s+1)b_{k, n_s-1}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

以上各式中的  $q$  是为了消除 TFA 三模耦合矩阵元的发散而引入的参量, 将在 2.4 节说明.

## 2.2 集体模本征频率微扰关系及其阻尼强度和三模耦合矩阵元表达式

通过博戈留波夫变换还可以得到反映  $\delta\tilde{n}$  和  $\delta\tilde{m}$  随时间的演化方程

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial f_{ij}(t)}{\partial t} &= \langle [\alpha_i^\dagger \alpha_j, K] \rangle, \\
 i\hbar \frac{\partial g_{ij}(t)}{\partial t} &= \langle [\alpha_i \alpha_j, K] \rangle, \quad (14)
 \end{aligned}$$

其中  $f_{ij} = \langle \alpha_i^\dagger \alpha_j \rangle - f_i^0 \delta_{ij}$  和  $g_{ij} = \langle \alpha_i \alpha_j \rangle$  分别是正常和反常准粒子分布函数而  $f_j^0 = \langle \alpha_j^\dagger \alpha_j \rangle_0 =$

$1/[\exp(2\zeta\bar{\omega}_j/\bar{T}) - 1]$  是准粒子平衡占有数,  $\bar{T} = k_B T/\mu$  是无量纲温度,  $k_B$  是玻尔兹曼常数.

凝聚体中的集体模, 设其频率为  $\bar{\omega}_0$ . 对 (6) 式和 (14) 式进行傅里叶变换可以得到朗道机制的集体模本征频率微扰关系

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}, \quad (15)$$

其中

$$\bar{\gamma}_{ij} = 4\pi(4\pi a_{\text{sc}}/a_{\text{ho}})^2 |\bar{A}_{ij}|^2 (f_i^0 - f_j^0), \quad (16)$$

是以  $\omega_{\text{ho}}^2$  为标度的无量纲阻尼强度, 而

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij} &= a_{ho}^3 \int d\mathbf{r} \phi_0 [u_0 (u_i u_j^* + v_i v_j^* + v_i u_j^*) \\ &\quad + v_0 (u_i u_j^* + v_i v_j^* + u_i v_j^*)] \\ &= \frac{[4P/B(3/2, 2+q)]^{1/10}}{8\pi\lambda^{9/10} [I_0 I_i I_j \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j]^{1/2}} \left(\frac{N_0}{P}\right)^{1/2} \\ &\quad \times \int_0^1 dx \int_0^1 dy W_0 W_i W_j^* F(x, y), \end{aligned} \quad (17)$$

是以  $1/a_{ho}^3$  为标度的无量纲三模耦合矩阵元. 在此定义

$$x = \bar{s}^2, \quad y = \lambda \bar{z} / \sqrt{1-x}, \quad W_j = \bar{s}^m P_{n_p}^{(2n_s)}(\bar{s}, \bar{z}),$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 3\xi^2 \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j (1-x)^{2q-1/2} (1-y^2)^{2q-1} \\ &\quad + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)(1-x)^{2q+3/2} (1-y^2)^{2q+1}. \end{aligned}$$

### 2.3 集体激发朗道阻尼和频移的计算公式

本节介绍本文前期工作<sup>[42-44]</sup>提出的考虑元激发弛豫及其正交关系的方法, 并进行更为详细的说明.

在文献<sup>[32-48]</sup>中, 都有集体激发频率扰动公式

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \Delta\bar{\omega} - i\bar{\gamma}_0, \quad (18)$$

其中  $\bar{\omega}_0$  和  $\bar{\omega}$  分别是与外界驱动共振的集体激发频率和外驱撤销后扰动的集体激发频率, 而  $\Delta\bar{\omega}$  和  $\bar{\gamma}_0$  分别是集体激发的频移和阻尼系数. 这个公式是唯象的, 当不考虑阻尼时,  $\bar{\omega} - \bar{\omega}_0$  正好等于频移  $\Delta\bar{\omega}$ , 而当不考虑频移时,  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 - i\bar{\gamma}_0$ , 这样集体激发随时间变化的部分  $e^{-i\bar{\omega}t} = e^{-\bar{\gamma}_0 t} e^{-i\bar{\omega}_0 t}$ , 从中可以看出  $\bar{\gamma}_0$  是阻尼系数, 也就是说虽然与阻尼和频移有关的两项都一起写在 (18) 式中, 但是在实际理解和应用阻尼 (频移) 时, 需要令频移 (阻尼) 为零.

以下依次考虑三个元激发的弛豫. 在计算集体激发的阻尼和频移时, 朗道机制的正向和反向跃迁都需要考虑, 所谓元激发的弛豫就是指元激发的衰减或增益, 在正 (反) 向跃迁中, 集体激发  $\bar{\omega}_0$  和准粒子激发  $\bar{\omega}_i$  是衰减 (增益) 的, 准粒子  $\bar{\omega}_j$  是增益 (衰减) 的, 而增益和衰减分别对应于元激发振幅随时间变化因子  $e^{\pm\bar{\gamma}t}$  中的正负号.

第一步根据上述唯象公式 (18) 式考虑集体激发  $\bar{\omega}_0$  的弛豫, 考虑弛豫时不考虑频移, 把 (18) 式改写为  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 \pm i\bar{\gamma}_0$  替换 (15) 式右边的  $\bar{\omega}_0$ ,

(15) 式变为

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \bar{\omega}_0 + \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2} \\ &\quad \pm i \left[ \bar{\gamma}_0 - \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}_0}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

此时如果考虑频移, 则不考虑弛豫, 所以可以令 (19) 式的虚部为零得到

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}_0}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2}, \quad (20)$$

同时得到

$$\Delta\bar{\omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_0^2}. \quad (21)$$

第二步考虑准粒子  $\bar{\omega}_i$  的弛豫, 将 (20) 和 (21) 式中的  $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$  替换为  $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_i^2] / \bar{\gamma}_i$ , 其中  $\bar{\gamma}_i$  是准粒子  $\bar{\omega}_i$  的朗道阻尼系数, 分别得到

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}_0}{\frac{[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_i^2]^2}{\bar{\gamma}_i^2} + \bar{\gamma}_0^2} \quad (22)$$

和

$$\begin{aligned} \bar{\omega} - \bar{\omega}_0 &= \\ &\sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\frac{(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_i^2}{\bar{\gamma}_i} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{|\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j|}}{\frac{[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_i^2]^2}{\bar{\gamma}_i^2} + \bar{\gamma}_0^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

第三步考虑准粒子  $\bar{\omega}_j$  的弛豫, 将 (22) 式和 (23) 式中的  $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$  替换为  $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2] / \bar{\gamma}_j$ , 其中  $\bar{\gamma}_j$  是准粒子  $\bar{\omega}_j$  的朗道阻尼系数, 最终得到计算集体激发朗道阻尼系数的公式

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_0 &= \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \\ &\quad \times \frac{\bar{\gamma}_0}{\frac{\left\{ [(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2]^2 + \bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i^2 \right\}^2}{\bar{\gamma}_j^4 \bar{\gamma}_i^2} + \bar{\gamma}_0^2}, \end{aligned} \quad (24)$$

以及计算集体模频移的公式

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\left[ (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2 \right]^2 + \bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i^2 \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{\bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i} \frac{1}{\left| \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \right|} \frac{\left\{ \left[ (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}_j^2 \right]^2 + \bar{\gamma}_j^2 \bar{\gamma}_i^2 \right\}^2}{\bar{\gamma}_j^4 \bar{\gamma}_i^2} + \bar{\gamma}_0^2. \quad (25)$$

第二步和第三步在考虑准粒子的弛豫时, 用  $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma}$  替换  $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$ , 既考虑了准粒子的弛豫, 也考虑了各元激发弛豫之间的正交关系, 而不是把三个元激发的弛豫简单地直接加在一起的, 这是因为各元激发的本征函数是正交的.

考虑元激发的弛豫, 弛豫使元激发能级产生宽度, 从而使跃迁的失谐增大. 把  $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$  替换为  $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma}$ , 相当于修改失谐, 修改后的失谐比原来的失谐大, 跃迁对阻尼和频移的贡献减小.

如果  $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \ll \bar{\gamma}$ ,  $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma} \rightarrow \bar{\gamma}$ , 尽管跃迁的失谐很小, 但由于修改, 失谐接近于弛豫; 如果  $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j = \bar{\gamma}$ ,  $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma} = 2\bar{\gamma}$ , 修改后的失谐恰好是原来失谐的 2 倍; 如果  $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \gg \bar{\gamma}$ ,  $[(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \bar{\gamma}^2]/\bar{\gamma} \gg \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$ , 失谐修改后极大, 跃迁对阻尼贡献极小.

每考虑一个元激发的弛豫, 都使失谐增大、阻尼和频移减小, 考虑三个元激发的弛豫, 最终结果使失谐更大、阻尼和频移更小.

阻尼和频移的计算公式都是在集体激发的本征频率微扰关系 (15) 式中考虑元激发的弛豫及弛豫之间正交关系得到的, 而 (15) 式实际上就是不考虑任何元激发弛豫的频移公式. 在文献 [42–44] 的研究中发现这样一个规律, 即如果直接用 (15) 式计算集体激发的频移, 理论结果比实验结果大约大三个数量级, 如果依次用考虑一个、两个、三个元激发弛豫及其正交关系的频移公式 (21) 式、(23) 式、(25) 式计算, 理论结果依次大约减小一个数量级, 最后理论结果与实验结果相符. 阻尼的计算结果与上述考虑弛豫及其弛豫之间正交关系的依赖规律相类似.

文献 [42,43] 分别研究雪茄形 BEC 中单极子模和蝶形 BEC 中四极子模的朗道阻尼和频移, 分别采用文献 [26] 和文献 [27] 实验的系统参量, 理论计算结果分别与文献 [26] 和文献 [27] 实验的测

量数据相符.

文献 [32] 和文献 [44] 研究的是系统参量完全相同的球对称 BEC, 都计算了单极子的朗道阻尼. 文献 [44] 考虑了所有贡献大的准粒子跃迁, 计算结果比轴对称系统的实验结果 [24–27] 小而合理, 这是因为球对称系统的能级比轴对称的稀疏, 失谐小的准粒子跃迁比较少. 而文献 [32] 如前所述只考虑一部分准粒子跃迁, 计算结果却比轴对称系统的实验结果大, 这是因为文献 [32] 在考虑元激发的弛豫时, 直接把三个元激发弛豫简单地加了起来而没有考虑弛豫之间的正交关系.

## 2.4 $q$ 值的确定

囚禁势中 BEC 基态波函数一般应该取高斯分布函数 (谐振子基态波函数) 形式  $\phi_0 \sim e^{-\bar{r}^2}$ , 但它代入 BdG 方程 (8) 式得不到元激发本征函数集的解析解.

忽略 GP 方程 (7) 式中的凝聚静态部分动能  $\sigma(\bar{r})$ , 可得 TFA 基态波函数

$$\phi'_0(\bar{r}) = \phi'_0(0) \left(1 - \bar{r}^2\right)^{1/2}, \quad (26)$$

其中  $\bar{r} = r/R'_0$ , 归一化常数  $\phi'_0(0) = \lambda [N_0 / (2\pi R_0^3 B(3/2, 2))]^{1/2}$  而凝聚体特征半径  $R'_0 = \sqrt{2\mu' / (m\omega_{h0}^2)}$ , 化学式  $\mu' = \hbar\omega_{h0} [4\lambda P / B(3/2, 2)]^{2/5} / 2$ . 把 (26) 式代入 BdG 方程 (8) 式可以得到元激发本征函数集的解析解 [22], 但由这些解析解计算出的三模耦合矩阵元  $\bar{A}_{ij}$  是发散的.

在 TFA 基态波函数 (26) 式中引入参量  $q > 0$ , 得到 bTFA 基态波函数 (9) 式, 把 (9) 式代入 BdG 方程 (8) 式也可得到本征函数集的解析解 [23], 而由此计算的  $\bar{A}_{ij}$  不发散.

文献 [42–44] 取  $q = 1$ , 以下从两个方面说明其中的原因.

一方面, 取  $q = 1$ , bTFA 基态波函数 (9) 式为谐振子基态波函数 (高斯分布函数) 的一阶近似形式  $\phi_0 \sim 1 - \bar{r}^2$ , 当  $\bar{r} \rightarrow 0$  时,  $\phi_0 \rightarrow e^{-\bar{r}^2}$ , 即越靠近

BEC 中心, 基态波函数越接近高斯分布函数, 囚禁势中 BEC 粒子保留着一定的谐振子特征.

另一方面, 在凝聚体边界  $1 - \bar{s}^2 - \lambda^2 \bar{z}^2 = 0$  处, 凝聚体的动能密度  $\sim -\phi_0 \nabla^2 \phi_0 \sim -(1+q)(1 - \bar{s}^2 - \lambda^2 \bar{z}^2)^{-1+q} [-2 - \lambda^2 + \bar{z}^2(2\lambda^2 + q\lambda^4) + \bar{s}^2(1+q + \lambda^2)]$  在  $0 < q < 1$  是发散的, 在  $q = 1$  时不确定, 在  $q > 1$  时等于 0. 因此, 取  $q = 1 + \epsilon$  ( $\epsilon$  是无穷小量) 是 BEC 基态波函数满足连续性边界条件时  $q$  最小的一种情况.

因为 TFA 元激发本征值的理论计算值接近于实验值, 采用 TFA 的元激发本征值. 因为 TFA 的元激发本征函数会导致三模耦合矩阵元的发散, 采用 bTFA 的元激发本征函数.

如前所述, 文献 [44] 与文献 [32] 均研究系统参量完全相同的球对称 BEC. 文献 [44] 还进行了另一种计算, 也用上述解析方法, 但在考虑元激发的弛豫上与文献 [32] 方法相同, 即在本征频率微扰关系 (15) 式中引入洛伦兹宽度, 也只考虑一部分阻尼强度小的准粒子背景跃迁对阻尼的贡献, 在阻尼随洛伦兹宽度的缓变范围内取阻尼的计算值, 阻尼的解析计算结果与文献 [32] 的数值模拟计算结果相符合. 通过这样一个计算对取  $q = 1$  进行了验证.

### 3 计算及结果

考虑频率为  $\omega_{ho} = 810$  Hz, 各向异性参数  $\lambda = 2.83$  的谐振囚禁势中原子数  $N = 6000$  的碟形  $^{87}\text{Rb}$  原子气体 ( $a_{sc} = 5.82 \times 10^{-9}$  m). 研究的集体模是剪刀模  $(n_z, n_s, m) = (0, 0, 2)$ , 其频率  $\omega_0 = 1.414$  (以  $\omega_{ho}$  为单位), 其集体模的博戈留波夫振幅  $u_0 = (\phi_{002}^+ + \phi_{002}^-) / 2$  和  $v_0 = (\phi_{002}^+ - \phi_{002}^-) / 2$ . 以上集体模和所有参量的选取均与实验 [27] 相同. BEC 相变临界温度为  $T_c = 4.5 (\omega_{ho} / 200\pi) (\lambda N)^{1/3}$  nK = 149.2 nK [1].

#### 3.1 阻尼强度

阻尼强度采用 (16) 式和 (17) 式计算. 在图 1 和图 2 及其插图中, 给出了各个准粒子跃迁  $\omega_{ij}$  ( $\omega_{ij} = \omega_j - \omega_i$ , 以  $\omega_{ho}$  为单位) 的阻尼强度  $\gamma_{ij}$  (以  $\omega_{ho}^2$  为单位). 这些准粒子跃迁服从剪刀模选择条件  $m_i - m_j = 2$  (其中  $m_i$  和  $m_j$  分别是准粒子  $\omega_i$  和  $\omega_j$  的方位角量子数). 图 1 和图 2 及其插图中的箭头

指向集体模的频率  $\omega_0$ , 竖线的位置对应允许的跃迁频率  $\omega_{ij}$ , 其高度给出  $\gamma_{ij}$  的计算值.

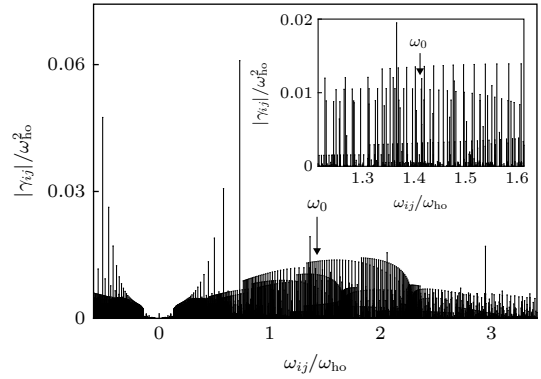


图 1 以跃迁频率  $\gamma_{ij}$  为变量的剪刀模阻尼强度  $\omega_{ij}$  函数线状图

Fig. 1. Histogram of damping strength  $\gamma_{ij}$  as a function of the transition  $\omega_{ij}$  for the scissors mode in the condensate.

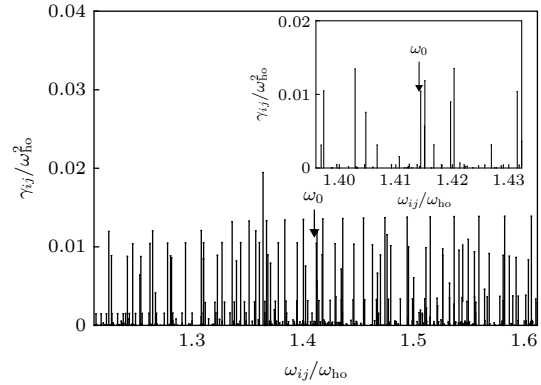


图 2 以跃迁频率  $\gamma_{ij}$  为变量的剪刀模阻尼强度  $\omega_{ij}$  函数线状图 ( $\omega_{ij}/\omega_{ho}$  取值范围为 0—1.6)

Fig. 2. Histogram of damping strength  $\gamma_{ij}$  as a function of the transition  $\omega_{ij}$  for the scissors mode in the condensate, ( $\omega_{ij}/\omega_{ho} = 1-1.6$ ).

图 1 和其插图中的跃迁频率分别满足  $-0.6\omega_{ho} < \omega_{ij} < 3.4\omega_{ho}$  和  $1.21\omega_{ho} < \omega_{ij} < 1.61\omega_{ho}$ , 图 2 和其插图中的跃迁频率分别满足  $1.21\omega_{ho} < \omega_{ij} < 1.61\omega_{ho}$  和  $1.396\omega_{ho} < \omega_{ij} < 1.432\omega_{ho}$ .

由阻尼强度计算公式 (16) 式可以看出, 当跃迁频率  $\omega_{ij} < 0$  (即  $\omega_j < \omega_i$ ) 时, 阻尼强度  $\gamma_{ij} < 0$ ; 当跃迁频率  $\omega_{ij} = 0$  (即  $\omega_j = \omega_i$ ) 时, 阻尼强度  $\gamma_{ij} = 0$ ; 当跃迁频率  $\omega_{ij} > 0$  (即  $\omega_j > \omega_i$ ) 时, 阻尼强度  $\gamma_{ij} > 0$ .

能级量子数大的准粒子本征函数振荡很快且极大值远离凝聚中心, 另外量子数大能级能量高, 其玻色布居因子  $f_i^0$  小, 因此量子数大能级之间跃迁的三模耦合矩阵元小. 忽略对阻尼和频移贡献小



的跃迁, 在计算中选取  $(0, 0, m)$ ,  $(1, 0, m)$ ,  $(0, 1, m)$ ,  $(2, 0, m)$ ,  $(1, 1, m)$ ,  $(3, 0, m)$ ,  $(0, 2, m)$ ,  $(2, 1, m)$ ,  $(4, 0, m)$ ,  $(1, 2, m)$ ,  $(3, 1, m)$ ,  $(5, 0, m)$ ,  $(0, 3, m)$ ,  $(2, 2, m)$ ,  $(4, 1, m)$  和  $(6, 0, m)$  而  $m$  满足  $m \leq 40$  的能级. 上述所选能级之间的跃迁频率范围在

图 1 跃迁频率取值范围  $-0.6\omega_{ij} < \omega_{ij} < 3.4\omega_0$  之内.

### 3.2 阻尼系数和频移及其温度依赖

将 (24) 式右边的  $\gamma_0$  替换成  $\gamma$  并近似地认为阻尼系数正比于频率, 把 (24) 式改写为

$$\bar{\gamma}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\bar{\gamma}}{\left\{ \left[ (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^2 \left( \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma} \right)^2 \right\}^2 + \bar{\gamma}^2}, \quad (27)$$

用迭代的方法计算集体模的阻尼系数. 图 3 给出  $\gamma_0$  随  $\gamma$  变化的图 ( $\gamma_0$  和  $\gamma$  都以  $\omega_{h0}$  为单位), 图中可以看出,  $\gamma_0$  随  $\gamma$  的增加而减小, 由星号表示三个点处  $\gamma_0 = \gamma$ , 温度  $T = 80, 100, 120$  nK 时的集体模阻

尼系数值在此三点给出, 分别为 0.02263, 0.03387, 0.05546, 相当于 18.33, 27.43, 44.92 s<sup>-1</sup>.

把 (25) 式改写为

$$\bar{\omega} - \bar{\omega}_0 = \sum_{ij} \bar{\gamma}_{ij} \frac{1}{\pi} \frac{\left[ (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0 \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0 \right)^2 \left( \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0 \right)^2}{\left( \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0 \right)^2 \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0} \frac{\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j}{|\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j|} \frac{1}{\left\{ \left[ (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2 + \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0 \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0 \right)^2 \left( \frac{\bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_0} \bar{\gamma}_0 \right)^2 \right\}^2 + \bar{\gamma}_0^2}. \quad (28)$$

并用阻尼系数  $\bar{\gamma}_0$  的计算结果来计算频移大小. 图 4 给出了阻尼系数  $\gamma_0$  (单位为 s<sup>-1</sup>) 和频率  $\omega$  (单位为  $\omega_{h0}$ ) 随温度  $T$  (单位为 nK) 变化的关系. 图中平滑的曲线是我们的理论计算结果, 实心圆点和误

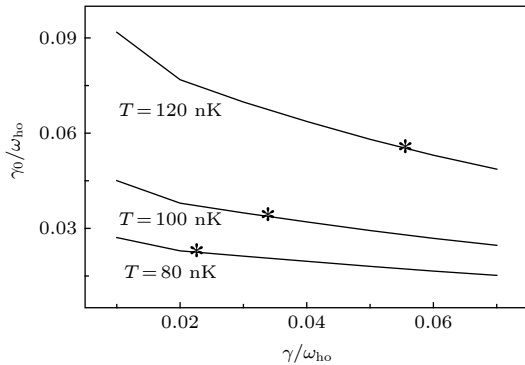


图 3 朗道阻尼系数  $\gamma_0$  随  $\gamma$  变化函数图

Fig. 3. The  $\gamma_0$  as a function of  $\gamma$  for the Landau damping rate.

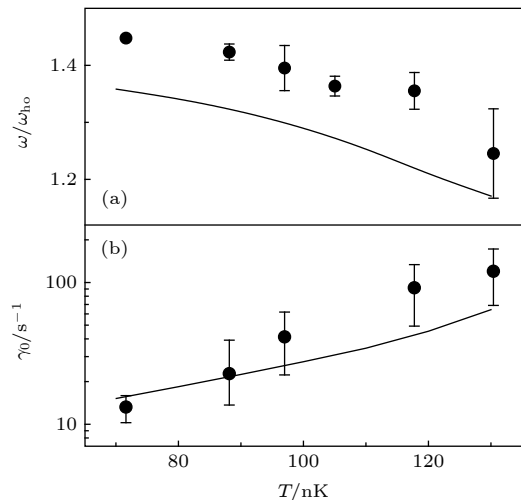


图 4 凝聚体集体模的频移 (a) 和朗道阻尼系数 (b) 随温度  $T$  变化

Fig. 4. The frequency-shift (a) and the Landau damping rate  $\gamma_0$  (b) of the collective mode in the condensate as a function of the temperature  $T$ .

差线表示实验值. 理论计算得出的阻尼系数和频移温度依赖结果都与文献 [27] 的实验结果相符.

## 4 讨论

如前所述, 采用元激发本征频率的 TFA 理论计算值, 因为它们接近于实验测量值. 图 4(a) 中, 理论曲线和实验数据点及其误差线错开了一段距离, 这是因为剪刀模本征频率的 TFA 理论计算值与实验测量值之间存在大约 5% 的误差.

如前所述, TFA 基态波函数 (26) 式是 GP 方程 (7) 式的解, 而 bTFA 基态波函数 (9) 式是在 (26) 式中引入  $q$  而得到的, 因此 (9) 式相当于 (26) 式有误差, 其平均误差为

$$\bar{\delta} = \frac{\int_0^1 \left[ \frac{\phi_0}{\phi'_0} \left( 1 - \frac{R'_0}{R_0} \bar{r}'^2 \right)^{\frac{1+q}{2}} - (1 - \bar{r}'^2)^{\frac{1}{2}} \right] (1 - \bar{r}'^2)^{\frac{1}{2}} \bar{r}'^2 d\bar{r}'}{\int_0^1 (1 - \bar{r}'^2)^{\frac{1}{2}} \bar{r}'^2 d\bar{r}'}. \quad (29)$$

取  $q = 1$ , 将本文选取的相关系统参量代入 (29) 式计算得其平均误差  $\bar{\delta} = 0.77\%$ , 说明 bTFA 基态波函数 (9) 式近似满足 GP 方程 (7) 式.

如前所述, 只有失谐很小的跃迁才对阻尼和频移有显著的贡献. 本文计算频移时考虑在图 1 跃迁频率范围内的跃迁, 在此范围外的跃迁对频移的贡献可以忽略不计. 图 2 的跃迁频率范围比图 1 小而与图 1 插图相同, 本文计算阻尼时考虑这个范围内的跃迁, 在此范围外的跃迁对阻尼的贡献可以忽略不计. 图 2 插图的跃迁频率取值范围只是图 2 的 9%, 但在图 2 插图跃迁频率取值范围内的跃迁对阻尼的贡献是总阻尼的 50%.

## 5 结论

在 HFB 平均场理论近似的朗道机制频率扰动关系中, 考虑了三个元激发的弛豫及三个弛豫的正交关系, 得到计算 BEC 中集体激发朗道阻尼和频移的公式. 把凝聚体基态波函数取为高斯分布函数的一阶近似来消除 TFA 近似三模耦合矩阵元的发散而实施了解析计算. 采用同样的计算方法, 本文和两个前期工作分别研究 BEC 中剪刀模、单极子模和四极子模, 分别采用与相关实验相同的参量,

所有集体激发阻尼和频移的理论结果分别与相关实验结果相符合. 期望本文方法能够有助于 BEC 和 2BECs 中集体激发阻尼和频移的研究工作, 有助于探究元激发阻尼和频移的物理机制.

## 参考文献

- [1] Pethick C J, Smith H 2008 *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (2nd Ed.) (Cambridge: Cambridge University Press) p23
- [2] Dalfovo F, Minniti C, Pitaevskii L P 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4855
- [3] Morgan S A, Choi S, Burnett K, Edwards M 1998 *Phys. Rev. A* **57** 3818
- [4] Hechenblaikner G, Maragò O M, Hodby E, Arlt J, Hopkins S, Foot C J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 692
- [5] Hodby E, Maragò O M, Hechenblaikner G, Foot C J 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2196
- [6] Edwards M, Dodd R J, Chark C W, Ruprecht P A, Burnett K 1996 *Phys. Rev. A* **53** R1950
- [7] Maragò O M, Hopkins S A, Arlt J, Hodby E, Hechenblaikner G, Foot C J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2056
- [8] Khawaja U A, Stoof H T C 2001 *Phys. Rev. A* **65** 013605
- [9] Hechenblaikner G, Morgan S A, Hodby E, Maragò O M, Foot C J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033612
- [10] Bijlsma M J, Stoof H T C 1999 *Phys. Rev. A* **60** 3973
- [11] Öhberg P, Stenholm S 1998 *Phys. Rev. A* **57** 1272
- [12] Stringari S 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2360
- [13] Fetter A L 1996 *Phys. Rev. A* **53** 4245
- [14] Shchedrin G, Jaschke D, Carr L D 2018 *Sci. Rep.* **8** 11523
- [15] Ota M, Larcher F, Dalfovo F, Pitaevskii L, Proukakis N P, Stringari S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 145302
- [16] Mendonca J T, Tercas H, Gammal A 2018 *Phys. Rev. A* **97** 063610
- [17] Cappellaro A, Toigo F, Salasnich L 2018 *Phys. Rev. A* **98** 043605
- [18] Xi Z H, Yang X Y, Tang N, Song L, Li X L, Shi Y R 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 230501 (in Chinese) [席忠红, 杨雪滢, 唐娜, 宋琳, 李晓霖, 石玉仁 2018 物理学报 **67** 230501]
- [19] Zhu K Q, Yu Z F, Gao J M, Zhang A X, Xu H P, Xue J K 2019 *Chin. Phys. B* **28** 010307
- [20] Li J, Liu W M 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 110302 (in Chinese) [李吉, 刘伍明 2018 物理学报 **67** 110302]
- [21] Zhou W Y, Wu Y J, Kou S P 2018 *Chin. Phys. B* **27** 050302
- [22] Ma Y L, Chui S T 2002 *Phys. Rev. A* **65** 053610
- [23] Hu B, Huang G, Ma Y L 2004 *Phys. Rev. A* **69** 063608
- [24] Maragò O, Hechenblaikner G, Hodby E, Foot C 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3938
- [25] Stamper-Kurn D M, Miesner H J, Inouye S, Andrews M R, Ketterle W 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 500
- [26] Chevy F, Bretin V, Rosenbusch P, Madison K W, Dalibard J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 250402
- [27] Jin D S, Matthews M R, Ensher J R, Wieman C E, Cornell E A 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 764
- [28] Zaremba E, Griffin A, Nikuni T 1998 *Phys. Rev. A* **57** 4695
- [29] Zaremba E, Nikuni T, Griffin A 1999 *J. Low. Temp. Phys.*

116 277

- [30] Jackson B, Zaremba E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 180402
- [31] Jackson B, Zaremba E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 150402
- [32] Guilleumas M, Pitaevskii L P 1999 *Phys. Rev. A* **61** 013602
- [33] Das K, Bergeman T 2001 *Phys. Rev. A* **64** 013613
- [34] Pitaevskii L P, Stringari S 1997 *Phys. Lett. A* **235** 398
- [35] Fedichev P O, Shlyapnikov G V, Walraven J T M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2269
- [36] Reidl J, Csordás A, Graham R, Szépfalussy P 2000 *Phys. Rev. A* **61** 043606
- [37] Mizushima T, Ichioka M, Machida K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 180401
- [38] Morgan S A, Rusch M, Hutchinson D A W, Burnett K 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 250403
- [39] Giorgini S 1998 *Phys. Rev. A* **57** 2949
- [40] Giorgini S 2000 *Phys. Rev. A* **61** 063615
- [41] Ma X, Ma Y L, Huang G 2007 *Phys. Rev. A* **75** 013628
- [42] Chai Z L, Zhou Y, Ma X D 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130307 (in Chinese) [柴兆亮, 周昱, 马晓栋 2013 物理学报 **62** 130307]
- [43] Rahmut A, Peng S Q, Ma X D 2014 *Chin. Phys. B* **23** 090311
- [44] Peng S Q, Rahmut A, Ma X D 2015 *J. At. Mol. Phys.* **32** 1018 (in Chinese) [彭胜强, 阿孜古丽·马合木提, 马晓栋 2015 原子与分子物理学报 **32** 1018]
- [45] Bhattacharjee A B 2014 *Mod. Phys. Lett. B* **28** 1450029
- [46] Natu S S, Wilson R M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 063638
- [47] Moniri S M, Yavari H, Darsheshdar E 2016 *Eur. Phys. J. Plus.* **131** 363
- [48] Moniri S M, Yavari H, Darsheshdar E 2016 *Chin. Phys. B* **25** 126701

# Landau damping and frequency-shift of $(0, 0, 2)$ scissors mode in a disc-shaped Bose-Einstein condensate\*

Zhao Jun-Ya<sup>1)</sup> Li Chen-Xu<sup>2)</sup> Ma Xiao-Dong<sup>1)†</sup>

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Xinjiang Normal University, Urumchi 830054, China*)

2) (*School of Medical Engineering and Technology, Xinjiang Medical University, Urumchi 830011, China*)

( Received 3 May 2019; revised manuscript received 21 September 2019 )

## Abstract

By using the Hartree-Fock-Bogoliubov approximation of mean-field theory and the analytic method based on Thomas-Feimi approximation, the Landau damping and frequency-shift of  $(0, 0, 2)$  scissors mode in a disc-shaped Bose-Einstein condensate are investigated and the damping rate and frequency-shift magnitude as well as their temperature dependence are calculated. In the calculation, the practical relaxations of the elementary excitations and the orthometric relation among the relaxations are considered in the relation for the perturbed eigenfrequency of mean-field theory to obtain the calculation formula of damping and frequency-shift, and the first-order approximation of Gaussian distribution function is employed for the ground-state wavefunction to eliminate the divergence of the three-mode coupling matrix elements in Thomas-Fermi approximation. Taking the same parameters of particle number, trapping frequency and anisotropy as those in relevant experiment research, our theoretical calculation results accord with the relevant experimental measurement results. Because of the complexity of the theory and the difficulty of calculation, most of mean-field theory researches on damping and frequency shift of collective excitation in one and two component Bose-Einstein condensates adopt semi-classical approximation, the quasi-particle excitation spectrum is regarded as continuously integrating each quasi-particle transition contribution to damping and frequency shift. In this paper, the damping and frequency shift are calculated according to the discrete quasi-particle excitation spectrum, and in the course of the study the improving of method of considering the practical relaxations of the elementary excitations and the orthometric relation among the relaxations is put forward. It is hoped that the method will have some reference value in the future work.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, Landau damping and frequency-shift, Hartree-Fock-Bogoliubov approximation, Thomas-Fermi approximation

**PACS:** 03.75.Kk, 05.30.Jp, 67.85.De

**DOI:** [10.7498/aps.68.20190661](https://doi.org/10.7498/aps.68.20190661)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10864006, 11264039), the Key Research Project of Xinjiang Higher Education, China (Grant No. XJEDU20141029), the “Physics” Specialty of Xinjiang Normal University, China, and the Key Subject of “Physics” in Xinjiang Normal University, China.

† Corresponding author. E-mail: [xdma07@aliyun.com](mailto:xdma07@aliyun.com)