

### 三维不可压缩流的12速多松弛格子Boltzmann模型

胡嘉懿 张文欢 柴振华 施保昌 汪一航

Three-dimensional 12-velocity multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model of incompressible flows

Hu Jia-Yi Zhang Wen-Huan Chai Zhen-Hua Shi Bao-Chang Wang Yi-Hang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 234701 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190984

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190984>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

非正交多松弛系数轴对称热格子Boltzmann方法

Non-orthogonal multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method for axisymmetric thermal flows

物理学报. 2017, 66(4): 044701 <https://doi.org/10.7498/aps.66.044701>

不可压幂律流体气-液两相流格子Boltzmann模型及其在多孔介质内驱替问题中的应用

Lattice Boltzmann model of gas-liquid two-phase flow of incompressible power-law fluid and its application in the displacement problem of porous media

物理学报. 2019, 68(21): 214702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190873>

基于浸入边界-多松弛时间格子玻尔兹曼通量求解法的流固耦合算法研究

A method combined immersed boundary with multi-relaxation-time lattice Boltzmann flux solver for fluid-structure interaction

物理学报. 2017, 66(22): 224702 <https://doi.org/10.7498/aps.66.224702>

# 三维不可压缩流的 12 速多松弛格子 Boltzmann 模型\*

胡嘉懿<sup>1)</sup> 张文欢<sup>1)†</sup> 柴振华<sup>2)</sup> 施保昌<sup>2)</sup> 汪一航<sup>1)</sup>

1) (宁波大学数学与统计学院, 浙江 315211)

2) (华中科技大学数学与统计学院, 湖北 430074)

(2019 年 6 月 26 日收到; 2019 年 9 月 14 日收到修改稿)

为提高多松弛 (MRT) 格子 Boltzmann 模型的计算效率, 运用反演法提出了一个求解三维不可压缩流的 12 速 MRT 格子 Boltzmann 模型 (iD3Q12 MRT 模型). 这个模型比通常使用的 D3Q13 MRT 模型具有更高的计算效率. 在数值模拟部分我们把 iD3Q12 MRT 模型与可压缩性较小的一个 13 速多松弛模型 (He-Luo D3Q13 MRT 模型) 在精确性和稳定性方面作比较. 通过模拟不同的流动, 包括压力驱动的稳态泊肃叶流、周期变化的压力驱动的非稳态脉动流、顶盖驱动的方腔流, 可以发现 iD3Q12 MRT 模型模拟以上三种流动时得到的数值解与解析解或与已有的结果符合很好, 这说明我们提出的 iD3Q12 MRT 模型是准确的. 在模拟稳态的泊肃叶流时, 两个模型计算的速度场的全局相对误差完全相同, 且两个模型都具有二阶的空间精度. 在模拟非稳态脉动流时, 大多情况下是 12 速模型的计算误差更小, 但在脉动流的最大压降增大时, iD3Q12 MRT 模型先发散, 这说明 He-Luo D3Q13 MRT 模型具有更好的稳定性. 在模拟不同雷诺数下的顶盖驱动的方腔流时, He-Luo D3Q13 MRT 模型也比 iD3Q12 MRT 模型更稳定.

**关键词:** 三维 12 速, 多松弛, 格子 Boltzmann 方法, 不可压缩流

**PACS:** 47.11.-j, 47.10.ad

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190984

## 1 引言

格子 Boltzmann 方法 (LBM) 起源于 20 世纪 70 年代提出的格子气自动机方法 (LGA), 它克服了 LGA 方法的一些缺陷, 例如消除了统计噪声且其对应的宏观方程满足伽利略不变性<sup>[1-3]</sup>. 并且 LBM 自身具有良好的计算局部性、程序的简洁性和拓展性等优点. 另一方面从理论上, LBM 方法可以从连续 Boltzmann 方程得到<sup>[4-6]</sup>. 因此, LBM 作为计算流体动力学 (CFD) 中一种有效的介观数值模拟方法受到了广泛的关注. 它被应用在模拟一些

复杂的流体, 例如: 多相流<sup>[7-9]</sup>、悬浮液<sup>[10]</sup>、磁流体<sup>[11,12]</sup>、多孔介质中的流体<sup>[13]</sup>, 还被用于求解一些偏微分方程, 例如 Burgers 方程<sup>[14]</sup>、对流扩散方程<sup>[15,16]</sup>、泊松方程<sup>[17]</sup>、分数阶扩散方程<sup>[18]</sup>.

在研究人员的努力和发展下, LBM 出现了 lattice Bhatnagar-Gross-Krook (LBGK) 模型或称为单松弛 (SRT) 模型<sup>[19-23]</sup>、熵模型<sup>[24]</sup>、双松弛 (TRT) 模型<sup>[25,26]</sup>、多松弛 (MRT) 模型<sup>[27-34]</sup>等. 其中 LBGK 模型因其形式的简洁性在各种复杂的流体传输问题研究中受到了广泛的应用, 其中最具有代表性的是 Qian 等<sup>[20]</sup>提出的 DdQq 模型. 但由于 LBGK 模型以单松弛时间近似为基础, 其在稳

\* 浙江省自然科学基金 (批准号: LQ16A020001)、浙江省教育厅科研基金 (批准号: Y201533808)、宁波市自然科学基金 (批准号: 2016A610075) 和宁波大学王宽诚幸福基金资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhangwenhuan@nbu.edu.cn

定性和精确性方面存在不足. 几乎同时, 法国学者 d'Humières<sup>[27]</sup> 提出了广义的格子 Boltzmann 模型即多松弛格子 Boltzmann 模型 (MRT). MRT 模型和 LBGK 模型的不同之处主要体现在它们的碰撞项, MRT 模型具有数量最多的自由度, 即可调松弛因子的数量最多, 而不同的松弛因子可以最大限度地优化模型性质, 如稳定性和精确性<sup>[30,35]</sup>, 因此 MRT 模型受到越来越多的重视. 常见的 MRT 模型有二维的 D2Q9 MRT 模型<sup>[27]</sup>, 三维的 D3Q15 MRT 模型<sup>[28]</sup>、D3Q19 MRT 模型<sup>[28]</sup>, 至今为止三维空间中速度方向最少的 MRT 模型是由法国学者 d'Humières 等<sup>[29]</sup> 提出的 D3Q13 MRT 模型. 这些模型都可以通过 Chapman-Enskog (C-E) 展开恢复到 Navier-Stokes 方程 (N-S 方程). 速度集合多的模型具有更好的稳定性和各向同性<sup>[36,37]</sup>, 但同时在计算时间和存储空间的消耗上会增加. 为此有学者提出了拥有更少速度方向的 MRT 模型, 如 D2Q8 MRT 模型<sup>[32]</sup>、D3Q14 MRT 模型和 D3Q18 MRT 模型<sup>[33]</sup>. 这几种 MRT 模型的构造原理是基于 Guo 等<sup>[22]</sup> 提出的不可压 DdQq LBGK 模型的宏观量计算与分布函数  $f_0$  无关, 且在 DdQq MRT 模型<sup>[28]</sup> 恢复宏观方程的过程中没有用到能量的平方项. 因此将 DdQq MRT 模型的离散速度集合舍弃 0 速度方向、模型的矩中能量平方项丢掉, 并且将它的变换矩阵去掉第一列和能量平方项所对应的那一行再正交化得到新的 DdQ (q-1) MRT 模型的变换矩阵. 最后将构造的变换矩阵乘以原 LBGK 模型中去掉 0 方向的平衡态分布函数就得到 DdQ (q-1) MRT 模型的矩平衡态.

本文在 D3Q13 MRT 模型<sup>[29]</sup> 的基础上提出了求解不可压缩 N-S 方程的三维 12 速 MRT 模型 (iD3Q12 MRT), 和已有的 D2Q8, D3Q14, D3Q18 等 MRT 模型的构造方法相比, 最大的难点在于 D3Q13 MRT 模型没有对应的 LBGK 模型, 因此就不能通过变换矩阵乘以平衡态分布函数的方法得到矩平衡态. 但可仿照 D2Q8, D3Q14, D3Q18 MRT 模型的构造方法构造离散速度集合和变换矩阵, 舍弃了原 13 速 MRT 模型的矩中能量  $e$  的那一项,

并且在 13 速 MRT 模型没有对应的 LBGK 模型的情况下运用反演法, 即用 13 速 MRT 模型变换矩阵的逆乘它的矩平衡态得到形式上的“平衡态分布函数”, 再通过一系列构造变成含有 12 个元素的“平衡态分布函数”, 最后将构造出的 12 速 MRT 模型的变换矩阵乘以这个“平衡态分布函数”就得到了矩平衡态, 使得新的 iD3Q12 MRT 模型可以在低马赫数 ( $Ma$ ) 条件下通过 C-E 展开恢复到不可压 N-S 方程. 需要注意的是, 本文在模拟部分与 iD3Q12 MRT 模型作对比的是 D3Q13 MRT 模型的不可压版本, 这里称之为 He-Luo D3Q13 MRT 模型. 这是因为它的矩平衡态是将 D3Q13 MRT 模型的矩平衡态表达式中与速度相乘的密度  $\rho$  变成  $\rho_0$ , 这与 He-Luo LBGK 模型<sup>[21]</sup> 的平衡态分布函数的构造方法相同. 这种变化忽略了平衡态分布函数中  $Ma$  三次方的同阶或高阶无穷小量, 从而减少了 LB 模型的可压缩效应. 因此在模拟部分, 选取可压缩误差更小的 He-Luo D3Q13 MRT 模型与 iD3Q12 MRT 模型作对比.

总之, 基于 D3Q13 MRT 模型, 运用反演法提出了一个可以在低  $Ma$  假设下恢复到不可压 N-S 方程的 iD3Q12 MRT 模型, 它可能是目前三维 MRT 模型中离散速度方向个数最少的一个模型, 因此 iD3Q12 MRT 模型在计算量和存储量的需求上更小. 通过一系列数值模拟, 我们将 iD3Q12 与 He-Luo D3Q13 MRT 模型作对比, 验证了我们提出的 iD3Q12 MRT 模型的有效性, 并考察了该模型在精确性和稳定性方面与 He-Luo D3Q13 MRT 模型的差异.

## 2 三维 13 速 MRT 模型

D3Q13 MRT 模型是 d'Humières 等<sup>[29]</sup> 提出的. 在现有的 MRT 模型中, 它满足伽利略不变性和各向同性, 并且是能够通过 C-E 展开恢复到 Navier-Stokes 方程的具有最少的离散速度的一个 MRT 模型. 在假设空间步长  $\delta x = 1$  和时间步长  $\delta t = 1$ , 即粒子速度  $c = \delta x / \delta t = 1$  的情形下, D3Q13 MRT 模型选取的离散速度如下:

$$\{c_0, c_1, \dots, c_{12}\} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

模型的演化方程为

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = - \sum_{j=0}^{12} \Lambda_{ij} (f_j(\mathbf{x}, t) - f_j^{(\text{eq})}(\mathbf{x}, t)), \quad i = 0-12, \quad (1)$$

$f_i(\mathbf{x}, t)$  是沿速度  $\mathbf{c}_i$  移动的粒子的分布函数,  $f_i^{(\text{eq})}(\mathbf{x}, t)$  是平衡态分布函数,  $\Lambda_{ij}$  是  $13 \times 13$  阶碰撞矩阵  $\Lambda$  的元素. 由速度方向  $\mathbf{c}_i$  生成了两两正交的向量  $\mathbf{e}_k$ ,  $k \in 0, 1, \dots, 12$ , 再由这 13 个正交向量  $\mathbf{e}_k$  定义 D3Q13 MRT 模型的变换矩阵  $\mathbf{T}$ ,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

作用于分布函数  $\mathbf{f}$  得到 13 个矩  $m_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{f} = \sum_{i=0}^{12} f_i e_{ki}$ ,  $k \in 0, 1, \dots, 12$ ,

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = (\rho, j_x, j_y, j_z, e, 3S_{xx}, S_{\omega\omega}, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}, h_x, h_y, h_z), \quad (3)$$

选取的矩平衡态  $\mathbf{m}^{(\text{eq})}$  为

$$\rho^{(\text{eq})} = \rho, \quad (4a)$$

$$\begin{cases} j_x^{(\text{eq})} = \rho u_x, \\ j_y^{(\text{eq})} = \rho u_y, \\ j_z^{(\text{eq})} = \rho u_z, \end{cases} \quad (4b)$$

$$e^{(\text{eq})} = \frac{3}{2}(13c_s^2 - 8)\rho + \frac{13}{2}\rho \mathbf{u}^2, \quad (4c)$$

$$\begin{cases} 3S_{xx}^{(\text{eq})} = \rho(3u_x^2 - u^2), \\ S_{\omega\omega}^{(\text{eq})} = \rho(u_y^2 - u_z^2), \end{cases} \quad (4d)$$

$$\begin{cases} S_{xy}^{(\text{eq})} = \rho(u_x u_y), \\ S_{yz}^{(\text{eq})} = \rho(u_y u_z), \\ S_{xz}^{(\text{eq})} = \rho(u_x u_z), \end{cases} \quad (4e)$$

$$\begin{cases} h_x^{(\text{eq})} = 0, \\ h_y^{(\text{eq})} = 0, \\ h_z^{(\text{eq})} = 0, \end{cases} \quad (4f)$$

通过 C-E 展开, 并在低  $Ma$  假设下, 该模型能够恢复到可压缩的 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \\ & = -c_s^2 \nabla \rho + \rho \nu \Delta(\mathbf{u}) + \rho \left( \frac{\nu}{3} + \zeta \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (5b)$$

其中

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda'_\nu} - \frac{1}{2} \right), \\ \zeta &= \left( \frac{2}{3} - c_s^2 \right) \left( \frac{1}{\lambda_e} - \frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

分别表示剪切黏度和体黏度,  $\lambda_\nu$  和  $\lambda'_\nu$  是与剪切黏度  $\nu$  相关的碰撞因子.

He-Luo D3Q13 MRT 模型的矩平衡态选取如下:

$$\rho^{(\text{eq})} = \rho, \quad (7a)$$

$$\begin{cases} j_x^{(\text{eq})} = \rho_0 u_x, \\ j_y^{(\text{eq})} = \rho_0 u_y, \\ j_z^{(\text{eq})} = \rho_0 u_z, \end{cases} \quad (7b)$$

$$e^{(\text{eq})} = \frac{3}{2}(13c_s^2 - 8)\rho + \frac{13}{2}\rho_0 \mathbf{u}^2, \quad (7c)$$

$$\begin{cases} 3S_{xx}^{(\text{eq})} = \rho_0(3u_x^2 - u^2), \\ S_{\omega\omega}^{(\text{eq})} = \rho_0(u_y^2 - u_z^2), \end{cases} \quad (7d)$$

$$\begin{cases} S_{xy}^{(\text{eq})} = \rho_0 u_x u_y, \\ S_{yz}^{(\text{eq})} = \rho_0 u_y u_z, \\ S_{xz}^{(\text{eq})} = \rho_0 u_x u_z, \end{cases} \quad (7e)$$

$$\begin{cases} h_x^{(\text{eq})} = 0, \\ h_y^{(\text{eq})} = 0, \\ h_z^{(\text{eq})} = 0, \end{cases} \quad (7f)$$

通过 C-E 展开可以将 He-Luo D3Q13 MRT 模型恢复到如下形式的 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} + \left(\frac{\nu}{3} + \zeta\right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (8b)$$

其中

$$\nu = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda'_\nu} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\zeta = \left( \frac{2}{3} - c_s^2 \right) \left( \frac{1}{\lambda_e} - \frac{1}{2} \right),$$

$$P = p/\rho_0 = c_s^2 \rho / \rho_0. \quad (9)$$

在低  $Ma$  假设和  $T \gg L/c_s$  ( $T$  和  $L$  分别表示特征时间和特征长度) 的条件下, He-Luo D3Q13 MRT 模型可以进一步恢复到不可压 N-S 方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (10b)$$

在 He-Luo D3Q13 MRT 模型中, 宏观量的计算格式如下:

$$\rho = \sum_{i=0}^{12} f_i, \quad \rho_0 \mathbf{u} = \sum_{i=0}^{12} \mathbf{c}_i f_i, \quad (11)$$

在后面的模拟中, 假设  $\rho_0 = 1$ .

### 3 反演法: iD3Q12 MRT 模型矩平衡态的构造

将 D3Q13 MRT 模型变换矩阵的逆乘它的矩平衡态得到形式上的“平衡态分布函数”, 如下所示:

$$\begin{pmatrix} -(\rho * (3c_s^2 + u^2 - 2))/2 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 + 2u_x u_y + u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 - 2u_x u_y + u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 + 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 - 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u^2 - 2u_x^2 + u_y + u_z + 2u_y u_z))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u^2 - 2u_x^2 + u_y - u_z - 2u_y u_z))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 + 2u_x u_y - u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 - 2u_x u_y - u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 + 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (\rho * (c_s^2 + u_x^2 - 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ -(\rho * (-c_s^2 - u^2 + 2u_x^2 + u_y + u_z - 2u_y u_z))/8 \\ -(\rho * (-c_s^2 - u^2 + 2u_x^2 + u_y - u_z + 2u_y u_z))/8 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

由于 He-Luo LBGK 模型<sup>[21]</sup>的平衡态分布函数的构造是基于 Qian 等<sup>[20]</sup>的 LBGK 模型, 并将其平衡态分布函数中速度  $\mathbf{u}$  前的密度  $\rho$  替换为  $\rho_0$ . 因此, 将 (12) 式中速度  $\mathbf{u}$  前的  $\rho$  替换成  $\rho_0$ , 得到 He-Luo LBGK 模型式的“平衡态分布函数”, 如下所示:

$$\begin{pmatrix} -(\rho * (3c_s^2 - 2) + \rho_0 u^2)/2 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 + 2u_x u_y + u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 - 2u_x u_y + u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 + 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 - 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u^2 - 2u_x^2 + u_y + u_z + 2u_y u_z))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u^2 - 2u_x^2 + u_y - u_z - 2u_y u_z))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 + 2u_x u_y - u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 - 2u_x u_y - u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 + 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u_x^2 - 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u^2 - 2u_x^2 - u_y - u_z + 2u_y u_z))/8 \\ (\rho * c_s^2 + \rho_0 * (u^2 - 2u_x^2 - u_y + u_z - 2u_y u_z))/8 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

由于不可压 LBGK 模型<sup>[22]</sup>的平衡态分布函数可以看作是在 He-Luo LBGK 模型的基础上, 非 0 方向的平衡态分布函数中的  $\rho$  换成  $p/c_s^2$ , 与速度相乘的  $\rho_0$  令成 1, 0 方向的“平衡态分布函数”定义为  $\rho_0$  减去其他方向的平衡态分布函数之和. 按照这种方法, 变化 (13) 式, 则得到不可压 LBGK 模型式的“平衡态分布函数”, 如下所示:

$$\left( \begin{array}{c} -(3/2)p + \rho_0 - u^2/2 \\ (p + (u_x^2 + 2u_x u_y + u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_y + u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 + 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 + u_y + u_z + 2u_y u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 + u_y - u_z - 2u_y u_z))/8 \\ (p + (u_x^2 + 2u_x u_y - u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_y - u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 + 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 - u_y - u_z + 2u_y u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 - u_y + u_z - 2u_y u_z))/8 \end{array} \right), \quad (14)$$

去掉 (14) 式中的  $f_0$ , 得到下面 1—12 方向上的“平衡态分布函数”

$$\left( \begin{array}{c} (p + (u_x^2 + 2u_x u_y + u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_y + u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 + 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_z + u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 + u_y + u_z + 2u_y u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 + u_y - u_z - 2u_y u_z))/8 \\ (p + (u_x^2 + 2u_x u_y - u_x + u_y^2 - u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_y - u_x + u_y^2 + u_y - u_z^2))/8 \\ (p + (u_x^2 + 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 - u_z))/8 \\ (p + (u_x^2 - 2u_x u_z - u_x - u_y^2 + u_z^2 + u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 - u_y - u_z + 2u_y u_z))/8 \\ (p + (u^2 - 2u_x^2 - u_y + u_z - 2u_y u_z))/8 \end{array} \right). \quad (15)$$

#### 4 三维 12 速 MRT 模型

根据 d’Humières 等<sup>[29]</sup>提出的最原始的 D3Q13 MRT模型, 我们构造出了新的三维 12 速多松弛格子 Boltzmann 模型 (iD3Q12 MRT 模型). 首先将 13 速模型的 0 速度方向舍弃得到了 12 速模型的离散速度方向的集合:

$$\{c_1, c_2, \dots, c_{12}\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} c,$$

不失一般性, 这里假设粒子速度  $c = 1$ . iD3Q12 MRT 模型的演化方程为

$$\begin{aligned} & f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) \\ &= - \sum_{j=1}^{12} A_{ij} (f_j(\mathbf{x}, t) - f_j^{(eq)}(\mathbf{x}, t)), \\ & i = 1-12, \end{aligned} \quad (16)$$

$f_i(\mathbf{x}, t)$  是沿速度  $\mathbf{c}_i$  移动的粒子的分布函数,  $f_i^{(eq)}(\mathbf{x}, t)$  是平衡态分布函数,  $A_{ij}$  是  $12 \times 12$  阶碰撞矩阵  $\Lambda$  的元素. 同时, 演化方程也可以写作向量形式:

$$\begin{aligned} & |f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) - |f(\mathbf{x}, t) \\ &= - \Lambda (|f(\mathbf{x}, t) - |f^{(eq)}(\mathbf{x}, t)), \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $|f(\mathbf{x}, t) = (f_1(\mathbf{x}, t), f_2(\mathbf{x}, t), \dots, f_{12}(\mathbf{x}, t))'$  是列向量, 符号'代表转置算子. 构造一个 MRT 模型, 变换矩阵和矩平衡态的构造至关重要. 按照构造 D2Q8<sup>[32]</sup>, D3Q14 和 D3Q18 MRT 模型<sup>[33]</sup>的变换矩阵的方法构造了 iD3Q12 MRT 模型的变换矩阵, 在构造的过程中, 舍弃了 13 速 MRT 模型的矩中能量那一项, 得到的 iD3Q12 MRT 模型的变换矩阵如下:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

通过变换矩阵  $\mathbf{T}$  将分布函数  $f$  变换为矩阵  $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) = (P_1, u_x, u_y, u_z, 3S_{xx}, S_{\omega\omega}, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}, h_x, h_y, h_z)', \quad (19)$$

碰撞矩阵  $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}$ ,

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \text{diag}(\lambda_c, \lambda_c, \lambda_c, \lambda_c, \lambda_\nu, \lambda_\nu, \lambda'_\nu, \lambda'_\nu, \lambda'_\nu, \lambda_t, \lambda_t, \lambda_t), \quad (20)$$

$\lambda_c$  是与守恒矩相关的松弛因子, 由于守恒矩对应的平衡态是它本身, 因此这些松弛因子的取值不影响粒子的碰撞过程, 可以将它们取值为 0.  $\lambda_\nu$ ,  $\lambda'_\nu$  和  $\lambda_t$  是与非守恒矩相匹配的松弛因子, 为了保持模型的稳定性, 取值一般在 (0, 2). 我们选取的矩平衡态如下:

$$P_1^{(\text{eq})} = |\mathbf{u}|^2/2 + 3p/2, \quad (21a)$$

$$\begin{cases} j_x^{(\text{eq})} = u_x, \\ j_y^{(\text{eq})} = u_y, \\ j_z^{(\text{eq})} = u_z, \end{cases} \quad (21b)$$

$$\begin{cases} 3S_{xx}^{(\text{eq})} = 3u_x^2 - u^2, \\ S_{\omega\omega}^{(\text{eq})} = u_y^2 - u_z^2, \end{cases} \quad (21c)$$

$$\begin{cases} S_{xy}^{(\text{eq})} = u_x u_y, \\ S_{yz}^{(\text{eq})} = u_y u_z, \\ S_{xz}^{(\text{eq})} = u_x u_z, \end{cases} \quad (21d)$$

$$\begin{cases} h_x^{(\text{eq})} = 0, \\ h_y^{(\text{eq})} = 0, \\ h_z^{(\text{eq})} = 0, \end{cases} \quad (21e)$$

$p$  是压力,  $|\mathbf{u}|^2$  是速度  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  模的平方. 演化方程在矩空间的形式如下:

$$\begin{aligned} & |f(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \delta t, t + \delta t) \\ & = \mathbf{T}^{-1}[\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{(\text{eq})}(\mathbf{x}, t))], \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{m}^{(\text{eq})}(\mathbf{x}, t)$  是由 (21) 式定义的矩平衡态. 这样通过 C-E 展开, 可以将 iD3Q12 MRT 模型恢复到如下形式的 N-S 方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3p}{2} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (23a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \xi \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}), \quad (23b)$$

其中

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{2} \right) \delta t = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda'_\nu} - \frac{1}{2} \right) \delta t, \\ \xi &= \frac{1}{12} \left( \frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{2} \right) \delta t. \end{aligned} \quad (24)$$

若令  $\tau = 1/\lambda_\nu$ , 则

$$\nu = \frac{1}{4} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta t, \quad \xi = \frac{1}{12} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta t.$$

在低  $Ma$  条件下, 方程 (23) 可以写成如下形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (25a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (25b)$$

在 iD3Q12 MRT 模型中, 宏观量的计算如下:

$$p = \frac{2}{3} \left( \sum_{i=1}^{12} f_i - \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right), \quad \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{12} \mathbf{c}_i f_i. \quad (26)$$

### 5 数值模拟

为了验证提出的 iD3Q12 MRT 模型的有效性, 我们模拟了三维泊肃叶流、脉动流与顶盖驱动的方腔流. 值得注意的是, 在模型的建立和推导过程中, 假设  $c = \delta x / \delta t = 1$ . 但在实际的计算中,  $c$  有时不取 1. 这种情况下, 我们将宏观速度  $\mathbf{u}$ 、压力  $p$  进行单位化  $\mathbf{u}' = \mathbf{u}/c$ ,  $p' = p/c^2$ , 再将单位化后的量代入我们提出的模型进行计算, 计算结束后再将所得到的  $\mathbf{u}'$ 、 $p'$  分别乘以  $c$ ,  $c^2$ , 就得到我们所要求的宏观速度和压力. 同时, 剪切黏性系数按照  $\nu = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\lambda_\nu} - \frac{1}{2} \right) c^2 \delta t$  确定. 此外, 碰撞矩阵  $\hat{\mathbf{A}}$  中的松弛因子取定如下:  $\lambda_c = 1.0$ ,  $\lambda_\nu = 1/\tau$ ,  $\lambda_t = 1.8$ . 我们也给出了 He-Luo D3Q13 MRT 模型计算得到的有关结果. 对于边界条件, 使用的是非平衡态外推法<sup>[38]</sup>. 程序的计算流程如下:

1) 初始化 输入计算参数, 宏观速度  $\mathbf{u}$  和压力  $p$  的初始值都设置为 0, 并初始化分布函数  $\mathbf{f}$ ;

2) 矩空间碰撞

$$\mathbf{f}^+(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{A}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}^{(eq)}(\mathbf{x}, t)] \\ = \mathbf{T}^{-1}\{\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \hat{\mathbf{A}}[\mathbf{m}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{m}^{(eq)}(\mathbf{x}, t)]\}; \quad (27)$$

3) 速度空间迁移

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) = \mathbf{f}^+(\mathbf{x}, t); \quad (28)$$

4) 边界处理采用非平衡态外推法.

#### 5.1 三维稳态的泊肃叶流

如图 1 所示, 三维泊肃叶流的物理空间限制在一个长方体通道中, 其长、宽、高分别为  $0 \leq x \leq l$ ,  $-a \leq y \leq a$ ,  $-b \leq z \leq b$ ,  $l = 2$ ,  $a = b = 0.5$ , 原点  $O$  代表流体入口平面的中心.

边界条件设置为

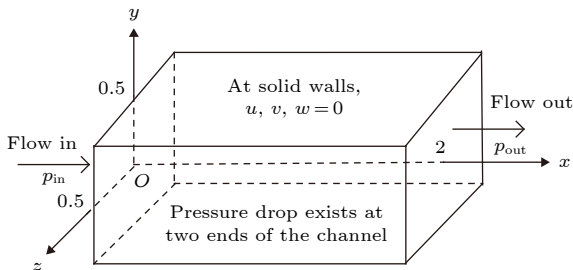


图 1 三维泊肃叶流示意图

Fig. 1. The schematic of three-dimensional Poiseuille flow.

$$\mathbf{u}(x, \pm a, z, t) = \mathbf{u}(x, y, \pm b, t) = 0, \quad (29a)$$

$$p(0, y, z, t) = p_{in}, \quad p(l, y, z, t) = p_{out}, \quad (29b)$$

$p_{in}$  和  $p_{out}$  分别表示进出口压力, 三维泊肃叶流具有稳态的解析解<sup>[39]</sup>

$$u_x(y, z, t) = \frac{16a^2}{\nu\pi^3} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(i-1)/2} \\ \times \left[ 1 - \frac{\cosh(i\pi z/(2a))}{\cosh(i\pi b/(2a))} \right] \\ \times \frac{\cos(i\pi y/(2a))}{i^3}, \quad (30a)$$

$$u_y(x, y, z, t) = u_z(x, y, z, t) = 0, \quad (30b)$$

$$p(x, t) = p_{in} + \frac{dp}{dx}x, \quad (30c)$$

$dp/dx = (p_{out} - p_{in})/l$  是通道内的压力梯度,  $\nu$  是流体的剪切黏度. 在模拟中, 初始状态是:

$$\mathbf{u}(x, y, z, 0) = \mathbf{0}, \quad p(0 < x < l, y, z, 0) = \frac{p_{in} + p_{out}}{2}, \quad (31)$$

并且设  $p_{in} = 1.1$  和  $p_{out} = 1.0$ , 模拟达到稳定状态的判定准则是

$$\frac{\sum_i |u_x(\mathbf{x}_i, t + \delta t) - u_x(\mathbf{x}_i, t)|}{\sum_i |u_x(\mathbf{x}_i, t)|} \leq 1.0 \times 10^{-10}, \quad (32)$$

$\sum_i$  表示求和遍布每一个网格点. 模拟首先在网格数为  $65 \times 33 \times 33$  的网格下进行, 且参数  $\nu = 0.03$ ,  $\lambda_\nu = 1.3$ . 图 2 显示了在  $x = 1$  截面处  $z$  取不同值时水平速度  $u_x$  随  $y$  变化的函数图像和在  $z = 0$  的截面处  $y$  取不同值时压力  $p$  随  $x$  变化的函数图像. 从图 2 可以看出 iD3Q12 MRT 模型在模拟稳态的泊肃叶流时所得到的数值解与已有的解析解符合得很好.

我们也计算了 iD3Q12 MRT 模型在模拟泊肃叶流时的空间精度的阶. 为此, 计算了不同空间步长下的泊肃叶流的速度场的全局相对误差  $GRE_u$ ,  $GRE_u$  的表达式为

$$GRE_u = \frac{\sqrt{\sum_i [(u_{xn} - u_{xa})^2 + (u_{yn} - u_{ya})^2 + (u_{zn} - u_{za})^2]}}{\sqrt{\sum_i [u_{xa}^2 + u_{ya}^2 + u_{za}^2]}}, \quad (33)$$

公式中的  $n$  和  $a$  分别表示数值解和解析解,  $u_x$ ,  $u_y$  和  $u_z$  是流体速度  $\mathbf{u}$  的三个分量, 同样的关于  $i$  的



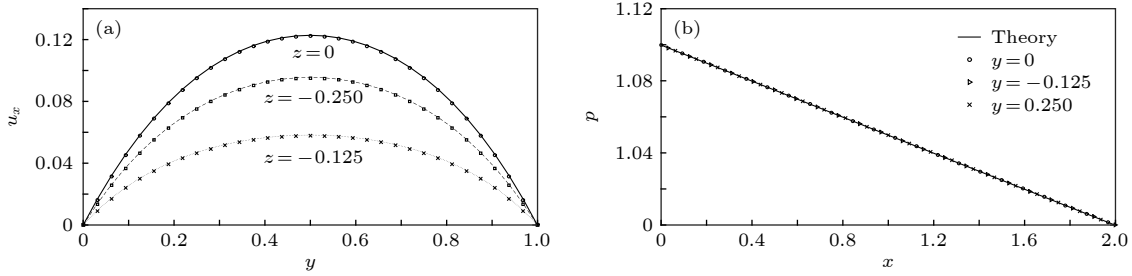


图 2 泊肃叶流数值解与解析解的对比 (a) 泊肃叶流在  $x = 1$  截面处  $z$  取不同的值时水平速度  $u_x$  随  $y$  变化的函数图像; (b) 在截面  $z = 0$  处  $y$  取不同的值时压力  $p$  随  $x$  变化的函数图像; 直线: 解析解; 符号: 数值解; 松弛因子  $\lambda_\nu = 1.3$

Fig. 2. Comparison between numerical and analytical solutions of Poiseuille flow: (a) The variation of  $u_x$  with  $y$  for different locations of  $z$  at section  $x = 1$  for Poiseuille flow; (b) the variation of pressure with  $x$  for different locations of  $y$  at section  $z = 0$  for Poiseuille flow. Lines, analytical solutions; symbols, numerical results; the relaxation parameter  $\lambda_\nu = 1.3$ .

表 1 iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型在不同松弛因子  $\lambda_\nu$  和不同空间步长下计算得到的泊肃叶流的速度场的全局相对误差  $GRE_u$

Table 1. The  $GRE_u$  of velocity field for Poiseuille flow computed by iD3Q12 MRT and D3Q13 MRT models under different relaxation parameters and different lattice spacings.

| $GRE_u$                                   | Lattice spacing $\delta x$ |                        |                        |                        | Model      |
|---|----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------|
|   | 1/8                        | 1/16                   | 1/32                   | 1/64                   |            |
| $\lambda_\nu = 0.8, \lambda'_\nu = 1.143$ | $3.090 \times 10^{-2}$     | $7.700 \times 10^{-3}$ | $1.900 \times 10^{-3}$ | $4.623 \times 10^{-4}$ | iD3Q12 MRT |
|   | $3.090 \times 10^{-2}$     | $7.700 \times 10^{-3}$ | $1.900 \times 10^{-3}$ | $4.623 \times 10^{-4}$ | D3Q13 MRT  |
| $\lambda_\nu = 1.0, \lambda'_\nu = 1.333$ | $5.990 \times 10^{-2}$     | $1.660 \times 10^{-2}$ | $4.400 \times 10^{-3}$ | $1.100 \times 10^{-3}$ | iD3Q12 MRT |
|   | $5.990 \times 10^{-2}$     | $1.660 \times 10^{-2}$ | $4.400 \times 10^{-3}$ | $1.100 \times 10^{-3}$ | D3Q13 MRT  |
| $\lambda_\nu = 1.3, \lambda'_\nu = 1.576$ | $8.720 \times 10^{-2}$     | $2.500 \times 10^{-2}$ | $6.700 \times 10^{-3}$ | $1.700 \times 10^{-3}$ | iD3Q12 MRT |
|   | $8.720 \times 10^{-2}$     | $2.500 \times 10^{-2}$ | $6.700 \times 10^{-3}$ | $1.700 \times 10^{-3}$ | D3Q13 MRT  |

求和遍及所有网格点. 在不同松弛参数和不同空间步长下由 iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型计算的泊肃叶流的速度场的全局相对误差  $GRE_u$  列在表 1 中. 值得注意的是, 在同样的参数下, 这两个模型的全局相对误差是完全一样的.

假设  $GRE_u = a(\delta x)^b (a > 0)$ , 然后我们得到

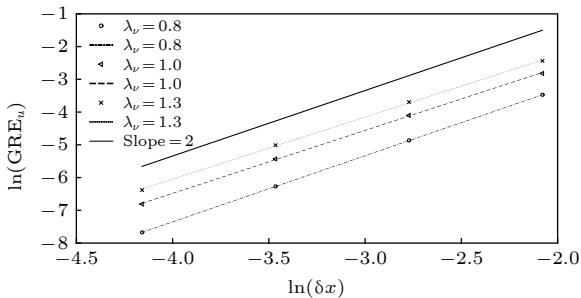


图 3 不同的  $\lambda_\nu$  下, 模拟泊肃叶流得到的速度场的全局相对误差  $GRE_u$  随空间步长  $\delta x$  的变化, 符号代表数值解, 连线表示拟合直线

Fig. 3. The variation of  $GRE_u$  of velocity field with the lattice spacing  $\delta x$  at different  $\lambda_\nu$  for Poiseuille flow. Symbols represent numerical solutions, lines represent fitting line.

$\ln(GRE_u) = b \ln(\delta x) + \ln(a)$ . 如果  $b = 2$ , 就称数值解具有二阶精度. 用表 1 中的数据进行最小二乘法的线性拟合, 线性拟合的图像在图 3 中显示. 图中三条直线分别对应着 iD3Q12 MRT 模型在  $\lambda_\nu = 0.8, 1.0$  和  $1.3$  下的拟合直线, 它们对应的斜率分别为 1.94, 1.91 和 1.88, 都接近 2. 这说明我们提出的 iD3Q12 MRT 模型在模拟稳态的泊肃叶流时能够达到二阶的空间精度.

### 5.2 三维非稳态的脉动流

模拟三维脉动流是为了验证所提出的 iD3Q12 MRT 模型在模拟非稳态流时的精度. 脉动流的流域与泊肃叶流的流域相同, 如图 1 所示. 但脉动流在管道进出口两端的压力梯度是周期性变化的, 压力梯度为

$$\frac{dp}{dx} = G \cos(\omega t), \quad (34)$$

其中  $G$  是振幅,  $\omega$  是频率. 脉动流的解析解是<sup>[40]</sup>

$$u_x(y, z, t) = \text{Re} \left( i \frac{G}{\omega} \left\{ 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p_n} \left[ \frac{\cosh(\gamma_n y/b) \cos(p_n z/b)}{\cosh(\gamma_n a/b)} + \frac{\cosh(\sigma_n z/b) \cos(q_n y/b)}{\cosh(\sigma_n)} \right] \right\} e^{i\omega t} \right), \quad (35)$$

其中

$$\gamma_n = \sqrt{p_n^2 + i\eta^2}, \quad \sigma_n = \sqrt{q_n^2 + i\eta^2}, \quad (36a)$$

$$p_n = \frac{2n+1}{2}\pi, \quad q_n = \frac{2n+1}{2}\pi \frac{b}{a}, \quad (36b)$$

$\eta = b\sqrt{\omega/\nu}$  是沃门斯里 (Womersley number) 数. 我们将参数设置如下, 网格大小为  $81 \times 41 \times 41$ , 压力变化的周期  $T = 100$ , 频率  $\omega = 2\pi/T$ , 模拟中进出口压力分别设置为  $p_{in} = 0.999$ ,  $p_{out} = 1.0$ , 沿着管道的压力梯度的振幅  $G = \Delta p/l = 0.0005$ , 时间步长  $\delta t = 0.0125$ . 流动的初始状态的设置与泊肃叶流的初始状态的设置是一致的, 如 (31) 式所示. 计算的收敛准则是

$$\frac{\sum_i |u_x(\mathbf{x}_i, t+T) - u_x(\mathbf{x}_i, t)|}{\sum_i |u_x(\mathbf{x}_i, t+T)|} \leq 6.0 \times 10^{-14}, \quad (37)$$

关于  $i$  的求和遍及所有网格点. 图 4 显示了在四个不同时刻  $t = T/4, T/2, 3T/4$  和  $T$  下, 在直线  $x = 1$ ,  $z = 0$  上水平速度  $u_x$  随  $y$  变化的函数图像, 此时  $\eta = 2.8285$ ,  $\lambda_\nu = 1.522$ . 水平速度  $u_x$  由  $U_{max}$  无量纲化,  $U_{max} = 1.876 \times 10^{-2}$  是泊肃叶流在进出口压差为  $p_{out} - p_{in} = -G * l$  时的最大水平速度. 从图 4 可以得出 iD3Q12 MRT 模型在模拟非稳态流时得到的数值解与解析解符合较好.

表 2 给出了在  $\eta = 2.8285$  且  $\tau = 1/\lambda_\nu$ ,  $\nu$  一定

表 2 在  $\eta = 2.8285$  时, 不同空间步长下用 iD3Q12 MRT 模型和 D3Q13 MRT 模型模拟脉动流所得的不同时刻下的速度场的全局相对误差  $GRE_u$

Table 2. The global relative errors of the velocity field at different times for pulsatile flow simulated by iD3Q12 MRT and D3Q13 MRT models at different lattice spacings,  $\eta = 2.8285$ .

| Lattice spacing   | $GRE_u$                |                        |                        |                        | Model      |
|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------|
|                   | $T/4$                  | $T/2$                  | $3T/4$                 | $T$                    |            |
| $\delta x = 1/20$ | $1.483 \times 10^{-2}$ | $4.214 \times 10^{-2}$ | $1.805 \times 10^{-2}$ | $4.028 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|                   | $1.662 \times 10^{-2}$ | $4.733 \times 10^{-2}$ | $2.118 \times 10^{-2}$ | $4.299 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| $\delta x = 1/40$ | $3.803 \times 10^{-3}$ | $1.199 \times 10^{-2}$ | $4.651 \times 10^{-3}$ | $1.153 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|                   | $4.172 \times 10^{-3}$ | $1.324 \times 10^{-2}$ | $5.398 \times 10^{-3}$ | $1.217 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| $\delta x = 1/60$ | $1.702 \times 10^{-3}$ | $5.569 \times 10^{-3}$ | $2.085 \times 10^{-3}$ | $5.369 \times 10^{-3}$ | iD3Q12 MRT |
|                   | $1.855 \times 10^{-3}$ | $6.116 \times 10^{-3}$ | $2.412 \times 10^{-3}$ | $5.648 \times 10^{-3}$ | D3Q13 MRT  |
| $\delta x = 1/80$ | $9.605 \times 10^{-4}$ | $3.204 \times 10^{-3}$ | $1.177 \times 10^{-3}$ | $3.092 \times 10^{-3}$ | iD3Q12 MRT |
|                   | $1.043 \times 10^{-3}$ | $3.509 \times 10^{-3}$ | $1.360 \times 10^{-3}$ | $3.247 \times 10^{-3}$ | D3Q13 MRT  |

的条件下, 用 iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型模拟脉动流时得到的速度场的全局相对误差  $GRE_u$ . 表 3 显示了由表 2 中的数据计算得到的相邻的两个空间步长下的 iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型的空间精度的阶  $\frac{[\ln(GRE_u)]_f - [\ln(GRE_u)]_c}{[\ln(\delta x)]_f - [\ln(\delta x)]_c}$ , 这里  $f$  表示小的空间步长,  $c$  表示大的空间步长. 从表 2 中可以看出, 在四个不同时刻下由 iD3Q12 MRT 模型计算的速度场的全局相对误差都比 D3Q13 MRT 模型计算的速度场的全局相对误差要略小一些. 从表 3 中可以发现 D3Q13 MRT 模型比 iD3Q12 MRT 模型的阶稍微更接近于 2. 根据表 2 中的数据, 我们绘制了用 iD3Q12 MRT 模型计算得到的速度场的全局相对误差  $GRE_u$  随空间步长  $\delta x$  变化的函数图像, 如图 5 所示. 在四个不同时刻  $t = T/4, T/2, 3T/4$  和  $T$  下拟合直线的斜率分别是 1.98, 1.88, 1.97 和 1.87, 这说明 iD3Q12 MRT 模型在模拟非稳态脉动流时具有二阶的空间精度.

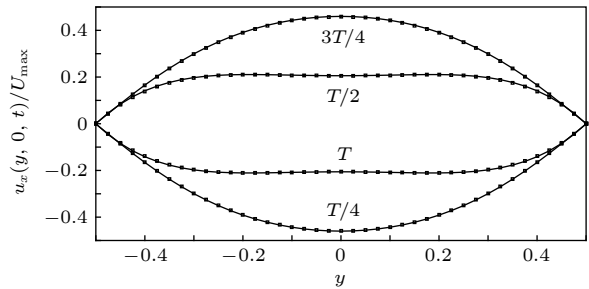


图 4 在  $\eta = 2.8285$  时脉动流在  $x = 1$ ,  $z = 0$  处水平速度  $u_x$  随  $y$  变化的函数. 直线: 解析解; 符号: 数值解

Fig. 4. The variation of horizontal velocity  $u_x$  with  $y$  for pulsatile flow at the location  $x = 1$ ,  $z = 0$ ,  $\eta = 2.8285$ . Line, analytical solutions; symbols, numerical solutions.

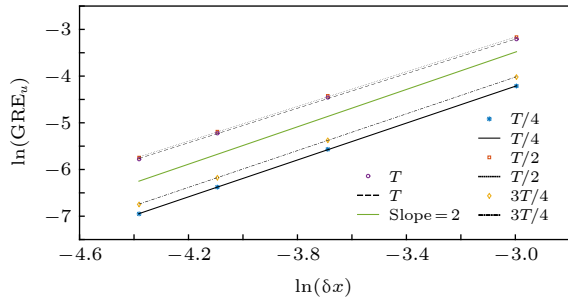


图 5 同一周期四个不同时刻下变量  $GRE_u$  随空间步长  $\delta x$  的变化

Fig. 5. The variation of  $GRE_u$  with the lattice spacing at four different times in a period for pulsatile flow.

表 3 相邻空间步长下的 iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型的空间精度的阶

Table 3. The orders of the spatial accuracy of iD3Q12 MRT and D3Q13 MRT models under adjacent spacings.

| Adjacent spacing        | Order |       |        |       | Model      |
|-------------------------|-------|-------|--------|-------|------------|
|                         | $T/4$ | $T/2$ | $3T/4$ | $T$   |            |
| Average                 | 1.978 | 1.875 | 1.974  | 1.869 | iD3Q12 MRT |
|                         | 1.998 | 1.891 | 1.984  | 1.879 | D3Q13 MRT  |
| $1/20 \rightarrow 1/40$ | 1.963 | 1.813 | 1.956  | 1.805 | iD3Q12 MRT |
|                         | 1.994 | 1.838 | 1.972  | 1.821 | D3Q13 MRT  |
| $1/40 \rightarrow 1/60$ | 1.983 | 1.891 | 1.979  | 1.885 | iD3Q12 MRT |
|                         | 1.999 | 1.905 | 1.987  | 1.893 | D3Q13 MRT  |
| $1/60 \rightarrow 1/80$ | 1.989 | 1.922 | 1.988  | 1.918 | iD3Q12 MRT |
|                         | 2.001 | 1.931 | 1.992  | 1.924 | D3Q13 MRT  |

表 4 在  $\tau = 0.5667$ ,  $\eta = 4.3416$ , 最大压差  $\Delta p$  增大时不同的空间步长下由 iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型模拟的脉动流在时刻  $T$  下的速度场所计算的全局相对误差  $GRE_u$ , 空白处表示计算发散

Table 4. The global relative error calculated by the velocity field at time  $T$  of pulsatile flow simulated by the iD3Q12 MRT and D3Q13 MRT models under different lattice spacings. The maximal pressure drop  $\Delta p$  of the channel increases,  $\tau = 0.5567$ ,  $\eta = 4.3416$  are fixed. The blank indicates that the computation is divergent.

| $\Delta p$ | Lattice spacing $\delta x$ |                        |                        |                        | Model      |
|------------|----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------|
|            | $1/20$                     | $1/40$                 | $1/60$                 | $1/80$                 |            |
| 0.005      | $9.919 \times 10^{-2}$     | $3.030 \times 10^{-2}$ | $1.442 \times 10^{-2}$ | $8.402 \times 10^{-3}$ | iD3Q12 MRT |
|            | $1.121 \times 10^{-1}$     | $3.326 \times 10^{-2}$ | $1.568 \times 10^{-2}$ | $9.084 \times 10^{-3}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.010      | $1.172 \times 10^{-1}$     | $3.445 \times 10^{-2}$ | $1.618 \times 10^{-2}$ | $9.362 \times 10^{-3}$ | iD3Q12 MRT |
|            | $1.679 \times 10^{-1}$     | $4.763 \times 10^{-2}$ | $2.199 \times 10^{-2}$ | $1.260 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.020      | $1.777 \times 10^{-1}$     | $5.110 \times 10^{-2}$ | $2.365 \times 10^{-2}$ | $1.355 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            | $2.940 \times 10^{-1}$     | $8.630 \times 10^{-2}$ | $3.987 \times 10^{-2}$ | $2.279 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.050      |                            | $1.243 \times 10^{-1}$ | $5.848 \times 10^{-2}$ | $3.386 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            |                            | $2.025 \times 10^{-1}$ | $9.868 \times 10^{-2}$ | $5.757 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.080      |                            |                        |                        | $6.073 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            |                            |                        | $1.575 \times 10^{-2}$ | $9.405 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.100      |                            |                        |                        |                        | iD3Q12 MRT |
|            |                            |                        |                        | $1.192 \times 10^{-1}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.120      |                            |                        |                        |                        | iD3Q12 MRT |
|            |                            |                        |                        | $1.454 \times 10^{-1}$ | D3Q13 MRT  |

表 5 在  $\delta x = 1/20$  时, 最大压差  $\Delta p$  增大时不同的松弛时间  $\tau$  下由 iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型模拟的脉动流由  $T$  时刻的速度场计算得出的全局相对误差  $GRE_u$ , 空白处表示计算发散

Table 5. The global relative error of the velocity field at time  $T$  of the pulsatile flow simulated by the iD3Q12 MRT and D3Q13 MRT models under different relaxation time  $\tau$ . The maximal pressure drop of the channel is increased and  $\delta x = 1/20$  is fixed. The blank indicates that the computation is divergent.

| $\Delta p$ | $\tau$                 |                        |                        |                        | Model      |
|------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------|
|            | 0.55                   | 0.60                   | 0.70                   | 0.90                   |            |
| 0.005      | $1.302 \times 10^{-1}$ | $6.311 \times 10^{-2}$ | $2.955 \times 10^{-2}$ | $1.744 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            | $1.556 \times 10^{-1}$ | $6.560 \times 10^{-3}$ | $3.023 \times 10^{-2}$ | $1.993 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.010      | $1.612 \times 10^{-1}$ | $6.830 \times 10^{-2}$ | $2.711 \times 10^{-2}$ | $1.736 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            | $2.435 \times 10^{-1}$ | $8.735 \times 10^{-2}$ | $2.661 \times 10^{-2}$ | $2.058 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.020      | $2.475 \times 10^{-1}$ | $9.926 \times 10^{-2}$ | $2.624 \times 10^{-2}$ | $1.656 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            | $4.182 \times 10^{-1}$ | $1.542 \times 10^{-1}$ | $2.757 \times 10^{-2}$ | $2.195 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.030      |                        | $1.430 \times 10^{-1}$ | $3.421 \times 10^{-2}$ | $1.509 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            | $5.482 \times 10^{-1}$ | $2.193 \times 10^{-1}$ | $3.616 \times 10^{-2}$ | $2.343 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.040      |                        |                        | $5.001 \times 10^{-2}$ | $1.349 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            |                        |                        | $4.693 \times 10^{-2}$ | $2.502 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |
| 0.050      |                        |                        |                        | $1.291 \times 10^{-2}$ | iD3Q12 MRT |
|            |                        |                        |                        | $2.674 \times 10^{-2}$ | D3Q13 MRT  |

模型的计算精度要高. 随着最大压差  $\Delta p$  的增加 iD3Q12 MRT 模型的计算开始发散但 D3Q13 MRT 模型却没有发散, 如  $\delta x = 1/60$  且  $\Delta p = 0.08$  时. 当空间步长变为  $\delta x = 1/80$  时再继续增大最大压差  $\Delta p$  同样会出现类似的情形, 如  $\Delta p = 0.10$  和  $\Delta p = 0.12$ , 这说明 D3Q13 MRT 模型在稳定性方面较 iD3Q12 MRT 模型更好. 从表 5 的数据可以看出不同的  $\tau$  下, iD3Q12 MRT 模型计算得到的速度场的全局相对误差在绝大部分情况下都比 D3Q13 MRT 模型的要略小一些, 但也有个别反常情形, 如  $\tau = 0.70$  且  $\Delta p = 0.01$  或  $\Delta p = 0.04$  时. 在表 5 中还发现和表 4 相似的情形, 即在  $\tau = 0.55$  时增大最大压差  $\Delta p$  出现了 iD3Q12 MRT 模型先发散的情形, 如  $\Delta p = 0.03$  时. 从表 5 中还可以发现, 当  $\tau$  更小时, 增加  $\Delta p$ , iD3Q12 MRT 和 D3Q13 MRT 模型容易发散. 因此, 在  $\Delta p$  较大时, 适当地增大  $\tau$  可以提升两个模型的稳定性.

### 5.3 三维顶盖驱动的方腔流

三维方腔流包含旋涡运动, Ku 等<sup>[41]</sup> 采用伪谱方法计算的结果常被用作新数值方法模拟方腔流精度的评判标准, 因此我们也采用 Ku 的计算结果来检验 iD3Q12 MRT 模型的精度.

流动是在一个立方体盒子中进行的, 如图 6 所示. 流体是由最顶端的盖子以常速度  $U_0 = 1.0$  移动

而被驱动. 流动满足三维不可压 N-S 方程. 雷诺数可由  $Re = U_0 L / \nu$  计算, 这里  $L = 1.0$  是立方体盒子的长度,  $\nu$  是剪切黏度. 在模拟中, 初始状态的速度和压力都设置为 0. 在  $z = 0.5$  的截面上, 对称的边界条件设置为

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0, u_z = 0. \quad (38)$$

在  $y = 1$  的截面上  $x = 0$  和  $x = 1$  处  $\mathbf{u} = 0$ . 在  $y = 1$  且  $x = 0$  和  $x = 1$  旁边的点处分别设置  $u_x = 0.3$  和  $u_x = 1.0$ . 初始条件和边界条件的设置与 Ku 等<sup>[41]</sup> 的相同. 此外, 为了满足低  $Ma$  假设, 固定  $c = 10$ ,  $c \neq 1$  时 MRT 模型的计算见参考文献 [31]. 速度域的收敛准则是:

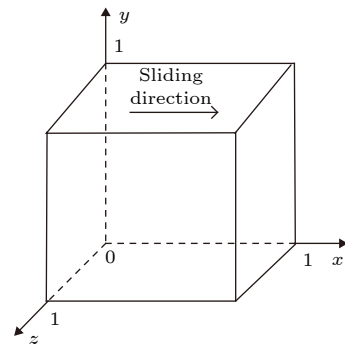


图 6 三维顶盖驱动的方腔流示意图

Fig. 6. The schematic of three-dimensional lid-driven cavity flow.

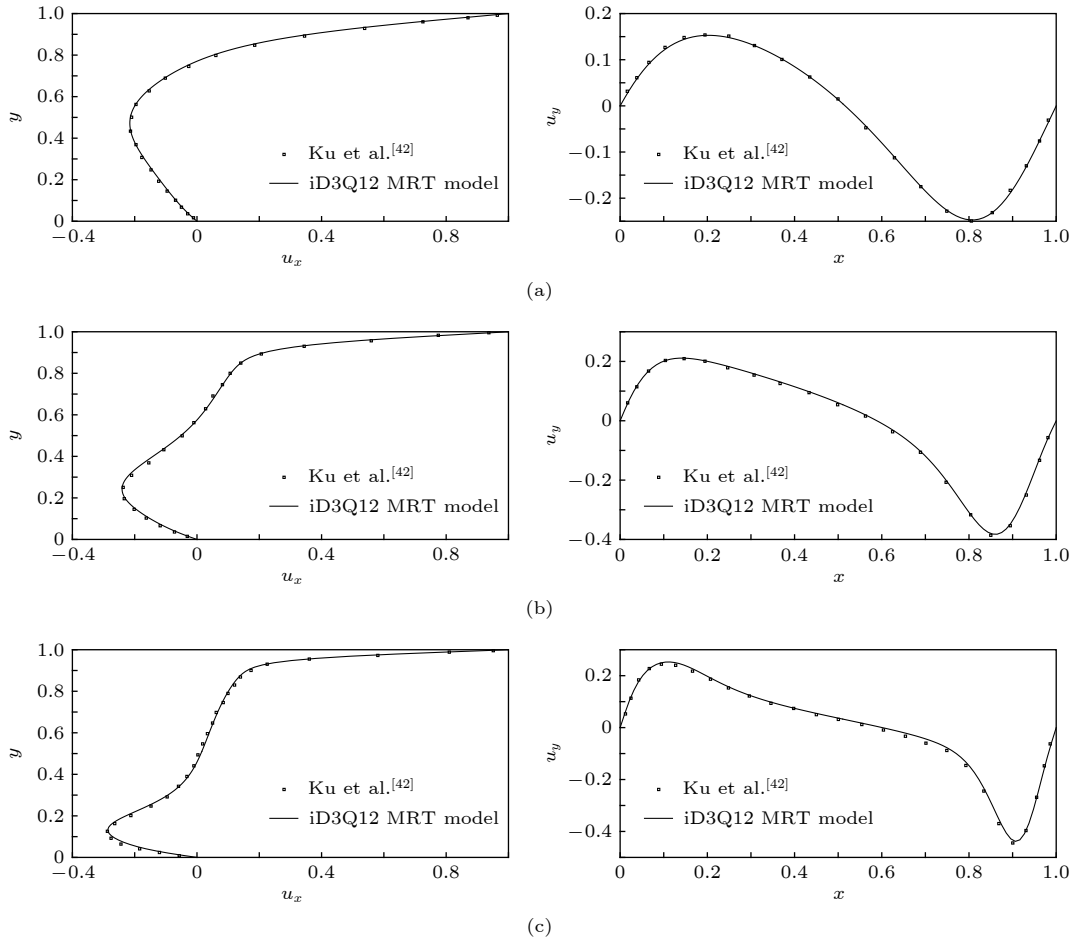


图 7 不同的雷诺数下模拟方腔流, 在截面  $z = 0.5$  处竖直和水平中心线的速度分布 (a)  $Re = 100$ ; (b)  $Re = 400$ ; (c)  $Re = 1000$

Fig. 7. The velocity distribution in the vertical and horizontal center lines at section  $z = 0.5$  for cavity flows at different  $Re$ : (a)  $Re = 100$ ; (b)  $Re = 400$ ; (c)  $Re = 1000$ .

表 6 不断增大雷诺数比较 iD3Q12 MRT 和 He-Luo D3Q13 MRT 模型在模拟方腔流时的稳定性. ✓代表收敛, 收敛准则是 (39) 式

Table 6. Comparing the stability of iD3Q12 MRT and He-Luo D3Q13 MRT models for three-dimensional cavity flows when the Reynolds number is continuously increased. The tick represents convergence, the convergence criterion is formula (39).

| $Re$ | Model      |                  |
|------|------------|------------------|
|      | iD3Q12 MRT | He-Luo D3Q13 MRT |
| 100  | ✓          | ✓                |
| 400  | ✓          | ✓                |
| 1000 | ✓          | ✓                |
| 1500 | ✓          | ✓                |
| 1600 | ✓          | ✓                |
| 1700 | divergent  | ✓                |
| 1800 | divergent  | divergent        |

$$\frac{\sum_i \sum_k |\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_i, t + 1000\delta t) - \mathbf{u}_k(\mathbf{x}_i, t)|}{\sum_i \sum_k |\mathbf{u}_k(\mathbf{x}_i, t + 1000\delta t)|} \leq 1.0 \times 10^{-14}, \quad (39)$$

对  $i$  和  $k$  的求和遍及所有的网格点和所有的速度方向. 首先采用 iD3Q12 MRT 模型模拟了  $Re = 100, 400$  和  $1000$  时的流动, 并将模拟结果与已有的 Ku 等<sup>[41]</sup>的结果作对比, 如图 7 所示. 可以看出由 iD3Q12 MRT 模型计算的数值结果与 Ku 等<sup>[41]</sup>的结果符合得很好, 因此我们提出的 iD3Q12 MRT 模型在模拟三维顶盖驱动的方腔流时是准确的.

不断地增大雷诺数时我们观察并记录了 iD3Q12 MRT 和 He-Luo D3Q13 MRT 模型在模拟方腔流时的敛散性, 结果显示在表 6 中. 从中可以看到在增大雷诺数时 iD3Q12 MRT 模型的稳定性比 He-Luo D3Q13 MRT 模型的稳定性稍弱一些.

## 6 结 论

提出了求解三维不可压缩流的 12 速多松弛格子 Boltzmann 模型, 即 iD3Q12 MRT 模型, 它可能是现有的能推导出不可压 N-S 方程的三维 MRT 模型中离散速度方向最少的一个模型, 因此原则上具有更高的计算效率. 构建 iD3Q12 MRT 模型的基本思想是构造一个  $12 \times 12$  阶的正交变换矩阵, 并选取合适的矩平衡态使新模型能通过 C-E 展开恢复到不可压的 N-S 方程. 用 iD3Q12 MRT 模型分别模拟了稳态的泊肃叶流、非稳态的脉动流、顶盖驱动的方腔流, 验证了模型的准确性和稳定性, 并将其准确性和稳定性与 He-Luo D3Q13 MRT 模型作了对比.

对于泊肃叶流和脉动流, iD3Q12 MRT 模型的数值解和解析解符合得很好, 这说明 iD3Q12 MRT 模型在模拟稳态流和非稳态流时都是准确的. 在不同的空间步长  $\Delta x$  和松弛因子  $\lambda_\nu$  下用 iD3Q12 MRT 模型和 He-Luo D3Q13 MRT 模型模拟泊肃叶流, 发现两个模型的全局相对误差  $GRE_u$  完全相同. 用两个模型模拟了脉动流并计算了不同空间步长  $\Delta x$  和不同时刻下的全局相对误差, 发现 iD3Q12 MRT 模型的全局相对误差  $GRE_u$  比 He-Luo D3Q13 MRT 模型稍小一些. 全局相对误差随空间步长的变化表明两个模型在模拟稳态的泊肃叶流和非稳态的脉动流时都具有二阶精度. 还通过增大管道最大压降  $\Delta p$  并调节空间步长  $\Delta x$  或松弛时间  $\tau$  的方式模拟了脉动流, 发现在大部分的参数下 iD3Q12 MRT 模型计算的流场的全局相对误差  $GRE_u$  比 He-Luo D3Q13 MRT 模型计算的流场的全局相对误差要小一些, 但随着最大压降的增大 iD3Q12 MRT 模型比 D3Q13 MRT 模型先发散. 这说明在模拟非稳态流时 iD3Q12 MRT 模型比 D3Q13 MRT 模型的准确性稍高但在稳定性方面弱一些. 此外, 用 iD3Q12 MRT 模型模拟了包含旋涡运动的三维顶盖驱动方腔流, 发现 iD3Q12 MRT 模型的模拟结果与已有的 Ku 等的结果符合得很好, 并且 iD3Q12 MRT 模型能模拟的最大雷诺数比 He-Luo D3Q13 MRT 模型的要稍小.

### 附录 iD3Q12 MRT 模型的 Chapman-Enskog 展开

通过 C-E 展开将 iD3Q12 MRT 模型恢复到三维不可

压的 N-S 方程. 对于不可压缩流有

$$O(\delta p) = O(\delta \rho) = O(Ma^2), \quad (A1a)$$

$$O(\mathbf{u}) = O(Ma), \quad (A1b)$$

这里  $Ma$  代表马赫数,  $\delta p$  和  $\delta \rho$  分别代表压力和密度的脉动量. 首先引入展开

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} D_i^n f_i(\mathbf{x}, t), \quad (A2a)$$

$$f_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n f_i^{(n)}, \quad (A2b)$$

$$\partial_t = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \partial_{t_n}, \quad (A2c)$$

这里  $\varepsilon = \delta t$ ,  $D_i \equiv \partial_t + \mathbf{c}_i \cdot \nabla = \partial_t + \mathbf{c}_{i\alpha} \cdot \partial_\alpha = \partial_t + c_{ix} \partial_x + c_{iy} \partial_y + c_{iz} \partial_z$ , 运用上述 (A2) 式展开, 并将演化方程

$$\begin{aligned} & f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) \\ &= - \sum_{j=1}^{12} A_{ij} (f_j(\mathbf{x}, t) - f_j^{(eq)}(\mathbf{x}, t)), \quad i = 1-12, \end{aligned} \quad (A3)$$

做 Taylor 展开, 按照  $\varepsilon$  的不同阶可得:

$$O(\varepsilon^0) : f_i^{(0)} = f_i^{(eq)}, \quad (A4a)$$

$$O(\varepsilon^1) : D_{i0} f_i^{(0)} = - \sum_{j=1}^{12} A_{ij} f_j^{(1)}, \quad (A4b)$$

$$O(\varepsilon^2) : \partial_{t_1} f_i^{(0)} + D_{i0} \left( f_i^{(1)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{12} A_{ij} f_j^{(1)} \right) = - \sum_{j=1}^{12} A_{ij} f_j^{(2)}, \quad (A4c)$$

这里  $D_{i0} \equiv \partial_{t_0} + \mathbf{c}_i \cdot \nabla = \partial_t + \mathbf{c}_{i\alpha} \cdot \partial_\alpha = \partial_{t_0} + c_{ix} \partial_x + c_{iy} \partial_y + c_{iz} \partial_z$ , 并且将方程 (A4b) 代入到方程 (A4c) 中, 方程 (A4) 可以转化到矩空间中:

$$\mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{m}^{(eq)}, \quad (A5a)$$

$$(\partial_{t_0} \mathbf{I} + \hat{\mathbf{C}}_k \partial_k) \mathbf{m}^{(0)} = - \hat{\mathbf{A}} \mathbf{m}^{(1)}, \quad (A5b)$$

$$\partial_{t_1} \mathbf{m}^{(0)} + (\partial_{t_0} \mathbf{I} + \hat{\mathbf{C}}_k \partial_k) \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{A}} \right) \mathbf{m}^{(1)} = - \hat{\mathbf{A}} \mathbf{m}^{(2)}, \quad (A5c)$$

$\hat{\mathbf{C}}_k = \mathbf{T} \mathbf{C}_k \mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}_k$  是以离散速度  $\mathbf{c}_i$  的第  $k$  个分量作为对角线元素的对角矩阵,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{(n)} &= \left( 0, 0, 0, 0, 3S_{xx}^{(n)}, S_{\omega\omega}^{(n)}, S_{xy}^{(n)}, S_{yz}^{(n)}, \right. \\ & \left. S_{zx}^{(n)}, h_x^{(n)}, h_y^{(n)}, h_z^{(n)} \right)', \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (A6)$$

值得注意的是,  $P_1$  和  $u_x, u_y, u_z$  在低  $Ma$  下是守恒量, 这样  $P_1^{(n)}$  和  $u_x^{(n)}, u_y^{(n)}, u_z^{(n)}$  在表达式 (A6) 中都为 0. 展开方程 (A5b) 有

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_0} \begin{bmatrix} u^2/2 + 3p/2 \\ u_x \\ u_y \\ u_z \\ 3u_x^2 - u^2 \\ u_y^2 - u_z^2 \\ u_x u_y \\ u_y u_z \\ u_x u_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \partial_x \begin{bmatrix} u_x \\ u_x^2 + p \\ u_x u_y \\ u_x u_z \\ u_x \\ 0 \\ u_y/2 \\ 0 \\ u_z/2 \\ u_y^2 - u_z^2 \\ -u_x u_y \\ u_x u_z \end{bmatrix} + \partial_y \begin{bmatrix} u_y \\ u_x u_y \\ u_y^2 + p \\ u_y u_z \\ -u_y/2 \\ u_y/2 \\ u_x/2 \\ u_z/2 \\ 0 \\ u_x u_y \\ u_z^2 - u_x^2 \\ -u_y u_z \end{bmatrix} \\
 + \partial_z \begin{bmatrix} u_z \\ u_x u_z \\ u_y u_z \\ u_z^2 + p \\ -u_z/2 \\ -u_z/2 \\ 0 \\ u_y/2 \\ u_x/2 \\ -u_x u_z \\ u_y u_z \\ u_x^2 - u_y^2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda_\nu 3S_{xx}^{(1)} \\ -\lambda_\nu S_{\omega\omega}^{(1)} \\ -\lambda'_\nu S_{xy}^{(1)} \\ -\lambda'_\nu S_{yz}^{(1)} \\ -\lambda'_\nu S_{zx}^{(1)} \\ -\lambda_t h_x^{(1)} \\ -\lambda_t h_y^{(1)} \\ -\lambda_t h_z^{(1)} \end{bmatrix}. \tag{A7}
 \end{aligned}$$

(A7) 式的前 4 个方程是

$$\partial_{t_0}(3p/2 + u^2/2) + \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0, \tag{A8}$$

$$\partial_{t_0} u_x + \partial_x(p + u_x^2) + \partial_y(u_x u_y) + \partial_z(u_x u_z) = 0, \tag{A9a}$$

$$\partial_{t_0} u_y + \partial_x(u_x u_y) + \partial_y(p + u_y^2) + \partial_z(u_y u_z) = 0, \tag{A9b}$$

$$\partial_{t_0} u_z + \partial_x(u_x u_z) + \partial_y(u_y u_z) + \partial_z(p + u_z^2) = 0. \tag{A9c}$$

从 (A1a) 与 (A1b) 可以得到  $O(\delta p) = O(M^2)$  和  $O(\mathbf{u}) = O(M)$ , 有  $\partial_{t_0}(3p/2 + u^2/2) = O(M^2)$ . 忽略  $O(M^2)$  项, 方程 (A8) 变成

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0, \tag{A10}$$

它是不可压 N-S 方程的连续方程. 从方程 (A5c) 中可得

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_1} u_x + \partial_x[(1 - \lambda_\nu/2)S_{xx}^{(1)}] + \partial_y[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{xy}^{(1)}] \\
 + \partial_z[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{zx}^{(1)}] = 0, \tag{A11a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_1} u_y + \partial_x[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{xy}^{(1)}] + \partial_y[(1 - \lambda_\nu/2)(S_{\omega\omega}^{(1)} \\
 - S_{xx}^{(1)})/2] + \partial_z[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{yz}^{(1)}] = 0, \tag{A11b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_{t_1} u_z + \partial_x[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{zx}^{(1)}] - \partial_z[(1 - \lambda_\nu/2)(S_{\omega\omega}^{(1)} \\
 + S_{xx}^{(1)})/2] + \partial_y[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{yz}^{(1)}] = 0, \tag{A11c}
 \end{aligned}$$

由 (A9) 式 +  $\varepsilon \times$  (A11) 式可得

$$\begin{aligned}
 \partial_t u_x + \partial_x(p + u_x^2) + \partial_y(u_x u_y) + \partial_z(u_x u_z) \\
 = -\varepsilon\{\partial_x[(1 - \lambda_\nu/2)S_{xx}^{(1)}] \\
 + \partial_y[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{xy}^{(1)}] + \partial_z[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{zx}^{(1)}]\}, \tag{A12a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t u_y + \partial_x(u_x u_y) + \partial_y(p + u_y^2) + \partial_z(u_y u_z) \\
 = -\varepsilon\{\partial_x[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{xy}^{(1)}] \\
 + \partial_y[(1 - \lambda_\nu/2)(S_{\omega\omega}^{(1)} - S_{xx}^{(1)})/2] + \partial_z[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{yz}^{(1)}]\}, \tag{A12b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_t u_z + \partial_x(u_x u_z) + \partial_y(u_y u_z) + \partial_z(p + u_z^2) \\
 = -\varepsilon\{\partial_x[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{zx}^{(1)}] \\
 + \partial_y[(1 - \lambda'_\nu/2)S_{yz}^{(1)}] - \partial_z[(1 - \lambda_\nu/2)(S_{\omega\omega}^{(1)} + S_{xx}^{(1)})/2]\}, \tag{A12c}
 \end{aligned}$$

根据方程 (A7), 算出

$$S_{xx}^{(1)} = -\frac{1}{3\lambda_\nu} \left[ \partial_{t_0}(3u_x^2 - u^2) + \partial_x u_x - \frac{1}{2}\partial_y u_y - \frac{1}{2}\partial_z u_z \right], \tag{A13a}$$

$$S_{\omega\omega}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda_\nu} \left[ \partial_{t_0}(u_y^2 - u_z^2) + \frac{1}{2}\partial_y u_y - \frac{1}{2}\partial_z u_z \right], \tag{A13b}$$

$$S_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda'_\nu} \left[ \partial_{t_0}(u_x u_y) + \frac{1}{2}\partial_x u_y + \frac{1}{2}\partial_y u_x \right], \tag{A13c}$$

$$S_{yz}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda'_\nu} \left[ \partial_{t_0}(u_y u_z) + \frac{1}{2}\partial_y u_z + \frac{1}{2}\partial_z u_y \right], \tag{A13d}$$

$$S_{zx}^{(1)} = -\frac{1}{\lambda'_\nu} \left[ \partial_{t_0}(u_x u_z) + \frac{1}{2}\partial_x u_z + \frac{1}{2}\partial_z u_x \right]. \tag{A13e}$$

使用方程 (A9), 得到

$$\partial_{t_0} u_x^2 = -2u_x [\partial_x(p + u_x^2) + \partial_y(u_x u_y) + \partial_z(u_x u_z)], \tag{A14a}$$

$$\partial_{t_0} u_y^2 = -2u_y [\partial_x(u_x u_y) + \partial_y(p + u_y^2) + \partial_z(u_y u_z)], \tag{A14b}$$

$$\partial_{t_0} u_z^2 = -2u_z [\partial_x(u_x u_z) + \partial_y(u_y u_z) + \partial_z(p + u_z^2)]. \tag{A14c}$$

从方程 (A1) 可知  $\partial_{t_0} u_x^2$ ,  $\partial_{t_0} u_y^2$  和  $\partial_{t_0} u_z^2$  都是  $O(M^3)$  项. 忽略  $O(M^3)$  项和  $\partial_{t_0} u^2$  项, 方程 (A13) 可以写作

$$S_{xx}^{(1)} = -\frac{1}{3\lambda_\nu} \left( \partial_x u_x - \frac{1}{2}\partial_y u_y - \frac{1}{2}\partial_z u_z \right), \tag{A15a}$$

$$S_{\omega\omega}^{(1)} = -\frac{1}{2\lambda_\nu} (\partial_y u_y - \partial_z u_z), \tag{A15b}$$

$$S_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{2\lambda'_\nu} (\partial_x u_y + \partial_y u_x), \tag{A15c}$$

$$S_{yz}^{(1)} = -\frac{1}{2\lambda'_\nu}(\partial_y u_z + \partial_z u_y), \quad (\text{A15d})$$

$$S_{zx}^{(1)} = -\frac{1}{2\lambda'_\nu}(\partial_x u_z + \partial_z u_x), \quad (\text{A15e})$$

将方程 (A15) 代入 (A12) 式, 可得

$$\begin{aligned} & \partial_t u_x + \partial_x(u_x^2) + \partial_y(u_x u_y) + \partial_z(u_x u_z) \\ &= -\partial_x p + \nu(\partial_x^2 u_x + \partial_y^2 u_x + \partial_z^2 u_x) \\ & \quad + \xi(\partial_x(\partial_x(u_x) + \partial_y(u_y) + \partial_z(u_z))), \end{aligned} \quad (\text{A16a})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t u_y + \partial_x(u_x u_y) + \partial_y(u_y^2) + \partial_z(u_y u_z) \\ &= -\partial_y p + \nu(\partial_x^2 u_y + \partial_y^2 u_y + \partial_z^2 u_y) \\ & \quad + \xi(\partial_y(\partial_x(u_x) + \partial_y(u_y) + \partial_z(u_z))), \end{aligned} \quad (\text{A16b})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t u_z + \partial_x(u_x u_z) + \partial_y(u_y u_z) + \partial_z(u_z^2) \\ &= -\partial_z p + \nu(\partial_x^2 u_z + \partial_y^2 u_z + \partial_z^2 u_z) \\ & \quad + \xi(\partial_z(\partial_x(u_x) + \partial_y(u_y) + \partial_z(u_z))), \end{aligned} \quad (\text{A16c})$$

其中,

$$\nu = \frac{1}{4} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta t = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda'_\nu} - \frac{1}{2} \right) \delta t,$$

$$\xi = \frac{1}{12} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta t, \quad \tau = \frac{1}{\lambda_\nu}$$

由 (A10) 式, 省略方程 (A16) 中  $\xi(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}))$  和  $\mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{u}$  两项, 得

$$\begin{aligned} & \partial_t u_x + u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x + u_z \partial_z u_x \\ &= -\partial_x p + \nu(\partial_x^2 u_x + \partial_y^2 u_x + \partial_z^2 u_x), \end{aligned} \quad (\text{A17a})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t u_y + u_x \partial_x u_y + u_y \partial_y u_y + u_z \partial_z u_y \\ &= -\partial_y p + \nu(\partial_x^2 u_y + \partial_y^2 u_y + \partial_z^2 u_y), \end{aligned} \quad (\text{A17b})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t u_z + u_x \partial_x u_z + u_y \partial_y u_z + u_z \partial_z u_z \\ &= -\partial_z p + \nu(\partial_x^2 u_z + \partial_y^2 u_z + \partial_z^2 u_z), \end{aligned} \quad (\text{A17c})$$

这就是不可压 N-S 方程动量方程的分量形式. 至此, 在低马赫数假设下, 已经通过 C-E 展开将 iD3Q12 MRT 模型恢复到不可压的 N-S 方程, 它可以写作向量的形式, 见方程 (25).

### 参考文献

[1] McNamara G R, Zanetti G 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2332  
 [2] Higuera F, Jimenez J 1989 *Europhys. Lett.* **9** 663  
 [3] Higuera F, Succi S S, Benzi R 1989 *Europhys. Lett.* **9** 345  
 [4] Abe T 1997 *J. Comput. Phys.* **131** 241  
 [5] He X Y, Luo L S 1997 *Phys. Rev. E* **56** 6811  
 [6] Shan X W, He X Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 65

[7] Shan X W, Chen H D 1993 *Phys. Rev. E* **47** 1815  
 [8] Zhang L Q 2014 *Ph. D. Dissertation* (Chongqing: Chongqing University) (in Chinese) [张良奇 2014 博士学位论文 (重庆: 重庆大学)]  
 [9] He X Y, Shan X W, Doolen G D 1998 *Phys. Rev. E* **57** R13  
 [10] Qi D W 1999 *J. Fluid. Mech.* **385** 41  
 [11] Chen S Y, Chen H D, Martínez D, Matthaeus W 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 3776  
 [12] Chen X W, Shi B C 2005 *Chin. Phys. Soc.* **14** 1398  
 [13] Pan C X, Luo L S, Miller C T 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 154701 (in Chinese) [Zhang T, Shi B C, Chai Z H 2015 物理学报 **64** 154701]  
 [14] Velivelli A C, Bryden K M 2006 *Physica A* **362** 139  
 [15] Ginzburg I 2005 *Adv. Water Resour.* **28** 1171  
 [16] Chai Z H, Shi B C, Guo Z L 2016 *J. Sci. Comput.* **69** 355  
 [17] Chai Z H, Shi B C 2008 *Appl. Math. Model.* **32** 2050  
 [18] Du R, Sun D K, Shi B C, Chai Z H 2019 *Appl. Math. Comput.* **358** 80  
 [19] Bhatnagar J, Gross E P, Krook M K 1954 *Phys. Rev.* **94** 511  
 [20] Qian Y, d'Humières D, Lallemand P 1992 *Europhys. Lett.* **17** 479  
 [21] He X Y, Luo L S 1997 *J. Stat. Phys.* **88** 927  
 [22] Guo Z L, Shi B C, Wang N C 2000 *J. Comput. Phys.* **165** 288  
 [23] He N Z, Wang N C, Shi B C, Guo Z L 2004 *Chin. Phys. Soc.* **13** 0040  
 [24] Ansumali S, Karlin I V, Ottinger H C 2003 *Europhys. Lett.* **63** 798  
 [25] Ginzburg I, Verhaeghe F, d'Humières D 2008 *Commun. Comput. Phys.* **3** 427  
 [26] Ginzburg I, Verhaeghe F, d'Humières D 2008 *Commun. Comput. Phys.* **3** 519  
 [27] d'Humières D 1992 *AIAA J.* **159** 450  
 [28] d'Humières D 2002 *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **360** 437  
 [29] d'Humières D, Bouzidi M'hamed, Lallemand P 2001 *Phys. Rev. E* **63** 066702  
 [30] Lallemand P, Luo L S 2000 *Phys. Rev. E* **61** 6546  
 [31] Du R, Shi B C, Chen X W 2006 *Phys. Lett. A* **359** 564  
 [32] Du R, Shi B C 2009 *Int. J. Mod. Phys. C* **20** 1023  
 [33] Zhang W H, Shi B C, Wang Y H 2015 *Comput. Math. Appl.* **69** 997  
 [34] Suga K, Kuwata Y, Takashima K, Chikasuk R 2015 *Comput. Math. Appl.* **69** 518  
 [35] Luo L S, Liao W, Chen X W, Peng Y, Zhang W 2011 *Phys. Rev. E* **83** 056710  
 [36] Kang S K, Hassan Y A 2013 *J. Comput. Phys.* **232** 100  
 [37] Peng C, Nicholas G, Guo Z L, Wang L P 2018 *J. Comput. Phys.* **357** 16  
 [38] Guo Z L, Zheng C G, Shi B C 2002 *Chin. Phys.* **11** 366  
 [39] White F M 2005 *Viscous Fluid Flow* (3rd Ed.) (New York: McGraw-Hill) p135  
 [40] O'Brien V 1975 *J. Franklin I.* **300** 225  
 [41] Ku H C, Hirsh R S, Taylor T D 1987 *J. Comput. Phys.* **70** 439



# Three-dimensional 12-velocity multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model of incompressible flows\*

Hu Jia-Yi<sup>1)</sup> Zhang Wen-Huan<sup>1)†</sup> Chai Zhen-Hua<sup>2)</sup>  
Shi Bao-Chang<sup>2)</sup> Wang Yi-Hang<sup>1)</sup>

1) (*School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Zhejiang 315211, China*)

2) (*School of Mathematics and Statistics, Huazhong University of Science and Technology, Hubei 430074, China*)

( Received 26 June 2019; revised manuscript received 14 September 2019 )

## Abstract

In order to improve the computational efficiency of multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model (MRT), a 12-velocity multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model (iD3Q12 MRT model) for three-dimensional incompressible flows is proposed in this work by using an inversion method. This model has higher computational efficiency than the commonly used D3Q13 MRT model in principle. In numerical simulations, the accuracy and stability of iD3Q12 MRT model are validated by simulating different flows, including steady Poiseuille flow driven by pressure, unsteady pulsatile flow driven by periodic pressure and lid-driven cavity flow. We also compare the iD3Q12 MRT model with the 13-velocity multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model (He-Luo D3Q13 MRT model).

For the Poiseuille flow and pulsatile flow, the numerical solutions of the iD3Q12 MRT model agree well with the analytical solutions. In terms of accuracy, the iD3Q12 MRT model and He-Luo D3Q13 MRT model are used to simulate Poiseuille flow with different parameters. The global relative errors of the two models are identical. Similarly, we also simulate the pulsatile flow to calculate the global relative errors of flow fields at different times and different lattice spacing. It is found that the global relative errors of the iD3Q12 MRT model are smaller than those of the He-Luo D3Q13 MRT model, and both models have the second-order spatial accuracy. Furthermore, we also simulate the pulsatile flow by changing the lattice spacing or relaxation time when the maximal pressure drop of the channel is increased, and it is found that the global relative errors calculated by the iD3Q12 MRT model are smaller than those by the He-Luo D3Q13 MRT model in most cases, but the iD3Q12 MRT model diverges when the maximal pressure drop of the channel is large. This indicates that the iD3Q12 MRT model is more accurate than the He-Luo D3Q13 MRT model in simulating unsteady pulsatile flow, but less stable. For the lid-driven cavity flow, the results show that the numerical results of the iD3Q12 MRT model agree well with those given by Ku et al [Ku H C, Hirsh R S, Taylor T D 1987 *J. Comput. Phys.* **70** 439]. In terms of stability, the iD3Q12 MRT model is quantitatively less stable than He-Luo D3Q13 MRT model.

**Keywords:** 12-velocity in three dimensions, multiple-relaxation-time, lattice Boltzmann model, incompressible flows

**PACS:** 47.11.-j, 47.10.ad

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190984

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LQ16A020001), the Scientific Research Foundation of the Education Department of Zhejiang Province, China (Grant No. Y201533808), the Natural Science Foundation of Ningbo, China (Grant No. 2016A610075), and the K.C. Wong Magna Fund in Ningbo University, China.

† Corresponding author. E-mail: zhangwenhuan@nbu.edu.cn