

## Shimizu–Morioka系统与Finance系统生成Lorenz混沌的微分几何策略

张端 施佳琴 孙莹 杨旭华 叶蕾

### Lorenz chaotic system generated from Shimizu–Morioka system or Finance system: Differential geometric approach

Zhang Duan Shi Jia-Qin Sun Ying Yang Xu-Hua Ye Lei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 240502 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190919

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190919>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

强迫Lorenz系统的可预报性研究

Predictability of forced Lorenz system

物理学报. 2017, 66(6): 060503 <https://doi.org/10.7498/aps.66.060503>

一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步

Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors

物理学报. 2018, 67(5): 050502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172354>

非扩散洛伦兹系统的周期轨道

Periodic orbits of diffusionless Lorenz system

物理学报. 2018, 67(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181581>

新Chua多涡卷混沌吸引子的产生及应用

Generation and application of novel Chua multi-scroll chaotic attractors

物理学报. 2019, 68(13): 130503 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182183>

基于Lorenz模型的集合预报与单一预报的比较研究

Comparative study of Lorenz model based ensemble forecasting and single forecasting

物理学报. 2018, 67(7): 070501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172144>

# Shimizu-Morioka 系统与 Finance 系统生成 Lorenz 混沌的微分几何策略\*

张端<sup>1)†</sup> 施佳琴<sup>1)</sup> 孙莹<sup>2)</sup> 杨旭华<sup>1)</sup> 叶蕾<sup>1)</sup>

1) (浙江工业大学计算机科学与技术学院, 杭州 310023)

2) (浙江理工大学建筑工程学院, 杭州 310018)

(2019年6月13日收到; 2019年9月15日收到修改稿)

从一种受控混沌系统生成另一混沌系统可增强保密通信的安全性, 具备潜在应用前景. 研究了如何通过状态变换以及单输入反馈, 驱使受控 Shimizu-Morioka 系统与受控 Finance 系统生成 Lorenz 混沌动态. 主要方法是运用微分几何理论, 将上述三种系统等价转换为下三角形形式, 并尽量简化和一致化其方程形式, 使得上述三种不同的 3 阶系统的前两个方程形式相同, 然后对受控 Shimizu-Morioka 系统与受控 Finance 系统设计单输入反馈控制第三个方程的形式, 以便达到生成 Lorenz 混沌的目的. 运用该方法, 设计了受控 Shimizu-Morioka 系统通过状态变换和单输入状态反馈, 混沌反控制生成 Lorenz 混沌的控制策略; 也设计了受控 Finance 系统通过状态变换和单输入状态反馈, 广义同步到 Lorenz 混沌的控制策略. 最后, 借助数值仿真验证了上述混沌反控制和广义同步的有效性.

**关键词:** 混沌, Lorenz 吸引子, 状态变换, 反馈

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Gg, 05.45.Vx

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190919

## 1 引言

近五十年来, 混沌理论研究迅速兴起, 并在保密通信、物理、生物医学、化工、经济金融、图像、神经网络等领域出现众多成功应用的案例<sup>[1-5]</sup>. 以保密通信为例, 其功能的实现依赖于通信系统发送端以及接收端可生成一致的混沌信号, 若能生成可变的混沌信号, 必将提高其保密能力<sup>[3]</sup>. 为此, 本文关注从一种动态系统精确或者近似生成另一特定混沌动态的问题.

混沌反控制和广义同步均属生成混沌的方法. 混沌反控制通常指受控系统经状态变换和状态反馈等价转换为某混沌系统<sup>[6-8]</sup>. 广义同步的一种定义为受控系统从任何初值开始的轨迹, 经过状态变

换以及可调整的状态反馈输入, 渐进跟踪某混沌系统从任何初值开始的轨迹, 或者该轨迹经某状态变换后得到的新轨迹<sup>[9-13]</sup>. 可见二者在方法上存在颇多共性, 只是广义同步考虑了初值不匹配的问题, 因此我们综合讨论两种方法的相关文献. 近年来, 混沌反控制和广义同步的研究取得了一系列精彩的成果, 大致上可分为三类. 第一类, 为了简化状态变换的构建, 通常选取线性变换, 并采用多输入状态反馈以生成给定的混沌动态<sup>[6,14-16]</sup>. 第二类方法的策略是为混沌系统加入合适控制量, 若经运用非线性控制理论中的反馈线性化方法可以将其转换为线性能控系统, 那么采用其逆过程, 线性能控系统通过状态变换和状态反馈将生成该混沌系统, 该方法所得状态变换一般为非线性的<sup>[17-19]</sup>. 第三种方法不考虑状态变换, 仅施加适当的反馈, 调节

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61773348) 和浙江省自然科学基金 (批准号: LY16F030014) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: dzhang@zjut.edu.cn

系统的李亚普诺夫指数,从而生成混沌动态<sup>[20-22]</sup>.

基于保密通信等领域的应用前景,试图利用受控 Shimizu-Morioka 混沌系统<sup>[23]</sup>和受控 Finance 混沌系统<sup>[24]</sup>生成 Lorenz 混沌<sup>[25]</sup>. 相较上述第一类和第三类文献,本文将构造非线性状态变换和单输入反馈实现上述两系统生成 Lorenz 混沌,目前未见类似报道. 囿于 Lorenz 系统的特点,也无法采用第二类文献中的反馈线性化方法,故转而寻求转换系统为下三角形式,并设计一种新型转换方式以尽可能简化其下三角形式. 主要策略为运用微分几何方法,对三种系统方程做下三角化,并尽量简化和一致化其形式,最终此三种不同 3 阶系统各具有两个同形式的方程,两受控系统的余下一个方程由单输入反馈调整其形式,从而生成 Lorenz 系统. 首先考虑 Lorenz 系统是否可能转换为下三角形式,为 Lorenz 混沌系统配置了一个带参数的线性输入向量场形成受控系统,反复操作李导数证明该受控 Lorenz 系统可等价转换为下三角系统,因此 Lorenz 混沌系统本身也可转换为下三角形式. 其次,利用多向量场三角化的方法,避免了求解偏微分方程组,构造非线性状态变换,求得等价于 Lorenz 混沌系统的下三角系统. 进一步,通过局部状态变换和参数选择等方法简化与 Lorenz 系统等价的下三角形式. 然后,对受控 Shimizu-Morioka 混沌系统以及受控 Finance 混沌系统做类似的下三角化处理,结论是此三个 3 阶动态系统各自下三角形式的前两个方程一致,表明三种不同混沌内在具有一定的相似性. 最后,利用上述相似性,实现了受控 Shimizu-Morioka 系统生成 Lorenz 混沌,以及受控 Finance 系统与 Lorenz 混沌的广义同步. 本文讨论的异构混沌系统生成 Lorenz 混沌的技术在保密通信系统中可能会有两种潜在应用. 一种在通信系统发送端应用混沌反控制技术,使其能够生成两种甚至多种混沌信号,提高灵活性. 另一种,发送端利用电路实现 Lorenz 系统并调制信号,而在接收端则实现受控 Shimizu-Morioka 系统或者受控 Finance 系统,并应用广义同步技术解调信号,由于发送端和接收端异构,当其中一端失密时,另一端仍具备一定保密性,较自同步技术更为安全,具体调制解调方法可参见文献<sup>[3]</sup>.

本文余下部分安排如下:第 2 节给出本文讨论主要问题的数学描述;第 3 节在一定范围内讨论了 Lorenz 系统等价转换为下三角形式的各种可

能,并选择了其中的最简形式;第 4 节设计并仿真了单输入受控 Shimizu-Morioka 系统通过状态变换和反馈混沌反控制生成 Lorenz 混沌,以及单输入受控 Finance 系统与 Lorenz 混沌的广义同步;第 5 节总结全文.

## 2 问题描述

Lorenz 系统是经典混沌系统,具体形式为<sup>[25]</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_2, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3,\end{aligned}\quad (1)$$

其中  $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  是状态变量;  $a, b$  和  $c$  是已知的正实参数,选取适当参数时系统具有混沌特性,本文要求  $2a - b \neq 0$ . 为该系统增加线性控制向量场成为单输入受控 Lorenz 系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + ax_2 + k_1v, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3 + k_2v, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 + k_3v,\end{aligned}\quad (2)$$

其中  $v$  为标量输入;  $k_1, k_2$  和  $k_3$  均为实数并且不全为 0. 由于系统 (2) 无法在全局等价转换为线性能控系统(第 3 节说明原因),将考察其能否等价转换为下三角形式的非线性仿射系统<sup>[26]</sup>

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= f_1(z_1, z_2), \\ \dot{z}_2 &= f_2(z_1, z_2, z_3), \\ \dot{z}_3 &= f_3(z_1, z_2, z_3) + g_3(z_1, z_2, z_3)v_0,\end{aligned}\quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$  是状态变量;  $v_0$  为标量输入;  $f_1, f_2, f_3$  和  $g_3$  均为光滑函数. 转换系统 (2), 使其符合下三角形式 (3) 的一种直接的方法是取  $z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = x_3, k_1 = k_2 = 0$  和  $k_3 \neq 0$ , 但无益于简化系统 (2) 也无明显实用性. 设置参数  $k_1, k_2$  和  $k_3$  的主要目的是搜寻一种形式简单,并且等价于系统 (2) 的下三角系统. 尤其考虑系统 (2) 是否可能等价转换为如下特殊的下三角形式,也是一种特殊的部分线性化形式<sup>[26,27]</sup>

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2^2 - \rho z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= v_0,\end{aligned}\quad (4)$$

这里  $\rho$  为实数,  $v_0$  为标量输入,因为两种重要的受控混沌系统,受控 Shimizu-Morioka 系统和受控 Finance 系统,均可经简单处理(下文给出)等价转

换为此形式. 如果系统 (2) 也可等价转换为系统 (4), 意味着此二受控系统可生成 Lorenz 混沌, 实现混沌系统的转换.

所谓系统 (2) 等价转换为系统 (3) 或系统 (4), 是指系统 (2) 选取合适参数  $k_1, k_2$  和  $k_3$ , 再经光滑状态变换

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

以及单输入状态反馈

$$v = \alpha(\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{z})v_0, \quad (6)$$

其中  $\alpha(\mathbf{z})$  和  $\beta(\mathbf{z})$  为光滑函数, 转换为系统 (3) 或系统 (4). 上述定义表明等价转换具有对称性, 因此若系统 (2) 能等价转换为系统 (4), 则系统 (4) 也可等价转换为系统 (2), 进而取  $v$  为 0 得到系统, 即生成了 Lorenz 混沌.

### 3 等价转换

本节工作按如下两步骤进行: 第一, 讨论系统 (2) 等价转换为下三角系统 (3) 的可行性; 第二, 构造状态变换和反馈实现等价转换, 并在此过程中调整参数, 最终转换为系统 (4).

#### 3.1 等价转换的可行性

记系统 (2) 的漂移向量场为

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & (-ax_1 + ax_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (cx_1 - x_2 - x_1x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + (x_1x_2 - bx_3) \frac{\partial}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (7)$$

以及输入向量场为

$$\mathbf{G} = k_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + k_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (8)$$

设  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Y}$  为光滑向量场,  $\text{ad}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  为此二向量场的李导数<sup>[28]</sup>. 令  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{X}_1 = \text{ad}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{X}_2 = \text{ad}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{F}$ , 系统 (2) 能等价转换为下三角系统 (3) 的充要条件是此三向量场张成的分布  $\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$  在原点的某个邻域内几乎处处 (除一个零测度集外) 满秩并且  $\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1\}$  在原点的某个邻域内几乎处处 (除一个零测度集外) 对合<sup>[26]</sup>. 如果  $\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1\}$  在原点的某个邻域内正则对合, 则可以转换为部分线性化形式<sup>[26,27]</sup>, 但是否可等价转换为系统 (4), 仍需在转换实现过程中进一步考察. 本小节依据上述条件检验受控 Lorenz 系统 (2) 并

做参数分析.

计算如下向量场李导数

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 = \text{ad}_{\mathbf{X}_0}\mathbf{F} = & (-ak_1 + ak_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & + (ck_1 - k_2 - k_3x_1 - k_1x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + (-bk_3 + k_2x_1 + k_1x_2) \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (9)$$

考察  $\mathbf{X}_0$  与  $\mathbf{X}_1$  的对合特性,

$$[\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1] = -2k_1k_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2k_1k_2 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad (10)$$

对合条件要求

$$[\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1] = a_0(\mathbf{x})\mathbf{X}_0 + a_1(\mathbf{x})\mathbf{X}_1, \quad (11)$$

其中  $a_0(\mathbf{x})$  和  $a_1(\mathbf{x})$  为光滑函数. 注意到仅当如下等式满足时 (11) 式才在全局成立,

$$a_0(\mathbf{x}) = 0, a_1(\mathbf{x}) = 0, [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1] = \mathbf{0}. \quad (12)$$

如此限制了  $k_1, k_2$  和  $k_3$  的选择, 只有两种可能: 一种可能为

$$k_1 = 0, k_2 \neq 0; \quad (13)$$

另一种可能为

$$k_1 \neq 0, k_2 = 0, k_3 = 0. \quad (14)$$

第一种可能中排除了  $k_1 = 0$  并且  $k_2 = 0$  的情况, 否则  $\mathbf{X}_0 = k_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$  以及  $\mathbf{X}_1 = -k_3x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - bk_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ , 当  $x_1 = 0$  时  $\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1\}$  秩为 1, 说明在原点的任何邻域内不可能实现部分反馈线性化<sup>[27,28]</sup>, 更不可能反馈等价转换为系统 (4).

考察第一种可能, 此时

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 = & k_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + k_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, \\ \mathbf{X}_1 = & ak_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - (k_2 + k_3x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + (k_2x_1 - bk_3) \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (15)$$

依据反馈线性化的要求, 进一步计算李导数

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_2 = \text{ad}_{\mathbf{X}_1}\mathbf{F} = & -(a^2k_2 + ak_2 + ak_3x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ & + [(ac + 1)k_2 + (b - a + 1)k_3x_1 \\ & - k_2x_1^2 + ak_3x_2 - ak_2x_3] \frac{\partial}{\partial x_2} \\ & + [b^2k_3 + (a - b - 1)k_2x_1 - k_3x_1^2] \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (16)$$

由  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$  构成的如下行列式

$$\begin{aligned} & \text{Det}(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \\ &= a(ab + ac - a - b^2 + b)k_2^2k_3 \\ &+ a[(b - 2a)k_2^3 + (2b - 2a - 1)k_2k_3^2]x_1 \\ &- a(k_2^2k_3 + k_3^3)x_1^2 + a^2k_2k_3^2x_2 - a^2k_2^2k_3x_3 \quad (17) \end{aligned}$$

可知  $\mathbf{x}$  状态空间中存在曲面满足  $\text{Det}(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0$ , 这是由于向量场  $\mathbf{X}_2$  存在奇异性, 造成无法实现全局范围的状态反馈线性化.

由于  $\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1\}$  满秩并对合,  $\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\}$  几乎处处 (除零测度集即曲面  $\text{Det}(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = 0$  以外) 满秩, 确保了系统 (2) 可等价转换为系统 (3).

对于 (14) 式表示的第二种可能, 做类似分析计算 (过程略), 在原点的任何邻域中都无法等价转换为系统 (4) 的形式, 故不做进一步讨论.

### 3.2 等价转换的实现

至此, 仍需讨论系统 (2) 如何转换为系统 (3), 以及是否可转换为系统 (4). 在已计算  $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$  的前提下, 为获取状态变换  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = (h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), h_3(\mathbf{x}))$  以实现等价转换, 通常是需解偏微分方程组  $\langle dh_1(\mathbf{x}), \mathbf{X}_0 \rangle = 0$ ,  $\langle dh_1(\mathbf{x}), \mathbf{X}_1 \rangle = 0$  和  $\langle dh_1(\mathbf{x}), \mathbf{X}_2 \rangle \neq 0$  以及偏微分方程组  $\langle dh_2(\mathbf{x}), \mathbf{X}_0 \rangle = 0$ ,  $\langle dh_2(\mathbf{x}), \mathbf{X}_1 \rangle \neq 0$ <sup>[26,27]</sup>, 以选取  $h_1(\mathbf{x})$  和  $h_2(\mathbf{x})$ , 并另选任一与此二者独立的函数  $h_3(\mathbf{x})$  组成完整的状态变换,  $dh_1(\mathbf{x})$ ,  $dh_2(\mathbf{x})$  和  $dh_3(\mathbf{x})$  均为光滑的正则 1-形式<sup>[28]</sup>, 尽管 Frobenius 定理保证了方程组的可解性<sup>[28]</sup>, 但是较为遗憾的是求解颇为不易, 采用 Maple 18 和 Mathematica 11 两种符号计算工具求解上述偏微分方程组均没有成功. 因此, 就本系统而言, 上述方法理论上可行, 实际较难达成. 本小节将利用微分几何技巧, 交替推进状态变换和正交化, 避免了求解偏微分方程组, 实现系统下三角化.

首先, 做状态变换  $\mathbf{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^T = \psi(\mathbf{x})$ ,

$$\hat{x}_1 = x_1, \quad \hat{x}_2 = k_3x_2 - k_2x_3, \quad \hat{x}_3 = x_2, \quad (18)$$

在该变换  $\psi$  诱导的切映射  $\psi_*$  作用下<sup>[28]</sup>,

$$\begin{aligned} \psi_*(\mathbf{X}_0) &= k_2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3}, \\ \psi_*(\mathbf{X}_1) &= ak_2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} + [(b-1)k_2k_3 - (k_2^2 + k_3^2)\hat{x}_1] \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} - (k_2 - k_3\hat{x}_1) \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_*(\mathbf{X}_2) &= -[a(1+a)k_2 + ak_3\hat{x}_1] \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} \\ &\quad + [(1-b^2+ac)k_2k_3 + (1-a+b) \\ &\quad \times (k_2^2 + k_3^2)\hat{x}_1 + ak_3\hat{x}_2] \frac{\partial}{\partial \hat{x}_2} \\ &\quad + [(1+ac)k_2 + (1-a+b)k_3\hat{x}_1 \\ &\quad - k_2\hat{x}_1^2 + a\hat{x}_2] \frac{\partial}{\partial \hat{x}_3}. \quad (19) \end{aligned}$$

按如下方式定义一组向量场

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_0 &= \psi_*(\mathbf{X}_0), \\ \hat{\mathbf{X}}_1 &= \psi_*(\mathbf{X}_1) + \frac{k_2 - k_3\hat{x}_1}{k_2} \psi_*(\mathbf{X}_0), \\ \hat{\mathbf{X}}_2 &= \psi_*(\mathbf{X}_2) \\ &\quad - \frac{(1+ac)k_2 + (1-a+b)k_3\hat{x}_1 - k_2\hat{x}_1^2 + a\hat{x}_2}{k_2} \\ &\quad \times \psi_*(\mathbf{X}_0), \quad (20) \end{aligned}$$

再做状态变换  $\mathbf{y} = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)^T = \varphi(\hat{\mathbf{x}})$ ,

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= (b-1)k_2k_3\hat{x}_1 - \frac{1}{2}(k_2^2 + k_3^2)\hat{x}_1^2 - ak_2\hat{x}_2, \\ \hat{y}_2 &= \hat{x}_1, \\ \hat{y}_3 &= \hat{x}_3. \quad (21) \end{aligned}$$

在该变换  $\varphi$  诱导的切映射  $\varphi_*$  作用下,

$$\begin{aligned} \varphi_*(\hat{\mathbf{X}}_0) &= k_2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}_3}, \\ \varphi_*(\hat{\mathbf{X}}_1) &= ak_2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}_2}, \\ \varphi_*(\hat{\mathbf{X}}_2) &= ak_3 \{ [-b + b^2 - a(-1 + b + c)] k_2^2 + \hat{y}_1 \} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \hat{y}_1} + ak_2 [(2a - b)k_2^2 + (2 + 2a - 3b)k_3^2] \\ &\quad \times \hat{y}_2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}_1} + \frac{3}{2}ak_3(k_2^2 + k_3^2)\hat{y}_2^2 \frac{\partial}{\partial \hat{y}_1} \\ &\quad - a[(1+a)k_2 + k_3\hat{y}_2] \frac{\partial}{\partial \hat{y}_2}. \quad (22) \end{aligned}$$

根据 (19), (20) 和 (22) 式,

$$\begin{aligned} \varphi_*(\psi_*(\text{span}\{\mathbf{X}_0\})) &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \hat{y}_3} \right\}, \\ \varphi_*(\psi_*(\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1\})) &= \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \hat{y}_3}, \frac{\partial}{\partial \hat{y}_2} \right\}, \\ \varphi_*(\psi_*(\text{span}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2\})) &\stackrel{\text{a.e.}}{=} \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial \hat{y}_3}, \frac{\partial}{\partial \hat{y}_2}, \frac{\partial}{\partial \hat{y}_1} \right\}, \quad (23) \end{aligned}$$

其中第三个式子表示左边几乎处处等于右边, 只有一个零测度集除外, 因为左边的分布不是处处正侧的. (23) 式表明利用坐标  $\mathbf{y}$  写出的系统必有下三角形式 [26],

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}_1 &= \frac{1}{2} \left( k_2 k_3 + \frac{k_3^3}{k_2} \right) \hat{y}_2^3 \\ &+ \frac{1}{2} [(2a - b)k_2^2 + (2 + 2a - 3b)k_3^2] \hat{y}_2^2 \\ &+ \frac{k_3}{k_2} \hat{y}_1 \hat{y}_2 + (a - b - ab + b^2 - ac)k_2 k_3 \hat{y}_2 - b \hat{y}_1, \\ \dot{\hat{y}}_2 &= -a \hat{y}_2 + a \hat{y}_3, \\ \dot{\hat{y}}_3 &= c \hat{y}_2 \\ &- \frac{2 \hat{y}_1 \hat{y}_2 + (k_2^2 + k_3^2) \hat{y}_2^3 + 2k_2 k_3 (\hat{y}_2 - b \hat{y}_2 + a \hat{y}_3) \hat{y}_2}{2ak_2^2} \\ &- \hat{y}_3 + k_2 v. \end{aligned} \quad (24)$$

为转变其为系统 (4) 的部分线性化形式, 再做状态变换  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T = \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{y}})$ ,

$$\begin{aligned} y_1 &= \hat{y}_1, \\ y_2 &= \hat{y}_2, \\ y_3 &= -a \hat{y}_2 + a \hat{y}_3. \end{aligned} \quad (25)$$

该坐标下的系统方程为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{2} \left( k_2 k_3 + \frac{k_3^3}{k_2} \right) y_2^3 \\ &+ \frac{1}{2} [(2a - b)k_2^2 + (2 + 2a - 3b)k_3^2] y_2^2 \\ &+ \frac{k_3}{k_2} y_1 y_2 + (a - b - ab + b^2 - ac)k_2 k_3 y_2 - b y_1, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= a(c - 1)y_2 \\ &- \frac{2y_1 y_2 + (k_2^2 + k_3^2)y_2^3 + 2k_2 k_3 (y_2 - b y_2 + a y_2 + y_3) y_2}{2k_2^2} \\ &- (a + 1)y_3 + a k_2 v. \end{aligned} \quad (26)$$

此形式的第一和第三个方程仍相当繁复, 引入标量输入  $v$  为

$$\begin{aligned} v &= \frac{-1}{ak_2} \left[ a(c - 1)y_2 - \frac{2y_1 y_2 + (k_2^2 + k_3^2)y_2^3}{2k_2^2} \right. \\ &- \frac{2k_2 k_3 (y_2 - b y_2 + a y_2 + y_3) y_2}{2k_2^2} \\ &\left. - (a + 1)y_3 - v_0 \right], \end{aligned} \quad (27)$$

同时选取  $k_3 = 0$ , 系统 (26) 简化为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{1}{2}(2a - b)k_2^2 y_2^2 - b y_1, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= v_0. \end{aligned} \quad (28)$$

为符合系统 (4) 的形式要求, 再取状态变换  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y})$ ,

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2y_1}{(2a - b)k_2^2}, \\ z_2 &= y_2, \\ z_3 &= y_3, \end{aligned} \quad (29)$$

系统成为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2^2 - b z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= v_0, \end{aligned} \quad (30)$$

满足了系统 (4) 的形式. 可验证至此所作的状态变换均为微分同胚变换, 综合上述变换以及  $k_3 = 0$ , 由原始状态  $\mathbf{x}$  表示的状态变换  $\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$  如下:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2ax_3 - x_1^2}{2a - b}, \\ z_2 &= x_1, \\ z_3 &= -ax_1 + ax_2, \end{aligned} \quad (31)$$

逆变换  $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{z})$  为

$$\begin{aligned} x_1 &= z_2, \\ x_2 &= z_2 + \frac{z_3}{a}, \\ x_3 &= \frac{(2a - b)z_1 + z_2^2}{2a}. \end{aligned} \quad (32)$$

Lorenz 系统 (1) 在状态  $\mathbf{z}$  下表示为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2^2 - b z_1, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= a(c - 1)z_2 - (a + 1)z_3 - \frac{(2a - b)}{2} z_1 z_2 - \frac{1}{2} z_2^3 \\ &= a(a + c)x_1 - a(a + 1)x_2 - ax_1 x_3. \end{aligned} \quad (33)$$

#### 4 单输入非线性系统生成 Lorenz 混沌

Shimizu-Morioka 系统是 Shimizu 和 Morioka 于 1980 年提出的著名混沌系统 [23], Finance 系统则是反映了金融政策与经济增长之间关系的混沌系统. 本节对受控 Shimizu-Morioka 系统和 Finance 系统, 设计状态变换和单输入反馈, 分别实现混沌反控制生成 Lorenz 混沌和广义同步到 Lorenz 混沌.

### 4.1 Shimizu-Morioka 系统生成 Lorenz 混沌

受控 Shimizu-Morioka 系统的形式如下<sup>[23]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \quad \dot{\zeta}_2 = (1 - \zeta_3)\zeta_1 - \alpha\zeta_2 + u, \\ \dot{\zeta}_3 &= \zeta_1^2 - \beta\zeta_3, \end{aligned} \quad (34)$$

其中  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T$  是系统状态,  $\alpha$  和  $\beta$  为参数, 要求  $\beta$  与系统中的  $b$  相等, 即  $\beta = b$ ,  $u$  是标量输入.

系统 (34) 做线性状态变换  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T = \tau(\zeta)$ ,

$$\theta_1 = \zeta_3, \quad \theta_2 = \zeta_1, \quad \theta_3 = \zeta_2. \quad (35)$$

以  $\theta$  为状态, 系统方程表示为

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2^2 - \beta\theta_1, \quad \dot{\theta}_2 = \theta_3, \quad \dot{\theta}_3 = (1 - \theta_1)\theta_2 - \alpha\theta_3 + u, \quad (36)$$

再做状态反馈

$$u = -(1 - \theta_1)\theta_2 + \alpha\theta_3 + u_0,$$

$$\begin{aligned} u_0 &= a(c-1)\theta_2 - (a+1)\theta_3 - \frac{(2a-b)}{2}\theta_1\theta_2 - \frac{1}{2}\theta_2^3 \\ &= a(c-1)\zeta_1 - (a+1)\zeta_2 - \frac{(2a-b)}{2}\zeta_1\zeta_3 - \frac{1}{2}\zeta_2^3. \end{aligned} \quad (37)$$

同时考虑到  $\beta = b$ , 系统方程成为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2^2 - b\theta_1, \quad \dot{\theta}_2 = \theta_3, \\ \dot{\theta}_3 &= a(c-1)\theta_2 - (a+1)\theta_3 - \frac{(2a-b)}{2}\theta_1\theta_2 - \frac{1}{2}\theta_2^3, \end{aligned} \quad (38)$$

该系统与经状态变换  $z = T(x)$  的 Lorenz 系统 (33) 具有相同形式. 所以, 对受控 Shimizu-Morioka 系统 (34), 利用反馈 (37) 和状态变换  $T^{-1}(\tau(\zeta))$  将生成 Lorenz 混沌.

图 1 给出了 Lorenz 系统 (1) 的轨迹, 参数为  $a = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $c = 30$ , 初值选取  $x_1(t_0) = 2$ ,  $x_2(t_0) = 2$ ,  $x_3(t_0) = 2$ . 图 2 给出了受控 Shimizu-

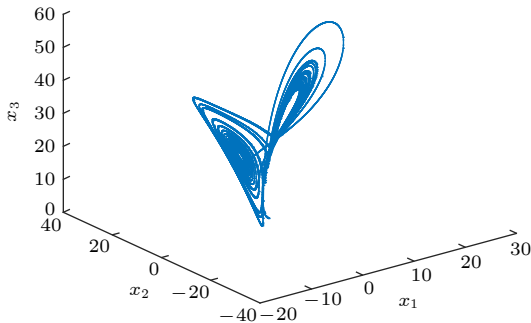


图 1 Lorenz 系统轨迹

Fig. 1. Trajectory of the Lorenz system.

Morioka 系统 (34) 在反馈 (37) 作用下的轨迹, 参数为  $\alpha = 0.75$ ,  $\beta = 8/3$ , 初值由 Lorenz 系统的初值计算得到, 即  $\zeta(t_0) = \tau^{-1}(T(x(t_0)))$ , 实际上  $\zeta_1(t_0) = 2$ ,  $\zeta_2(t_0) = 0$ ,  $\zeta_3(t_0) = 2.076923076923$ . 图 3 为受控 Shimizu-Morioka 系统标量输入  $u$  的曲线. 图 4 对图 2 所示受控 Shimizu-Morioka 系统轨迹做了状态变换  $T^{-1}(\tau(\zeta))$ , 生成的轨迹与图 1 一致, 表明混沌反控制生成了 Lorenz 混沌.

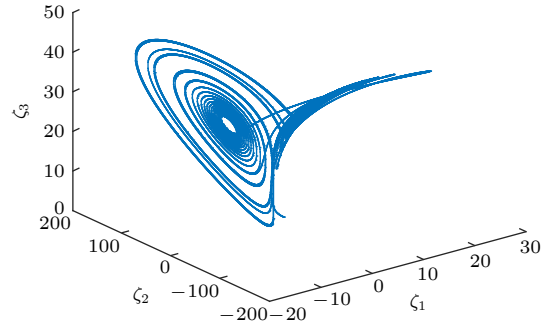


图 2 受控 Shimizu-Morioka 系统轨迹

Fig. 2. Trajectory of the controlled Shimizu-Morioka system.

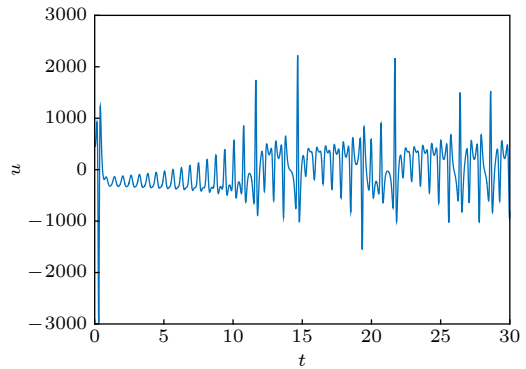


图 3 受控 Shimizu-Morioka 系统的标量控制输入

Fig. 3. Scale control input for the controlled Shimizu-Morioka system.

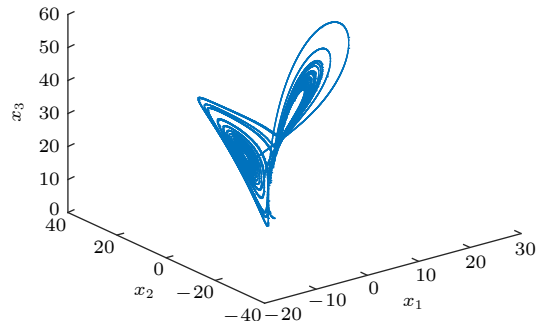


图 4 经状态变换  $T^{-1}(\tau(\zeta))$  受控 Shimizu-Morioka 系统轨迹

Fig. 4. Trajectory of the controlled Shimizu-Morioka system via the state transformation  $T^{-1}(\tau(\zeta))$ .

### 4.2 Finance 系统生成 Lorenz 混沌

Finance 系统具有可相互等价转换的两种系统方程形式, 本文选取的形式如下<sup>[24]</sup>:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3, \\ \dot{\zeta}_2 &= -\zeta_1^2 - \beta \zeta_2, \quad \dot{\zeta}_3 = -\zeta_1 - \gamma \zeta_3 + u, \end{aligned} \quad (39)$$

其中  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T$  是状态变量;  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  为参数, 要求  $\beta$  与系统中的  $b$  等值;  $u$  是标量输入.

受控 Finance 系统到 Lorenz 混沌的广义同步定义为: 设 Lorenz 系统 (1) 与系统 (39) 在初始时刻  $t_0$  状态分别为  $\mathbf{x}(t_0)$  和  $\zeta(t_0)$ , 对系统 (39) 施加状态反馈

$$u = u(\mathbf{x}, \zeta, t), \quad (40)$$

其中  $t$  为时间,  $\zeta$  和  $\mathbf{x}$  状态分别做变换

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}(\zeta), \quad \mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad (41)$$

使得系统 (39) 与系统 (1) 的轨迹, 按下式的意义渐进地趋于一致

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\boldsymbol{\tau}(\zeta(t)) - \mathbf{T}(\mathbf{x}(t))\| = 0, \quad (42)$$

这里  $\|\cdot\|$  表示了欧氏空间中向量的 2-范数.

受控 Finance 系统做状态变换  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T = \boldsymbol{\tau}(\zeta)$ ,

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\zeta_2, \quad \theta_2 = \zeta_1, \\ \theta_3 &= \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3, \end{aligned} \quad (43)$$

对应的逆变换为  $\zeta = \boldsymbol{\tau}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ , 即

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \theta_2, \quad \zeta_2 = -\theta_1, \\ \zeta_3 &= \theta_3 - \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \theta_2 + \theta_1 \theta_2. \end{aligned} \quad (44)$$

$\boldsymbol{\theta}$  状态下系统方程组为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2^2 - \beta \theta_1, \quad \dot{\theta}_2 = \theta_3, \\ \dot{\theta}_3 &= \left(\frac{1}{\beta} - \alpha - \gamma\right) \theta_3 + \left(\frac{\gamma}{\beta} - \alpha\gamma - 1\right) \theta_2 \\ &\quad + (\beta - \gamma) \theta_1 \theta_2 - \theta_1 \theta_3 - \theta_2^3 + u \\ &= \left(\frac{1}{\beta} - \alpha - \gamma\right) \left[ \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \right] \\ &\quad + \left(\frac{\gamma}{\beta} - \alpha\gamma - 1\right) \zeta_1 - (\beta - \gamma) \zeta_1 \zeta_2 \\ &\quad + \left[ \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \right] \zeta_2 - \zeta_1^3 + u, \end{aligned} \quad (45)$$

设计反馈

$$\begin{aligned} u &= - \left(\frac{1}{\beta} - \alpha - \gamma\right) \left[ \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \right] \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\beta} - \alpha\gamma - 1\right) \zeta_1 + (\beta - \gamma) \zeta_1 \zeta_2 \\ &\quad - \left[ \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) \zeta_1 + \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 \right] \zeta_2 + \zeta_1^3 + u_0, \end{aligned} \quad (46)$$

由于  $\beta = b$ , 系统成为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \theta_2^2 - b\theta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \theta_3, \\ \dot{\theta}_3 &= u_0, \end{aligned} \quad (47)$$

符合系统 (4) 的形式要求.

考虑同步系统 (47) 与系统 (33), 设两系统的状态误差为  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\theta} - \mathbf{z} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  动态为

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= (\theta_2 + z_2) \varepsilon_2 - b\varepsilon_1, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 &= u_0 - [a(a+c)x_1 - a(a+1)x_2 - ax_1x_3], \end{aligned} \quad (48)$$

做如下状态反馈

$$u_0 = a(a+c)x_1 - a(a+1)x_2 - ax_1x_3 + u_1, \quad (49)$$

此时  $\boldsymbol{\varepsilon}$  动态为

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= (\theta_2 + z_2) \varepsilon_2 - b\varepsilon_1, \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3, \\ \dot{\varepsilon}_3 &= u_1. \end{aligned} \quad (50)$$

若取该系统的第二和第三个方程组成子系统

$$\dot{\varepsilon}_2 = \varepsilon_3, \quad \dot{\varepsilon}_3 = u_1, \quad (51)$$

若在有限时间后, 比如当时间  $t > t_1$  时镇定到  $\varepsilon_2(t) = \varepsilon_3(t) = 0$ , 则在  $t > t_1$  时系统 (50) 的第一个式子简化为  $\dot{\varepsilon}_1 = -b\varepsilon_1$ , 对于  $b > 0$  的情况该式渐近稳定, 从而系统 (50) 渐近稳定, (42) 式满足, 受控 Finance 系统到 Lorenz 混沌系统的广义同步可实现.

对系统 (51) 满足有限时间镇定的经典控制器为<sup>[29]</sup>

$$u_1 = -\text{sgn}(\varepsilon_2) \sqrt{|\varepsilon_2|} - \text{sgn}(\varepsilon_3) \sqrt{|\varepsilon_3|}, \quad (52)$$

这里  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数. 利用该控制器, 做广义同步仿真. Lorenz 系统参数和初值选取同前, 轨迹已见于图 1. 图 5 给出了受控 Finance 系统的轨迹, 参数  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta = 8/3$  和  $\gamma = 1.1$ , 初值  $\zeta_1(t_0) = 0.2$ ,  $\zeta_2(t_0) = -3.6$ ,  $\zeta_3(t_0) = 0.2$ , 与 Lorenz 系统



存在初值不匹配, 经计算误差系统初值  $\varepsilon_1(t_0) = 1.523076923076923$ ,  $\varepsilon_2(t_0) = -1.8$ ,  $\varepsilon_3(t_0) = -0.4452$ . 图 6 为 Finance 系统的标量输入  $u$  的曲线. 图 7 对图 5 所示受控 Finance 系统轨迹做状态变换  $T^{-1}(\tau(\zeta))$ , 生成的轨迹同步于图 1, 这被图 8 中的轨迹进一步验证, 该轨迹反映了图 1 与图 7 轨迹的误差  $\delta$ , 其各分量均趋于 0, 图 8 曲线不甚光滑, 其原因是控制器 (52) 非光滑. 仿真验证了广义同步的实现.

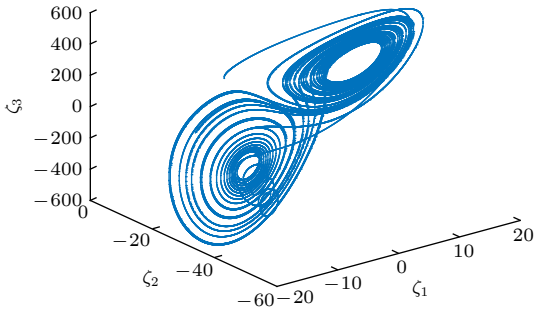


图 5 受控 Finance 系统轨迹

Fig. 5. Trajectory of the controlled Finance system.

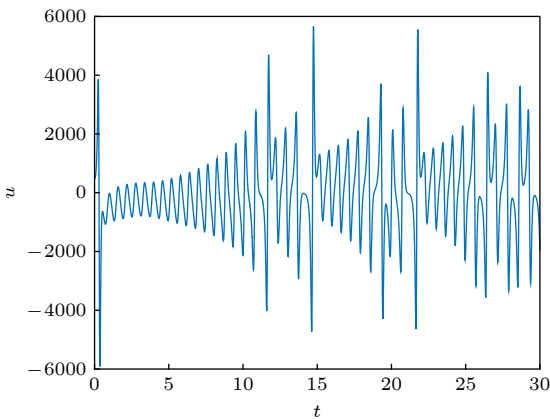


图 6 受控 Finance 系统的标量控制输入

Fig. 6. Scale control input for the controlled Finance system.

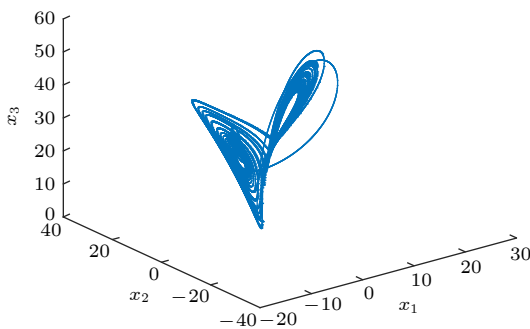


图 7 经状态变换  $T^{-1}(\tau(\zeta))$  受控 Finance 系统轨迹

Fig. 7. Trajectory of the controlled Shimizu-Morioka system via the state transformation  $T^{-1}(\tau(\zeta))$ .

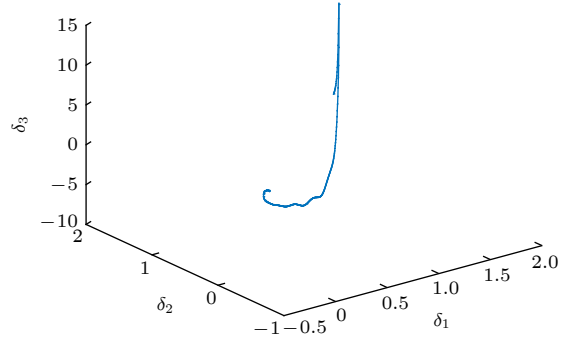


图 8 Lorenz 系统轨迹与经状态变换  $T^{-1}(\tau(\zeta))$  的受控 Finance 系统的误差

Fig. 8. Error between the trajectory of the Lorenz system and that of the controlled Finance system via the state transformation  $T^{-1}(\tau(\zeta))$ .

## 5 结 论

本文研究了如何从受控 Shimizu-Morioka 系统和 Finance 系统生成 Lorenz 混沌的问题, 在方法和结果上总结创新之处如下.

1) 利用微分几何控制理论以及参数优选, 将 Lorenz 混沌系统等价转换为某种下三角形形式, 使得该三阶系统中前两个方程形式较原 Lorenz 系统简化.

2) 将单输入受控 Shimizu-Morioka 混沌系统以及受控 Finance 混沌系统等价转换为下三角形形式的仿射非线性系统, 其前两个方程均与转换后的 Lorenz 系统的前两个方程一致, 揭示了三种不同混沌系统内在具有一定程度的相似性.

3) 利用上述相似性, 采用单输入实现了两种异构受控混沌系统生成 Lorenz 混沌, 即单输入受控 Shimizu-Morioka 系统混沌反控制到 Lorenz 混沌以及单输入受控 Finance 系统到 Lorenz 混沌的广义同步.

此外, 单输入受控 Lorenz 系统混沌反控制或者广义同步到 Shimizu-Morioka 混沌以及 Finance 混沌等问题虽未涉及, 利用本文给出的策略均可方便地实现.

## 参考文献

- [1] Boccaletti S, Grebogi C, Lai Y, Mancini H L, Maza D 2000 *Phys. Rep.* **329** 103
- [2] Alves P R, Duarte L G, Mota L A 2018 *Chaos, Solitons Fractals* **110** 232
- [3] Moskalenko O I, Koronovskii A A, Hramov A E 2010 *Phys.*

- Lett. A* **374** 2925
- [4] Pang M, Huang Y 2018 *Chin. Phys. B* **27** 118902
- [5] Wang J, Duan L, Kang Q 2017 *Chin. Phys. Lett.* **34** 074703
- [6] Moreno-Valenzuela J 2013 *Commun. Nonlinear Sci.* **18** 1
- [7] Yan S 2016 *Chin. Phys. B* **25** 90504
- [8] Wang F, Zhang X Z, Shen C W, Yu S M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 190505 (in Chinese) [王芳, 张新政, 申朝文, 禹思敏 2012 物理学报 **61** 190505]
- [9] Pecora L M, Carroll T L 2015 *Chaos* **25** 097611
- [10] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, Abarbanel H D 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [11] Abarbanel H D I, Rulkov N F, Sushchik M M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4528
- [12] Parlitz U, Junge L, Kocarev L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 3158
- [13] Zang H Y, Min L Q, Zhao G, Chen G R 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 040502
- [14] Wu X, Guan Z, Wu Z, Li T 2007 *Phys. Lett. A* **364** 484
- [15] Ojo K S, Ogunjo S T, Njah A N, Fuwape I 2015 *Pramana-J. Phys.* **84** 33
- [16] Zhang G, Liu Z, Ma Z 2007 *Chaos, Solitons Fractals* **32** 773
- [17] Wang X F, Chen G 2003 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **50** 812
- [18] Zhang J, Li C, Zhang H, Yu J 2004 *Chaos, Solitons Fractals* **21** 1183
- [19] Wang F, Chen S, Yu M, Wang C 2004 *Chaos, Solitons Fractals* **22** 927
- [20] Hramov A E, Koronovskii A A 2005 *Phys. Rev. E* **71** 067201
- [21] Hu A, Xu Z, Guo L 2009 *Phys. Lett. A* **373** 2319
- [22] Zhou J, Chen J, Lu J, Lü J 2017 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **62** 3468
- [23] Shimizu T, Morioka N 1980 *Phys. Lett. A* **76** 201
- [24] Ma C, Wang X 2012 *Commun. Nonlinear Sci.* **17** 721
- [25] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [26] Celikovskiy S, Nijmeijer H 1996 *Syst. Control Lett.* **27** 135
- [27] Khalil H K 2002 *Nonlinear Systems* (London: Prentice Hall) pp521–530
- [28] Fecko M 2006 *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists* (Cambridge: Cambridge University Press) pp21–91, 524–550
- [29] Haimo V T 1986 *SIAM J. Control Optim.* **24** 760

# Lorenz chaotic system generated from Shimizu-Morioka system or Finance system: Differential geometric approach\*

Zhang Duan<sup>1)†</sup> Shi Jia-Qin<sup>1)</sup> Sun Ying<sup>2)</sup> Yang Xu-Hua<sup>1)</sup> Ye Lei<sup>1)</sup>

1) (*College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China*)

2) (*College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

( Received 13 June 2019; revised manuscript received 15 September 2019 )

## Abstract

The problem of how to generate the Lorenz attractor from several nonlinear control systems is investigated in this paper. To be more precise, the conversions from the controlled Shimizu-Morioka system and the controlled Finance system to the Lorenz system are achieved by using the differential geometric control theory. For each case a scalar control input and a state transformation are proposed. The main approach of this paper is to convert all of those three-order systems into so called lower triangular forms which all have the same first two equations. Thus converting the controlled Shimizu-Morioka system or the controlled Finance system into the Lorenz attractor is feasible by choosing an appropriate scalar control input in the third equation of each of the two control systems. To this end, firstly, in order to use the tools of the differential geometry we construct a controlled Lorenz system by treating the vector field of the Lorenz attractor as the drift vector field and treating a linear vector field with three parameters as an input vector field. When those parameters are selected in a special manner, the conditions under which the controlled Lorenz system can be equivalently transformed into the lower triangular form are satisfied. Secondly, a state transformation, through which the controlled Lorenz system can be described as a lower triangular form, is obtained by a method like Gaussian elimination instead of solving three complicated partial differential equations. Employing several partial state transformations, choosing those three parameters and setting a scalar control input, we can reduce the equations of the controlled Lorenz system into its simplest lower triangular form. Thirdly, through two state transformations designed for the controlled Shimizu-Morioka system and the controlled Finance system respectively, the two control systems are converted into their lower triangular forms which are both similar to that of the Lorenz system in a way aforementioned. A smooth scalar controller is given to achieve the anti-control from the controlled Shimizu-Morioka system to the Lorenz attractor while another non-smooth scalar controller is designed to realize the generalized synchronization from the controlled Finance system to the Lorenz system no matter what the initial values of the two systems are. Finally, two numerical simulations demonstrate the control schemes designed in this paper.

**Keywords:** chaos, Lorenz attractor, state transformation, feedback

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Gg, 05.45.Vx

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190919

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61773348) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. LY16F030014).

† Corresponding author. E-mail: [dzhang@zjut.edu.cn](mailto:dzhang@zjut.edu.cn)