

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

文林 梁毅 周晶 余鹏 夏雷 牛连斌 张晓斐

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

Wen Lin Liang Yi Zhou Jing Yu Peng Xia Lei Niu Lian-Bin Zhang Xiao-Fei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 080301 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20182013

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

简谐+四次势中自旋轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态结构

Ground state of a rotating spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate in a harmonic plus quartic potential

物理学报. 2015, 64(3): 30302 <https://doi.org/10.7498/aps.64.030302>

自旋-轨道耦合作用下玻色-爱因斯坦凝聚在量子相变附近的朗道临界速度

Landau critical velocity of spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate across quantum phase transition

物理学报. 2017, 66(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.220301>

玻色-爱因斯坦凝聚体中的双孤子相互作用操控

Controlling interactions between bright solitons in Bose-Einstein condensate

物理学报. 2016, 65(11): 110502 <https://doi.org/10.7498/aps.65.110502>

半无限深势阱中自旋相关玻色-爱因斯坦凝聚体的量子反射与干涉

Quantum reflection and interference of spin-dependent Bose-Einstein condensates in semi-infinite potential wells

物理学报. 2017, 66(23): 230301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.230301>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响*

文林¹⁾ 梁毅¹⁾ 周晶²⁾ 余鹏¹⁾ 夏雷¹⁾ 牛连斌¹⁾ 张晓斐^{3)†}

1) (重庆师范大学物理与电子工程学院, 重庆 401331)

2) (重庆邮电大学理学院, 重庆 400065)

3) (中国科学院国家授时中心, 时间频率基准重点实验室, 西安 710600)

(2018年11月12日收到; 2019年2月17日收到修改稿)

利用变分近似及基于 Gross-Pitaevskii 方程的直接数值模拟方法, 研究了自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中线性塞曼劈裂对亮孤子动力学的影响, 发现线性塞曼劈裂将导致体系具有两个携带有限动量的静态孤子, 以及它们在微扰下存在一个零能的 Goldstone 激发模和一个频率与线性塞曼劈裂有关的谐振激发模. 同时给出了描述孤子运动的质心坐标表达式, 发现线性塞曼劈裂明显影响孤子的运动速度和振荡周期.

关键词: 孤子, 玻色-爱因斯坦凝聚, Gross-Pitaevskii 方程, 自旋-轨道耦合

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 03.75.Mn, 71.70.Ej

DOI: 10.7498/aps.68.20182013

1 引言

孤子作为一种非线性波, 因其独特的传播性质及潜在的应用价值, 已成为非线性科学研究领域的重要研究课题之一. 孤子也是自然界中的一种普遍的非线性现象, 并广泛地存在于各种非线性介质中, 如水波、等离子体、粒子物理、分子生物学及光纤等^[1]. 特别地, 随着玻色-爱因斯坦凝聚 (BEC) 和简并费米气体的实验实现, 大量的研究结果展示, 超冷原子气体中也存在物质波孤子现象, 实验上已经相继观察到了物质波亮孤子、暗孤子及涡旋孤子等非线性现象^[2-13]. 由于物质波孤子在相干原子光学、原子干涉仪及原子输运等领域中存在着潜在的应用价值, 研究超冷原子气体中的孤子动力学

性质也成为了近几十年的热点研究课题之一.

近年来, 人造自旋-轨道耦合在超冷原子气体中的实验实现, 也为探索规范场中孤子的动力学性质提供了平台^[14-17]. 一方面, 自旋-轨道耦合使得体系单粒子基态在有限动量处简并^[18,19], 自旋-轨道耦合在 BEC 中将导致许多新奇的静态孤子, 例如条纹孤子和分数涡旋能隙孤子等^[20-42]. 另一方面, 在多组分 BEC 中, 孤子可看作是具有赝自旋的粒子, 自旋-轨道耦合将孤子自旋与质心耦合在一起, 使得孤子的自旋进将影响其质心运动. 例如, 孤子自旋周期性翻转将提供一个周期性的力去驱使孤子质心做周期性振荡^[43-46]. 由此可见, 自旋-轨道耦合为孤子的宏观量子调控提供了新的手段.

实验上在超冷原子气体中产生人造自旋-轨道耦合时, 不同分量间的能量差及 Raman 激光的频

* 国家自然科学基金 (批准号: 11875010, 11504037, 11775253, 11504038, 61874016, 11504035)、重庆市教委科学技术研究项目 (批准号: KJ1500411, KJ1600307)、重庆市前沿与应用基础研究计划一般项目 (批准号: cstc2015jcyjA00013)、重庆市高等教育创新群体项目 (批准号: CXTDX201601016) 和重庆市科技领军人才支持计划 (批准号: cstc2018kjxjlrjrc0050) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xfzhang@ntsc.ac.cn

率差将产生一个有效的线性塞曼劈裂^[14–17], 它使得单粒子能谱的对称结构被破坏, 并导致许多新奇的量子态, 如 BEC 中的极化平面波态、超冷费米气体中的拓扑超流态和 Majorana 费米子等^[47–51]. 除此以外, 甚至在没有自旋-轨道耦合的旋量 BEC 中, 塞曼劈裂也会导致一些新奇的拓扑孤子态^[52]. 因此, 在具有自旋-轨道耦合的 BEC 中, 线性塞曼劈裂将对孤子的动力学性质产生明显的影响.

本文以一维自旋-轨道耦合双组份 BEC 为研究对象, 深入研究线性塞曼劈裂对亮孤子动力学性质的影响. 假设体系的原子相互作用守恒 SU(2) 对称性, 并取双曲正弦函数作为亮孤子的试探波函数, 本文首先利用变分法导出了试探波函数中的变分参数 (未知参数) 随时间演化所满足的欧拉-拉格朗日方程; 然后求解欧拉-拉格朗日方程的固定点解, 在自旋-轨道耦合强度较弱时, 发现了两个近似的静态亮孤子解; 进一步对这两个静态孤子做线性稳定性分析, 获得了一个零能的 Goldstone 激发模和一个谐振激发模, 前者对应于平移对称性的破缺, 后者的振荡频率与线性塞曼劈裂的强度有关; 最后, 通过求解欧拉-拉格朗日方程, 获得了变分参数的含时精确解, 并发现线性塞曼劈裂明显地影响孤子的运动速度和振荡周期. 这些变分计算结果与基于 Gross-Pitaevskii (GP) 方程的直接数值模拟结果相吻合.

2 理论模型

考虑沿 z 方向的一维均匀自旋-轨道耦合双组份 BEC^[14–17]. 在由同一种原子的两种不同超精细态所形成的双组份 BEC 的实验中, 由于两个分量的种内原子相互作用强度和种间原子相互作用强度通常比较接近, 本文将假设两者相等, 即原子间的相互作用守恒 SU(2) 对称性. 因此, 在平均场近似下, 系统的动力学性质可用如下的无量纲化 GP 方程描述:

$$i \frac{\partial \psi_{\uparrow}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\uparrow}}{\partial z^2} - ik_R \frac{\partial \psi_{\uparrow}}{\partial z} + \varepsilon \psi_{\uparrow} + \Omega \psi_{\downarrow} + g n \psi_{\uparrow}, \quad (1a)$$

$$i \frac{\partial \psi_{\downarrow}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi_{\downarrow}}{\partial z^2} + ik_R \frac{\partial \psi_{\downarrow}}{\partial z} - \varepsilon \psi_{\downarrow} + \Omega \psi_{\uparrow} + g n \psi_{\downarrow}, \quad (1b)$$

方程中 $\psi_s(z, t)$ 为描述两个分量的动力学性质的波函数 ($s = \uparrow, \downarrow$ 代表两个不同的分量), 且满足归一

化条件 $\sum_{s=\uparrow, \downarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_s|^2 dz = 1$, z 和 t 分别为空间坐标和时间; $n = |\psi_{\uparrow}|^2 + |\psi_{\downarrow}|^2$ 为总密度分布; ε 为线性塞曼劈裂的强度; Ω 和 k_R 分别表示 Raman 激光强度和自旋-轨道耦合强度; $g < 0$ 代表原子间的吸引相互作用强度. 当自旋-轨道耦合存在时, GP 方程 ((1a), (1b)) 不可积^[25], 本文利用变分近似方法解析研究孤子的动力学性质^[1]. 在变分近似方法中, 体系所对应的拉格朗日量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{i}{2} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \left(\psi_s^* \frac{\partial \psi_s}{\partial t} - \psi_s \frac{\partial \psi_s^*}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \psi_{\uparrow}^* \frac{\partial^2 \psi_{\uparrow}}{\partial z^2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \psi_{\downarrow}^* \frac{\partial^2 \psi_{\downarrow}}{\partial z^2} + ik_R \left(\psi_{\uparrow}^* \frac{\partial \psi_{\uparrow}}{\partial z} - \psi_{\downarrow}^* \frac{\partial \psi_{\downarrow}}{\partial z} \right) - \varepsilon (|\psi_{\uparrow}|^2 \\ &\quad \left. - |\psi_{\downarrow}|^2) - \Omega (\psi_{\uparrow}^* \psi_{\downarrow} + \psi_{\downarrow}^* \psi_{\uparrow}) - \frac{g}{2} n^4 \right] dz, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $*$ 代表复共轭.

对于 SU(2) 自旋对称的均匀双组份 BEC, 假设 BEC 凝聚在单个准动量为 k 的态上, 则可以利用双曲正弦函数作为亮孤子的试探波函数, 并取两个分量孤子的宽度 η^{-1} 、质心坐标 $\langle z \rangle$ 和波矢 k 相等, 即

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow} \\ \psi_{\downarrow} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\eta}{2}} \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i(kz + \varphi_{\uparrow})} \\ \cos \theta e^{i(kz + \varphi_{\downarrow})} \end{pmatrix} \text{sech}[\eta(z - \langle z \rangle)], \quad (3)$$

其中变分参数 θ , η , $\langle z \rangle$, k 和 φ_s 都是时间的函数; φ_s 代表两个组份中亮孤子的相位; θ 可描述两个亮孤子的振幅比. 将波函数 (3) 代入拉格朗日量 (2) 式, 并定义 $\varphi_{\pm} = (\varphi_{\uparrow} \pm \varphi_{\downarrow})/2$ 及 $\beta = k_R k + \varepsilon$, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= -\langle z \rangle \frac{dk}{dt} + \cos(2\theta) \frac{d\varphi_{-}}{dt} - \frac{d\varphi_{+}}{dt} + \beta \cos(2\theta) \\ &\quad - \Omega \sin(2\theta) \cos(2\varphi_{-}) - \frac{\eta(\eta+g)}{6} - \frac{1}{2} k^2. \end{aligned} \quad (4)$$

然后利用欧拉-拉格朗日方程 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}} \right) = 0$ (A 为变分参数 θ , k , $\langle z \rangle$, φ_{\pm} 及 η , 且 $\dot{A} = dA/dt$), 可得变分参数随时间演化的运动方程

$$\eta = -g/2, \quad (5a)$$

$$dk/dt = 0, \quad (5b)$$

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} = k - k_R \cos(2\theta), \quad (5c)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Omega \sin(2\varphi_{-}), \quad (5d)$$

$$\frac{d\varphi_-}{dt} = -\beta - \Omega \cot(2\theta) \cos(2\varphi_-). \quad (5e)$$

方程 (5a) 和 (5b) 说明孤子的宽度仅由原子间的相互作用决定, 且两个孤子的动量守恒. 方程 (5c)—(5e) 表明, 自旋-轨道耦合将 θ 、 $\langle z \rangle$ 及 φ_- 耦合在一起, 并且线性塞曼劈裂也影响这些参数的动力学演化, 这将导致孤子展现出有趣的动力学特征.

3 静态孤子

通过设 $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\langle z \rangle}{dt} = \frac{d\varphi_-}{dt} = 0$, 首先求解欧拉-拉格朗日方程 (5a)—(5e) 的固定点解 (用符号“ \sim ”作为上标标记), 它或许对应于静态孤子解 [1,53]. 从方程 (5c) 和 (5d) 中可看出, $\tilde{\varphi}_- = n\frac{\pi}{2}$ (n 为整数) 和 $\tilde{z} = \text{任意常数}$, 后者说明静态孤子具有平移对称性. 而固定点解 $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 满足非线性方程组 $\tilde{k} = k_R \cos(2\tilde{\theta})$ 和 $0 = k_R^2 \cos(2\tilde{\theta}) + \varepsilon + (-1)^n \Omega \cot(2\tilde{\theta})$.

由于 n 取奇数和偶数时, $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 的解仅仅相差一个负号, 因此本文考虑 $n = 0$ 的简单情形. 图 1 给出了固定点解 $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 随线性塞曼劈裂强度的变化, 曲线颜色代表不同的解. 从图 1(a) 和 (b) 中可看出, 当 $\Omega/k_R^2 < 1$ 时, 线性塞曼劈裂存在着一个临界值 ε_c , 它随 Raman 耦合强度增加而单调递减 (见图 1(e)). 如果 $\varepsilon < \varepsilon_c$, $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 分别具有四个不同的解, 否则 $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 分别具有两个不同的解. 而对于 $\Omega/k_R^2 > 1$, 不论线性塞曼劈裂强度取何值, $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 都只具有两个不同的解 (见图 1(c) 和 (d)). 特别的, 如图 1(a)—(d) 所示, 归咎于线性塞曼劈裂的存在, 这些固定点所对应的孤子总是具有非零的动量, 并且两个分量间的粒子数不相等, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (|\psi_{\uparrow}|^2 - |\psi_{\downarrow}|^2) dz = -\tilde{k}/k_R \neq 0.$$

变分法仅仅是一种近似方法, 有必要将欧拉-拉格朗日方程 (5a)—(5e) 的固定点解与 GP 方程

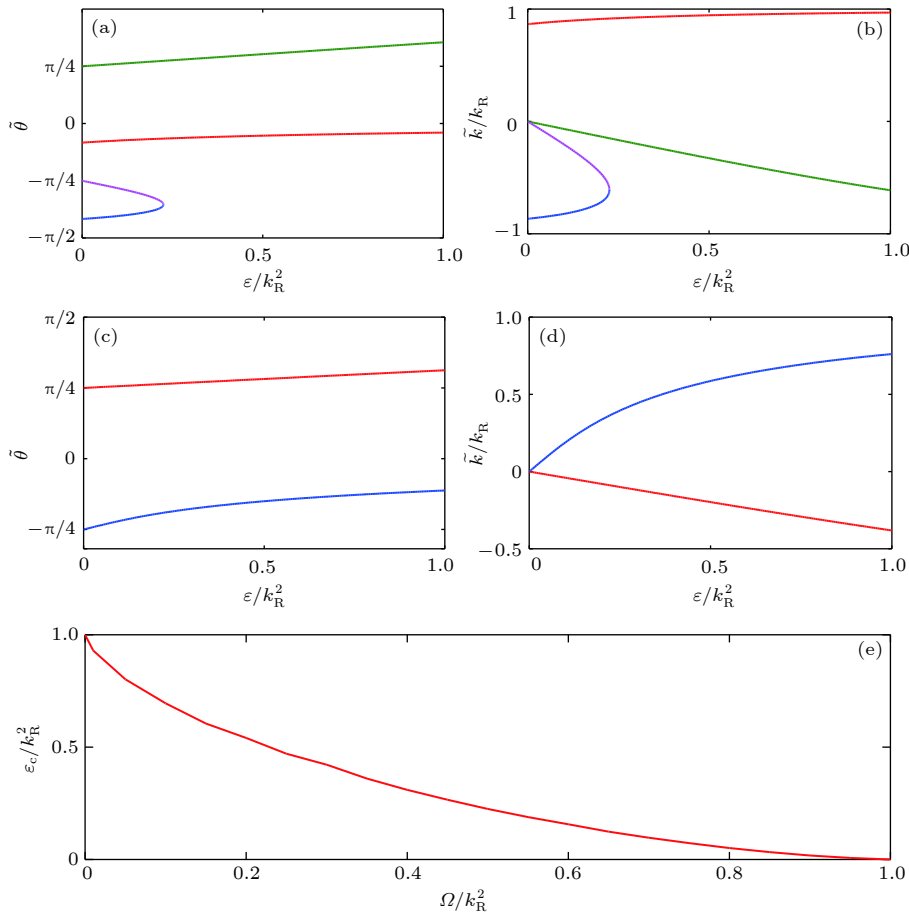


图 1 (a), (b) $\Omega/k_R^2 = 0.5$ 时固定点解 $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 随线性塞曼劈裂 ε 的变化; (c), (d) $\Omega/k_R^2 = 1.5$ 时固定点解 $\tilde{\theta}$ 和 \tilde{k} 随线性塞曼劈裂 ε 的变化; (e) $\Omega/k_R^2 < 1$ 时临界值 ε_c 随 Ω 的变化

Fig. 1. (a) and (b) show the $\tilde{\theta}$ and \tilde{k} change with ε for $\Omega/k_R^2 = 0.5$; (c) and (d) display $\tilde{\theta}$ and \tilde{k} change with ε for $\Omega/k_R^2 = 1.5$; (e) shows the critical value ε_c versus Ω for $\Omega/k_R^2 < 1$.

的数值解作对比^[1]. 一方面, 可利用虚时演化方法求解 GP 方程的静态孤子数值解, 其结果展示在图 2(a) 和 (b) 中. 对于弱的自旋-轨道耦合 ($\Omega/k_R^2 \gg 1$), 图 2(a) 展示欧拉-朗格朗日方程 (5a)–(5e) 的固定点解与 GP 方程的静态孤子数值解相一致. 然而, 对于强自旋-轨道耦合 ($\Omega/k_R^2 \ll 1$) 的情况, 两者存在着明显的差别 (见图 2(b)), 图 2(a), (b) 中变分静态孤子解分别取自于图 1(d) 和 1(a) 中的蓝色和红色曲线. 因此, 在弱自旋-轨道耦合情况下, 变分法能产生一个较好的静态孤子近似解. 另一方面, 也可以将欧拉-朗格朗日方程 (5a)–(5e) 的固定点解作为初始条件去数值求解含时 GP 方程, 如果孤子在含时演化中能够保持其初始波形而不运动, 则欧拉-拉格朗日方程 (5a)–(5e) 的固定点解可认作是 GP 方程的静态孤子近似解. 这些含时演化结果展示在图 2(c)–(f) 中, 从中可以看出, 对于弱自

旋-轨道耦合的情况 ($\Omega/k_R^2 \gg 1$), 尽管线性塞曼劈裂导致初始孤子具有一个有限的动量, 但是这些孤子总是能保持其初始的波形而静止在初始位置 (见图 2(c), (d)). 相反, 对于强自旋-轨道耦合的情形 ($\Omega/k_R^2 \ll 1$), GP 方程的含时数值演化结果表明, 孤子将偏离初始位置, 它不仅沿着 z 方向线性运动, 而且运动过程中还会出现振荡运动 (见图 2(e), (f)).

利用线性稳定性理论可进一步分析这些静态孤子在微扰下的稳定性及激发模式^[1,53]. 设变分参数 $A(t) = \tilde{A} + \delta e^{i\omega t}$, 其中 δA 代表在微扰下变分参数相对于其固定点解 \tilde{A} 的偏离, ω 为激发的本征频率. 将 $A(t) = \tilde{A} + \delta A e^{i\omega t}$ 代入欧拉-拉格朗日方程, 并保留至 δA 的一阶项, 可得矩阵方程:

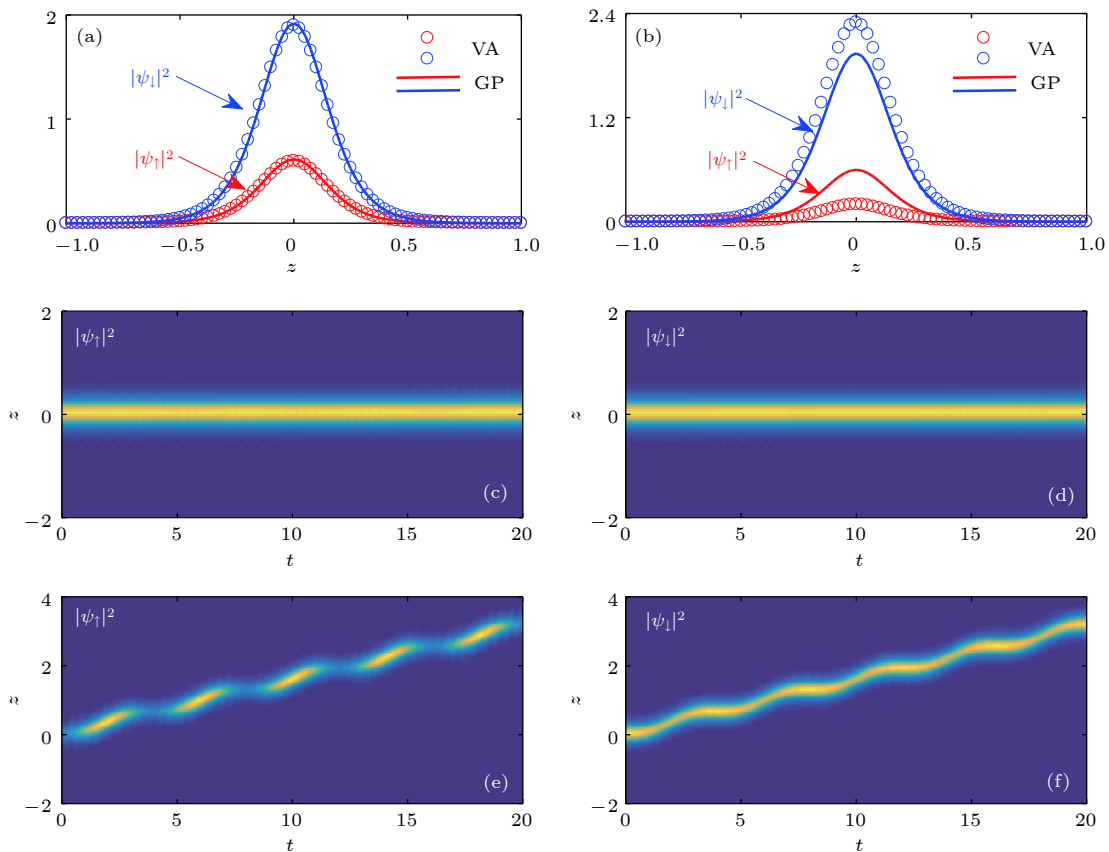


图 2 (a) 和 (b) 分别展示 $k_R = 0.2\Omega$ 和 $k_R = 1.5\Omega$ 时, 变分静态孤子解 (圆圈) 与 GP 方程 (2) 静态孤子的数值解 (实线) 的对比, 其他参数取值为 $\varepsilon = 0.3$, $\Omega = 0.5$ 及 $g = -10$; (c)–(f) 分别为 (a) 和 (b) 中的变分静态孤子解作为初始条件在含时 GP 方程中的动力学演化

Fig. 2. (a), (b) show the comparisons between the variationally predicted stationary soliton solutions (circles) and the numerical solutions (solid lines) of stationary solitons of GP equation (2) for $k_R = 0.2\Omega$ and $k_R = 1.5\Omega$ with $\Omega = 0.5$, respectively. The other parameters are $\varepsilon = 0.3$ and $g = -10$; (c)–(f) are the dynamical evolutions of solitons in time-dependent GP simulations by using the variationally predicted stationary soliton solutions in (a) and (b) as initial wave functions, respectively.

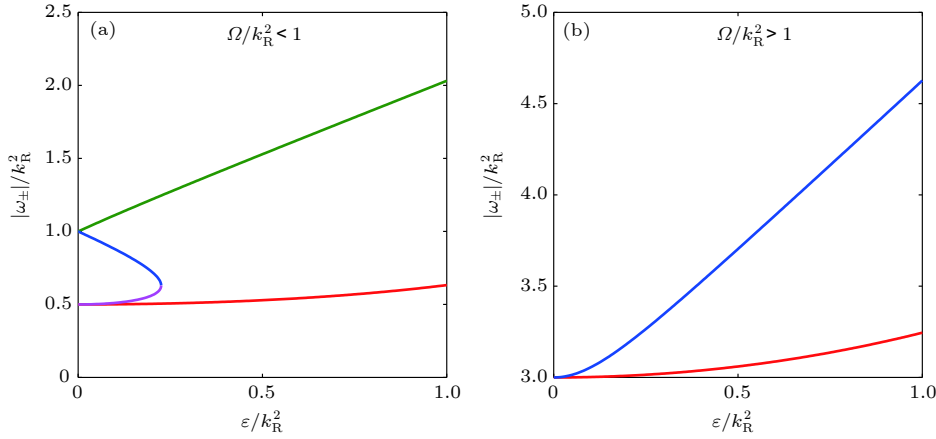

 图 3 $\Omega/k_R^2 = 0.5$ (a) 和 $\Omega/k_R^2 = 1.5$ (b) 时, 频率 $\omega_{\pm} = \pm 2\Omega/\sin(2\tilde{\theta})$ 随线性塞曼劈裂强度 ε 的变化

 Fig. 3. The frequency $\omega_{\pm} = \pm 2\Omega/\sin(2\tilde{\theta})$ changes with ε for $\Omega/k_R^2 = 0.5$ and $\Omega/k_R^2 = 1.5$ in (a) and (b), respectively.

$$\begin{pmatrix} i\omega & 0 & 0 & 0 \\ -1 & i\omega & -2k_R \sin(2\tilde{\theta}) & 0 \\ 0 & 0 & i\omega & 2\Omega \\ k_R & 0 & -\frac{2\Omega}{\sin^2(2\tilde{\theta})} & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta k \\ \delta\langle z \rangle \\ \delta\theta \\ \delta\varphi_- \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

解该矩阵方程, 可得到本征频率 $\omega_1 = \omega_2 = 0$ 和 $\omega_{\pm} = \pm \frac{2\Omega}{\sin(2\tilde{\theta})}$, 以及对应的本征矢量 $\mathbf{V}_1 = (0, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{V}_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ 及 $\mathbf{V}_{\pm} = \left(0, \frac{k_R}{\Omega} \sin^3(2\tilde{\theta}), \pm i \sin(2\tilde{\theta})\right)^T$, 其中上标“T”表示转置. 根据线性稳定性分析理论可知^[1], 所有 4 个本征频率都为实数, 说明静态孤子在微扰下是动力学稳定的. 与本征矢量 \mathbf{V}_1 相对应的零能模表明, 孤子在扰动下将保持不变. 而与本征矢量 \mathbf{V}_2 相对应的零能模就是所谓的 Goldstone 模. 由于本征矢量 \mathbf{V}_2 中的 $\delta\langle z \rangle \neq 0$, 而 δk , $\delta\theta$ 及 $\delta\varphi_-$ 均为 0, 说明孤子质心坐标在扰动下将偏离其平衡位置而以零频率振动, 即孤子在扰动下将以固定速度做线性运动, 其平移对称性被破坏^[54]. 对于频率为 ω_{\pm} 的谐振模, 孤子在扰动下将以频率 ω_{\pm} 而振荡, 且 ω_{\pm} 也与线性塞曼劈裂有关 (见图 3, 图 3(a), (b) 中的 $\tilde{\theta}$ 分别取图 1(a) 和 (c) 中的数据).

4 孤子的运动

通过求解含时欧拉-拉格朗日方程的解, 可研究线性塞曼劈裂对孤子的运动的影响. 由于自旋-轨道耦合将变分参数 $\langle z \rangle$ 、 θ 及 φ_- 非线性地耦合在

一起, 很难直接求解欧拉-拉格朗日方程的精确解.

为此, 首先引入满足条件 $\sum_{s=\uparrow, \downarrow} |\chi_s|^2 = 1$ 的复值旋量 $\chi_s = \psi_s/\sqrt{n}$, 并定义亮孤子自旋

$$S_x = \chi_{\uparrow} \chi_{\downarrow}^* + \chi_{\downarrow}^* \chi_{\uparrow} = \sin(2\theta) \cos(2\varphi_-),$$

$$S_y = i(\chi_{\uparrow} \chi_{\downarrow}^* - \chi_{\downarrow}^* \chi_{\uparrow}) = -\sin(2\theta) \sin(2\varphi_-),$$

及 $S_z = |\chi_{\uparrow}|^2 - |\chi_{\downarrow}|^2 = -\cos(2\theta)$. 结合欧拉-拉格朗日方程, 可导出孤子自旋满足的运动方程

$$\frac{dS_x}{dt} = -2\beta S_y, \quad (7a)$$

$$\frac{dS_y}{dt} = 2\beta S_x - 2\Omega S_z, \quad (7b)$$

$$\frac{dS_z}{dt} = 2\Omega S_y. \quad (7c)$$

该方程为常系数线性微分方程组, 其精确解为

$$S_x = \frac{a\beta}{\varpi} \sin(2\varpi t - \phi) + \frac{\Omega c}{\varpi^2}, \quad (8a)$$

$$S_y = a \sin(2\varpi t + \phi), \quad (8b)$$

$$S_z = -\frac{a\Omega}{\varpi} \sin(2\varpi t - \phi) + \frac{\beta c}{\varpi^2}, \quad (8c)$$

其中

$$\varpi = \sqrt{\Omega^2 + \beta^2},$$

$$\phi = \arctan(b/S_{y,0}),$$

$$a = \sqrt{b^2 + S_{y,0}^2},$$

$$b = (\beta S_{x,0} - \Omega S_{z,0})/\omega,$$

$c = \Omega S_{x,0} + \beta S_{z,0}$, 下标“0”标记 $S_{x,y,z}$ 的初始值, 它们由变分参数 θ 和 φ_- 的初始值 θ_0 和 $\varphi_{-,0}$ 决定.

从解 (8a)—(8c) 式中可反解得出 θ 和 φ_- 的解, 即

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \arccos(S_z) \text{ 及 } \varphi_- = -\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{S_y}{S_x}\right).$$

对于孤子质心 $\langle z \rangle$, 由于欧拉-拉格朗日方程 (5c) 可写作 $\frac{d\langle z \rangle}{dt} = k + k_R S_z$, 则将 S_z 的精确解代入, 并积分可得

$$\langle z \rangle(t) = \frac{k_R \Omega}{2\omega^2} [2S_{y,0} \sin^2(\omega t) - b \sin(2\omega t)] + \left(\frac{k_R \beta c}{\omega^2} + k\right)t, \quad (9)$$

其中已假设孤子质心的初始值为 0. 从精确解中可以看出, 在自旋-轨道耦合、Raman 耦合及线性塞曼劈裂的作用下, 孤子的质心运动是周期振荡及线性运动的叠加, 其振荡频率 2ω 及线性运动速度 $v = k_R \beta c / \omega^2 + k$ 均与线性塞曼劈裂强度有关.

对于给定的初始条件, 我们数值求解 GP 方程 (1a), (1b), 并将 GP 方程的数值解与变分精确解做对比. 为了研究线性塞曼劈裂对孤子运动的影响, 本文考虑初始条件 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ 及 $\varphi_{-,0} = 0$, 并假设 BEC 的凝聚动量 $k = 0$. 如果线性塞曼劈裂为零, 变分精确解为 $\theta(t) = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_- = 0$ 及 $\langle z \rangle(t) = 0$, 说明孤子并不会运动, 与 GP 方程的数值模拟结果一致 (见图 4(a)—(c)). 图 4(a)—(f) 其他参数取值为 $g = -10$, $\eta = -g/2$, $k_R = \sqrt{\Omega/2}$ 及 $\Omega = 0.5$. 然而, 当线性塞曼劈裂不为零时, 孤子质心的变分精确解为

$$\langle z \rangle(t) = -\frac{k_R \Omega \varepsilon}{2(\Omega^2 + \varepsilon^2)^{3/2}} \sin(2\sqrt{\Omega^2 + \varepsilon^2}t) + \frac{k_R \Omega \varepsilon}{\Omega^2 + \varepsilon^2}t,$$

如图 4(d)—(f) 所示, 孤子沿 z 方向线性运动的同时

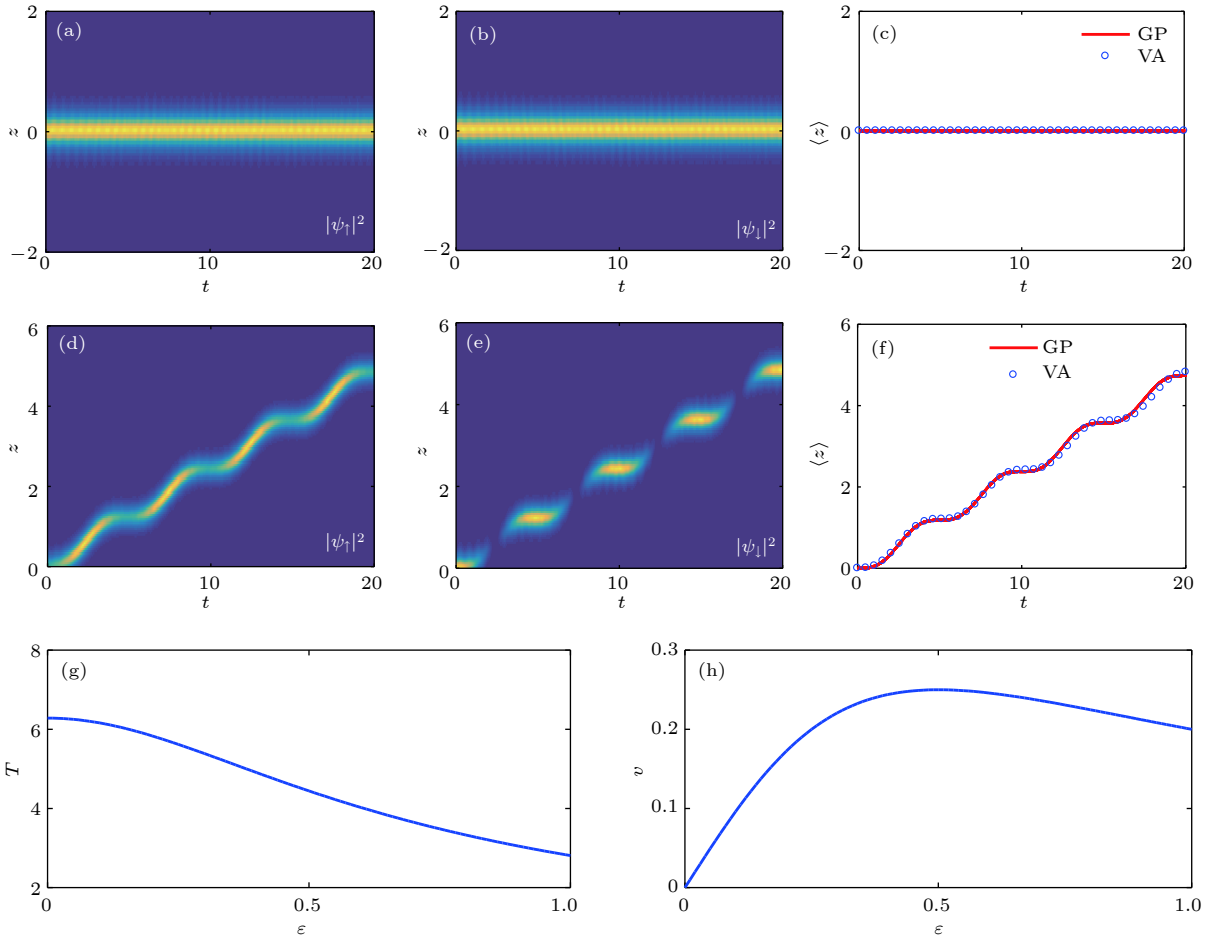


图 4 (a)—(f) 初始值为 $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_{-,0} = 0$ 及 $k = 0$ 的孤子动力学演化 (a)—(c) $\varepsilon = 0$, (d)—(f) $\varepsilon = 0.35$; 孤子振荡周期 T (g) 及速度 v (h) 随线性塞曼劈裂的变化

Fig. 4. (a)—(f) show the dynamical evolutions of initially balanced solitons with $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$, $k = 0$ and $\varphi_{-,0} = 0$ in GP simulations, $\varepsilon = 0$ in (a)—(c), and $\varepsilon = 0.35$ in (d)—(f); oscillation period T (g) and moving velocity v (h) of solitons change with the linear Zeeman splitting.

时将做振荡运动, 振荡周期 T 及线性运动速度 v 与线性塞曼劈裂的强度有关 (见图 4(g), (h), 其中 $k_R = \sqrt{\Omega/2}$, $\Omega = 0.5$). 此外, 我们也选择了其他初始条件进行数值模拟, 并发现线性塞曼劈裂将影响孤子的运动速度及振荡频率, 且变分精确解与 GP 方程的数值模拟结果相吻合.

5 结 论

本文研究了线性塞曼劈裂对一维自旋-轨道耦合双组份 BEC 中亮孤子的动力学性质的影响. 通过选择双曲正弦函数作为亮孤子的变分试探波函数, 可运用变分法导出变分参数随时间演化所满足的欧拉-拉格朗日方程. 求解不含时的欧拉-拉格朗日方程, 在弱自旋-轨道耦合情况下, 获得了两个近似的静态孤子解. 基于线性稳定性分析, 进一步发现了一个零能的 Goldstone 激发模和一个谐振激发模, 前者对应于在外界扰动下静态孤子的平移对称性破缺, 后者表明静态孤子在外界扰动下将做谐振运动, 其谐振频率也与线性塞曼劈裂有关. 最终, 通过求解含时欧拉-拉格朗日方程, 描述孤子质心运动的精确变分解被获得, 并发现线性塞曼劈裂将明显地影响孤子的运动速度和谐振周期. 所有这些变分计算结果都与 GP 方程的直接数值模拟相吻合.

参考文献

- [1] Malomed B A 2006 *Soliton Management in Periodic Systems* (Vol. 1) (Berlin: Springer) p1
- [2] Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J, Carretero-Gonzalez R 2008 *Emergent Nonlinear Phenomena in Bose-Einstein Condensates* (Vol. 1)(Berlin: Springer) pp43–96
- [3] Burger S, Bongs K, Dettmer S, Ertmer W, Sengstock K, Sanpera A, Shlyapnikov G V, Lewenstein M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [4] Khaykovich L, Schreck F, Ferrari G, Bourdel T, Cubizolles J, Carr L D, Castin Y, Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [5] Strecker K E, Partridge G B, Truscott A G, Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [6] Cornish S L, Thompson S T, Wieman C E 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 170401
- [7] Marchant A L, Billam T P, Wiles T P, Yu M M H, Gardiner S, Cornish S L 2013 *Nat. Commun.* **4** 1865
- [8] Nguyen J H V, Dyke P, Luo D, Malomed B A, Hulet R G 2014 *Nat. Phys.* **10** 918
- [9] Yefsah T, Sommer A T, Ku M J H, Cheuk L W, Ji W, Bakr W S, Zwierlein M W 2013 *Nature* **499** 426
- [10] Ku M J H, Ji W, Mukherjee B, Guardado-Sanchez E, Cheuk L W, Yefsah T, Zwierlein M W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 065301
- [11] Zhang W X, Zhang Z Q, Ran M W, Ou Y K, He Z M 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 200507 (in Chinese) [张蔚曦, 张志强, 冉茂武, 欧永康, 何章明 2014 物理学报 **63** 200507]
- [12] Guo X H, Xu T F, Liu C S 2018 *Chin. Rhys. B* **27** 060307
- [13] Wang Q, Wen L, Li Z D 2012 *Chin. Phys. B* **21** 080501
- [14] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [15] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [16] Wang P, Yu Z Q, Fu Z, Miao J, Huang L, Chai S, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
- [17] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
- [18] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [19] Zhou X, Li Y, Cai Z, Wu C J 2013 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46** 134001
- [20] Xu Y, Zhang Y, Wu B 2013 *Phys. Rev. A* **87** 013614
- [21] Achilleos V, Frantzeskakis D J, Kevrekidis P G, Pelinovsky D E 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 264101
- [22] Achilleos V, Stockhofe J, Kevrekidis P G, Frantzeskakis D J, Schmelcher P 2013 *Europhys. Lett.* **103** 20002
- [23] Kartashov Y V, Konotop V V, Abdullaev F K 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 060402
- [24] Liu Y K, Yang S J 2014 *Europhys. Lett.* **108** 30004
- [25] Kartashov Y V, Konotop V V, Zezyulin D A 2014 *Phys. Rev. A* **90** 063621
- [26] Gautam S, Adhikari S K 2015 *Laser Phys. Lett.* **12** 045501
- [27] Gautam S, Adhikari S K 2015 *Phys. Rev. A* **91** 063617
- [28] Zhang Y, Xu Y, Busch T 2015 *Phys. Rev. A* **91** 043629
- [29] Peotta S, Mireles F, Di Ventra M 2015 *Phys. Rev. A* **91** 021601
- [30] Sakaguchi H, Li B, Malomed B A 2014 *Phys. Rev. E* **89** 032920
- [31] Sakaguchi H, Sherman E Y, Malomed B A 2016 *Phys. Rev. E* **94** 032202
- [32] Salasnich L, Cardoso W B, Malomed B A 2014 *Phys. Rev. A* **90** 033629
- [33] Sakaguchi H, Malomed B A 2014 *Phys. Rev. E* **90** 062922
- [34] Lobanov V E, Kartashov Y V, Konotop V V 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 180403
- [35] Zhang Y C, Zhou Z W, Malomed B A, Pu H 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 253902
- [36] Beličev P P, Gligorić G, Petrovic J, Maluckov A, Hadžievski L, Malomed B A 2015 *J. Phys. B* **48** 065301
- [37] Li Y, Liu Y, Fan Z, Pang W, Fu S, Malomed B A 2017 *Phys. Rev. A* **95** 063613
- [38] Liao B, Li S, Huang C, Luo Z, Pang W, Tan H, Malomed B A, Li Y 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043613
- [39] Sakaguchi H, Malomed B A 2018 *Phys. Rev. A* **97** 013607
- [40] Zhong R, Chen Z, Huang C, Luo Z, Tan H, Malomed B A, Li Y 2018 *Front. Phys.* **13** 130311
- [41] Xu Y, Mao L, Wu B, Zhang C 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 130404
- [42] Li Y E, Xue J K 2016 *Chin. Phys. Lett.* **33** 100502
- [43] Wen L, Sun Q, Chen Y, Wang D S, Hu J, Chen H, Liu W M, Juzeliūnas G, Malomed B A, Ji A C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 061602
- [44] Wen L, Zhang X F, Hu A Y, Zhou J, Yu P, Xia L, Sun Q, Ji A C 2018 *Anns. Phys.* **390** 181
- [45] Sakaguchi H, Malomed B A 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043620
- [46] Kartashov Y V, Konotop V V 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 190401
- [47] Wen L, Sun Q, Wang H Q, Ji A C, Liu W M 2012 *Phys. Rev. A* **86** 043602

- [48] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [49] Gong M, Chen G, Jia S T, Zhang C 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 105302
- [50] Qu C L, Zheng Z, Gong M, Xu Y, Mao L, Zou X, Guo G, Zhang C 2013 *Nat. Commun.* **4** 2710
- [51] Zhang W, Yi W 2013 *Nat. Commun.* **4** 2711
- [52] Zhao D, Song S W, Wen L, Li Z D, Luo H G, Liu W M 2015 *Phys. Rev. A* **91** 013619
- [53] Zong F D, Yang Y, Zhang J F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3670 (in Chinese) [宗丰德, 杨阳, 张解放 2009 物理学报 **58** 3670]
- [54] Alotaibi M O D, Carr L D 2017 *Phys. Rev. A* **96** 013601

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates^{*}

Wen Lin¹⁾ Liang Yi¹⁾ Zhou Jing²⁾ Yu Peng¹⁾ Xia Lei¹⁾
 Niu Lian-Bin¹⁾ Zhang Xiao-Fei^{3)†}

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*)

2) (*Department of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

3) (*Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standards, National Time Service Center,*

Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China)

(Received 12 November 2018; revised manuscript received 17 February 2019)

Abstract

Solitons as self-supported solitary waves are one of the most fundamental objects in nonlinear science. With the realization of Bose-Einstein condensate, matter-wave solitons have aroused enormous interest due to their potential applications in atomic transport and atomic interferometer. In recent years, the artificial spin-orbit coupling has been realized in ultracold atoms, thus providing a new platform to study the nonlinear matter wave solitons under a gauge field, and a variety of novel soliton phenomena have been successively predicted. In this paper, we analyze the effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright-bright solitons in spin-orbit coupled two-component Bose-Einstein condensate, via the variational approximation and the numerical simulation of Gross-Pitaevskii (GP) equations. For the SU(2) spin-rotational invariant attractive atomic interaction in a uniform case without external trap, we take a hyperbolic secant function as the variational Ansatz for bright soliton in variational approximation, and derive the Euler-Lagrange equations describing the evolution of the Ansatz parameters. By solving the time-independent Euler-Lagrange equations, we find two stationary solitons each with a finite momentum for a weak spin-orbit coupling due to the linear Zeeman splitting. Linearizing the Euler-Lagrange equations around these stationary solitons, we further obtain a zero-energy Goldstone mode and an oscillation mode with frequency related to linear Zeeman splitting; the former indicates that the continuous translational symmetry of the stationary solitons will be broken under a perturbation, and the later shows that the stationary solitons will oscillate under a perturbation. Furthermore, by solving the time-dependent Euler-Lagrange equations, we also obtain the exact full dynamical solutions of Ansatz parameters, and observe that the linear Zeeman splitting affects the period and velocity of soliton's oscillation and linear motion, which may provide a new method to control the dynamics of solitons. All the variational calculations are also confirmed directly by the numerical simulation of GP equations.

Keywords: soliton, Bose-Einstein condensate, Gross-Pitaevskii equation, spin-orbit coupling

PACS: 03.75.Lm, 03.75.Kk, 03.75.Mn, 71.70.Ej

DOI: 10.7498/aps.68.20182013

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11875010, 11504037, 11775253, 11504038, 61874016, 11504035), the Foundation of Education Committees of Chongqing, China (Grant Nos. KJ1500411, KJ1600307), the Chongqing Research Program of Basic Research and Frontier Technology, China (Grant No. cstc2015jcyjA00013), the Foundation for the Creative Research Groups of Higher Education of Chongqing, China (Grant No. CXTDX201601016), and the Chongqing Science and Technology Innovation Leading Talents Support Plan, China (Grant No. cstc2018kjcxljrc0050).

[†] Corresponding author. E-mail: xfzhang@ntsc.ac.cn