



## 基于电流积分计算磁矢量势修正的低磁雷诺数方法

丁明松 江涛 刘庆宗 董维中 高铁锁 傅杨奥骁

## An improved low magnetic Reynolds magnetohydrodynamic method based on computing induced magnetic vector potential by integrating induced current

Ding Ming-Song Jiang Tao Liu Qing-Zong Dong Wei-Zhong Gao Tie-Suo Fu Yang-Aoxiao

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 134702 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20200091

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200091>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 热化学模型对高超声速磁流体控制数值模拟影响分析

Numerical analysis of influence of thermochemical model on hypersonic magnetohydrodynamic control

物理学报. 2019, 68(17): 174702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190378>

#### 磁控条件下激波冲击三角形气柱过程的数值研究

Numerical investigations of interactions between shock waves and triangular cylinders in magnetic field

物理学报. 2018, 67(20): 204701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181127>

#### 不同磁场构型下Richtmyer–Meshkov不稳定性的数值研究及动态模态分解

Numerical investigations of Richtmyer–Meshkov instability in different magnetic field configurations and the corresponding dynamic mode decomposition

物理学报. 2019, 68(16): 165201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190410>

#### 低雷诺数下钝体三维尾迹中的涡量符号律

Vorticity sign law in three-dimensional wake of bluff body at low Reynolds number

物理学报. 2020, 69(3): 034701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191011>

#### 感应式脉冲推力器中等离子体加速数值研究

Numerical investigation on the plasma acceleration of the inductive pulsed plasma thruster

物理学报. 2017, 66(7): 075204 <https://doi.org/10.7498/aps.66.075204>

#### 螺旋波等离子体放电三维直接数值模拟

Three-dimensional direct numerical simulation of helicon discharge

物理学报. 2017, 66(2): 025201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.025201>

# 基于电流积分计算磁矢量势修正的低磁雷诺数方法

丁明松 江涛 刘庆宗 董维中<sup>†</sup> 高铁锁 傅杨奥骁

(中国空气动力研究与发展中心计算空气动力研究所, 绵阳 621000)

(2020年1月14日收到; 2020年3月25日收到修改稿)

针对低磁雷诺数方法的适用性问题, 分析了当前低磁雷诺数条件应用上存在分歧以及全磁流体力学方法在高超声速领域局限性产生的原理. 在低磁雷诺磁流体力学控制数值模拟方法的基础上, 基于感应电流积分计算磁矢量势, 考虑截断因子对计算域的缩减, 提出了一种考虑感应磁场修正的低磁雷诺数磁流体力学计算方法, 并加以验证. 结合 RAM-C 钝锥体试验飞行状态数值模拟, 分析了“忽略感应磁场”造成的计算偏差, 探讨了“低磁雷诺数假设”在高超声速领域的使用原则. 研究表明: 1) 本文建立的修正计算方法, 突破低磁雷诺数条件的限制, 拓展了低磁雷诺数方法在高超声速领域的适用性和应用范围, 数值模拟结果可信度高, 同时通过积分区域限制等方法使计算效率得到了较大的提升; 2) 高超声速流动过程中感应磁场的影响, 在宏观上表现为对外加磁场的削弱和扭曲, 一定程度上降低了磁控效果; 本文计算条件下, “ $Re_m < 0.1$ ”的低磁雷诺数条件可能过于保守, 建议取为  $Re_m < 1.0$ , 同时其特征电导率和特征尺度应综合考虑实际的等离子体分布.

**关键词:** 磁流体力学, 低磁雷诺数条件, 等离子体, 数值模拟

**PACS:** 47.40.Ki, 47.85.L-, 52.30.Cv, 41.20.Gz

**DOI:** 10.7498/aps.69.20200091

## 1 引言

早在二十世纪五六十年代, 人们就开始了磁流体力学 (magnetohydrodynamic, MHD) 的研究. 上世纪九十年代以来, 随着高超声速飞行技术、计算机技术和便携磁体制造业的发展, 高超声速磁流体力学控制掀起了新的研究热潮. 在飞行器不同部位加载合适的磁场发生装置, 通过动量和能量的输运对高超声速飞行器周围的流动状态进行控制, 显著地改进和提升飞行器的气动力/热特性、电磁通信性能、隐身与突防特性等, 这就是高超声速磁流体力学控制<sup>[1]</sup>. 高超声速磁流体控制技术已经成为一个多学科交叉融合的重要研究方向, 其应用前景十分广泛, 可用于飞行器气动热环境管理、气动力操控、等离子体电子数密度控制、流速控制和边界

层控制等多个方面<sup>[2]</sup>. 由于它具备不改变飞行器外部结构、无需机械传动、响应快速准确、兼容性强等优点, 因而受到世界各国高度重视.

数值模拟是研究高超声速磁流体力学控制的主要手段之一. 从高超声速磁流体力学的国内外发展状况可以看出, 当前高超声速 MHD 数值模拟的方法主要有两种<sup>[1,3]</sup>: 全 MHD 方法和低磁雷诺数 MHD 方法 (或简称低磁雷诺数方法).

全 MHD 方法<sup>[4,5]</sup>是通过广义欧姆定律和安培环路定理消去流动控制方程和麦克斯韦方程组中电场  $E$  和感应电流  $J$ , 然后将流动控制方程和磁扩散方程 (由法拉第定律得到) 联立构成全 MHD 方程组, 求解该方程组得到磁流体流场和感应磁场分布. 在此基础上, 可通过求解电流连续性方程和广义欧姆定律, 得到电场和电流分布. 全 MHD 方法理论上适用于各类磁流体的数值计算分析, 但在高

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [dongwz1966@163.com](mailto:dongwz1966@163.com)

超声速飞行器流场(尤其是外流场)MHD 数值模拟方面存在很大困难<sup>[1,2]</sup>.

与其他领域不同,高超声速飞行领域磁流体力学控制具有其自身的特点.由于高超声速飞行器外流场等离子体磁导率小、导电性一般较弱,电磁场变化的特征时间远小于流动的特征时间,因此数值模拟飞行器高超声速流场磁流体流动时常采用“低磁雷诺数近似”:在磁导率、电导率较小时,感应磁场相对于外加磁场很弱,基本上可以忽略,此时可以假设磁场未受流动干扰,舍去电磁交叉项,使数值模拟过程得到简化,这就是低磁雷诺数 MHD 方法.对于稳态(或准稳态)高超声速磁流体流动,采用低磁雷诺数方法,可以有效地避免伪磁场散度和低电导率带来的刚性问题,减小了非必要的繁复计算,这是业内通行的做法之一.国内外很多高超飞行器磁流体力学控制方面的研究,如日本的 Nagata 等<sup>[6]</sup>、Otsu<sup>[7]</sup>、Fujino 等<sup>[8]</sup>和 Takahashi 等<sup>[9]</sup>,美国的 Bisek 等<sup>[10,11]</sup>和 Lee 等<sup>[12]</sup>,意大利的 Cristofolini 等<sup>[13,14]</sup>,国内的李开等<sup>[15,16]</sup>、姚霄等<sup>[17]</sup>、潘勇<sup>[2]</sup>、张向洪<sup>[3]</sup>、何森生等<sup>[18]</sup>、陈刚等<sup>[19]</sup>以及孙晓辉<sup>[20]</sup>等,在针对“低磁导率、低电导率特征”气体的数值模拟时,也几乎都采用低磁雷诺数 MHD 方法.

尽管低磁雷诺数 MHD 方法,在高超声速飞行领域得到了较为广泛的应用和发展,但由于它采用了“忽略感应磁场”这一假设,其应用范围受到限制.为了拓展低磁雷诺数 MHD 方法的应用范围,本文针对“忽略感应磁场”这一核心假设,探讨低磁雷诺数 MHD 方法在高超声速领域适用性问题,分析全 MHD 方法在高超声速流动领域局限性的产生原理,创建基于感应电流积分计算感应磁场对低磁雷诺数 MHD 方法进行修正的数值模拟方法.在此基础上结合典型计算状态,分析“忽略感应磁场”对计算结果的影响,探讨低磁雷诺数方法的适用性问题.

## 2 低磁雷诺数 MHD 方法适用性分析

采用低磁雷诺数 MHD 方法,忽略了感应磁场的影响,必须满足低磁雷诺数近似条件,即  $Re_m \equiv \mu_e \sigma U L_p \ll 1$ .这就对磁导率  $\mu_e$ 、电导率  $\sigma$ 、速率  $U$  以及电磁流动相互作用区域  $L_p$  等多个方面的流体特征提出了要求,客观上限制了低磁雷诺数 MHD 方法的应用范围.

针对低磁雷诺数 MHD 方法的研究很多,但对于高超声速流动适用的低磁雷诺数条件,目前仍存在一些争议,尚未见到统一的结论.2002年, Poggie 和 Gaitonde<sup>[21]</sup>开展了钝体飞行器磁流体力学控制研究,认为  $Re_m = 3$  时感应磁场可以忽略,可采用低磁雷诺数 MHD 方法;2007年, Fujino 等<sup>[22]</sup>开展了再入飞行器磁控技术研究,认为  $Re_m < 1$  时可采用低磁雷诺数 MHD 方法; Khan 等<sup>[23]</sup>采用定电导率方法开展了磁场对边界层速度分布影响的研究,探讨了低磁雷诺数 MHD 方法的适用性,发现当  $Re_m = 2.5$  时低磁雷诺数 MHD 方法基本失效,并给出了低磁雷诺数条件  $Re_m < 0.125$ ,在此基础上开展了二维钝锥体  $Re_m = 0.179$  时的磁流体数值模拟,发现采用低磁雷诺数 MHD 方法,对计算结果的影响小于 2.02%.2008年, MacCormack<sup>[24]</sup>开展了强磁场下的磁流体力学控制数值模拟,认为  $Re_m < 1$  时可采用低磁雷诺数 MHD 方法,并开展了  $Re_m = 0.17$  时磁流体加速装置研究,发现采用低磁雷诺数 MHD 方法对轴线速度造成的计算偏差很小;同期,田正雨<sup>[1]</sup>基于国外的低磁雷诺数条件的研究,给出了较为保守的低磁雷诺数条件  $Re_m < 0.1$ ;2009年, Kim<sup>[25]</sup>对高超声速流动的低磁雷诺数条件进行了探讨,认为当气体电离度小于 1% 时可应用低磁雷诺数 MHD 方法;2010年, Bocharov<sup>[26]</sup>综合了 Khan 等<sup>[23]</sup>和 MacCormack<sup>[24]</sup>等在低磁雷诺数 MHD 方法适用性方面的研究,给出低磁雷诺数条件  $Re_m < 0.5$ ;2013年, Fujino 和 Ishikawa<sup>[8]</sup>开展了再入返回器大钝体外形的磁流体数值模拟,计算状态 64 km 时,磁雷诺数  $Re_m = 29.12$  ( $L_p$  取钝体尺寸 0.4 m),感应磁场最大仅相当于外加磁场的 5.4%,采用低磁雷诺数 MHD 方法(忽略感应磁场)对流场结构和表面热流的影响很小,其偏差基本可以忽略.

由于低磁雷诺数条件尚未达成一致性的结论,为了保证低磁雷诺数 MHD 方法的绝对适用,可选取最为保守的限制条件,即  $Re_m < 0.1$ .但对于高超声速流动,由于其流速较高,很容易就接近或超出这一条件.例如,对于特征电导率 500 S/m、特征长度 1 m 和特征速度 6 km/s 的磁流体状态,其特征磁雷诺数高达 3.768.

事实上,国内外有很多研究在具体应用低雷诺数方法时,没有严格讨论其适用性问题.例如,2005年, Otsu<sup>[7]</sup>在开展钝体磁流体数值模拟研究

时采用低磁雷诺数 MHD 方法, 其磁雷诺数  $Re_m = 3.26$  (特征电导率取  $400 \text{ S/m}$ ); 2007 年, Yoshino 等<sup>[27]</sup> 在开展沿再入轨道的磁流体数值模拟时采用低磁雷诺数 MHD 方法, 飞行高度  $75 \text{ km}$  时磁雷诺数为  $12.66$ . 2012 年, Nagata 等<sup>[6]</sup> 在开展钝柱体磁流体力学控制阻力特性研究时采用低磁雷诺数 MHD 方法, 其磁雷诺数  $Re_m = 2.04$  (特征电导率取  $250 \text{ S/m}$ ); 2015 年, Takahashi 等<sup>[9]</sup> 在开展了火星探测器磁流体研究, 经测算其磁雷诺数  $Re_m$  高达  $196.9$  (特征电导率取波后峰值电导率  $1600 \text{ S/m}$ ), 数值模拟时仍采用低磁雷诺数 MHD 方法; 2016 年, 国内学者在开展返回舱 OREX 磁控热防护系统时采用低磁雷诺数 MHD 方法<sup>[28]</sup>, 经本文测算其数值模拟状态的磁雷诺数  $Re_m$  高达  $11.6$ .

造成这种现状的主要原因可能包括两个方面:

1) 国外在开展低磁雷诺数条件探讨时, 一般通过对比低磁雷诺数 MHD 方法和全 MHD 方法. 而全 MHD 方法在高超声速领域的应用受到很大的限制, 这将在某种程度上影响数值模拟的精度.

全 MHD 方程组中的磁扩散方程包含磁扩散项  $\nu_e \nabla^2 \mathbf{B}$ , 其磁扩散率  $\nu_e = 1/(\sigma \mu_e)$ , 这里  $\mathbf{B}$  为磁场磁感应强度. 由于高超声速流动的气体磁导率  $\mu_e$ 、电导率  $\sigma$  一般较低, 磁扩散率高, 其磁扩散项大, 甚至高出磁扩散方程中其他项几个数量级, 此时方程存在巨大的刚性, 极大地影响了计算的稳定性和收敛性. 尤其是高超声速流场中很多区域气体电导率接近于零, 其磁扩散项趋近于无穷大, 全 MHD 方程组几乎无法直接求解, 需要进行近似处理.

从物理的角度来看, 电导率越小, 磁场与流动的相互作用应该越弱, 当电导率趋近于零时, 高超声速磁流体流动就退化为一般的高超声速流动, 使物理现象和问题得到简化. 此时全 MHD 方法反而出现数值模拟方面的困难, 这在一定程度上反映了这种基于磁扩散方程的计算方法的局限性.

这种局限性产生机制, 可结合全 MHD 方法的基本原理进行分析. 由完整的磁流体力学控制基本方程<sup>[1,2]</sup> 可知, 在等离子体电磁流体相互作用过程中, 电磁场对流场动量输运  $\mathbf{F}$  和能量输运  $E_M$  分别为:

$$\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad E_M = (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{U} + \sigma^{-1} \mathbf{J}^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (1)$$

这里  $\mathbf{U}$  为气流速度. 可见, 电流  $\mathbf{J}$  和电场  $\mathbf{E}$  在电磁流体相互作用过程中, 占据极其重要的地位, 直接表征了电磁场对流动的干扰. 而在全 MHD 方法中

电流  $\mathbf{J}$  和电场  $\mathbf{E}$  由磁场的变化得到<sup>[4]</sup>:

$$\mathbf{J} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_e}, \quad \mathbf{E} = \sigma^{-1} \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_e} - \mathbf{U} \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

对于数值模拟来说, 物理量偏导数的数值模拟精度一般要低于物理量本身, 例如热流和摩擦阻力的计算精度, 一般就低于温度和速度等参量的模拟精度, 因此  $\nabla \times \mathbf{B}$  的计算很容易出现数值误差. 而对于地球大气, 磁导率非常小  $\mu_e \approx 4\pi \times 10^{-7} \text{ h/m}$ . 当磁场  $\mathbf{B}$  的一阶偏导数由于某种原因 (如数值误差、迭代中间差量等) 出现较小的非物理扰动时, 该扰动反映在电流  $\mathbf{J}$  和电场  $\mathbf{E}$  上就会被放大  $10^6$  倍甚至更高. 尤其是低电导率或零电导率时, 电场  $\mathbf{E}$  就面临着“极小值除以极小值”甚至“零除以零”的极端情况. 结合 (1) 式可以看出, 这将直接影响电磁流动核心的动量与能量传输过程. 可见, 全 MHD 方法“以磁场的变化表征电场、电流变化”基本思路, 在低磁导率、低电导率的高超声速飞行领域存在缺陷, 这将极大地影响计算的稳定性和有效性.

此外, 由于磁扩散方程的数值解强烈依赖于磁场边界条件, 因此不恰当边界条件可能带来计算的准确性问题. 求解经典麦克斯韦方程组, 分界面上电磁场的连续性条件可写为<sup>[29]</sup>:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (3)$$

这里  $\mathbf{H}_2, \mathbf{H}_1$  分别为界面两边的磁场强度矢量,  $\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1$  分别为界面两边的磁感应强度矢量,  $\mathbf{j}_s$  为界面电流密度,  $\mathbf{n}$  为界面方向矢量. 由于界面电流很难有效确定, 真实的磁场交界面的切向分量很难直接给出. 因此全 MHD 方法磁场气固界面一般都采用近似条件<sup>[1-3]</sup>: 对于完全导体界面  $d\mathbf{B}/dn = 0$ ; 对于绝缘壁面  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_w$ . 对比 (3) 式可知, 这两种边界均不能完全涵盖分界面电磁场的连续性条件. 磁场边界的不准确, 将可能引入非物理的数值模拟误差.

2005 年, MacCormack<sup>[30]</sup> 采用全 MHD 方法开展钝体磁流体数值模拟, 得到的结论是磁场使头部区域热流上升; 2006 年, Khan 等<sup>[31]</sup> 采用全 MHD 方法开展钝体磁流体数值模拟, 其中部分状态磁雷诺数仅为  $0.01$ , 此时感应 (诱导) 磁场远小于外加磁场, 但其计算结果与低磁雷诺数 MHD 方法结果存在明显差异, 这一计算结果的有效性也值得商榷; 2009 年, 国内学者采用全 MHD 方法开展了 RAM-C 磁流体数值模拟<sup>[32]</sup>, 得到的结论同样是

磁场使头部热流上升. 事实上, 在飞行器头部加载一定的磁场可以有效降低驻点热流, 这一点在试验中已经得到了验证. 例如意大利航天中心开展了钝体磁控热防护试验, 磁场可使表面热流下降46%<sup>[13,28]</sup>. 近两年国防科技大学柳军等开展了钝体的磁控热防护试验研究, 试验结果也表明外加磁场能有效地降低端头热流.

由此可见, 在探讨低磁雷诺数条件时, 全MHD方法在高超声速领域的局限性, 有可能会影响其定量结论的取得.

2) 开展低磁雷诺数条件定量分析<sup>[12,23,24,30,31,33]</sup>时, 气体电导率计算多采用定电导率方法.

定电导率方法, 即假定全流场的气体电导率均为某一固定值, 此时等离子体特征电导率及其作用区域的特征尺度较为确定, 因此磁雷诺数提取相对简单. 而对于高超声速流动, 其混合气体电导率与流动结构紧密相关. 一般来说, 仅激波后很小区域内气体电导率相对较高, 达到 $10^2$ — $10^3$  S/m量级, 其他流场绝大部分区域电导率均小于10 S/m, 甚至接近于0. 其等效等离子体特征电导率远小于流场中峰值电导率, 等效的等离子体特征厚度远小于飞行器特征尺度(如球头半径等), 且这两者的直接提取相对困难. 此时, 如果采用流场中峰值电导率和飞行器特征尺度计算磁雷诺数, 就会使计算得到的磁雷诺数远远大于真实的等效结果.

由此可见, 低磁雷诺数MHD方法在低磁雷诺数条件的定量表征及其应用上, 仍存在不确定性. 对于具有低电导率特征的高超声速磁流体模拟, 选择偏向保守的低磁雷诺数条件( $Re_m < 0.1$ )来判断低磁雷诺数MHD方法是否适用, 其必要性仍有待商榷. 反之, 如果完全忽视低磁雷诺数条件的限制, 则有可能由于感应磁场不可忽略, 引入较大的计算偏差. 而常用的考虑“感应磁场”的全MHD方法在高超声速领域存在较大的局限性, 影响了计算的有效性. 因此, 有必要建立适用于高超声速领域的考虑感应磁场的磁流体数值模拟方法.

### 3 修正方法的建立

由于低磁雷诺数MHD方法在流动控制方程方面没作任何简化, 其形式与完整的磁流体力学方程组<sup>[1,2]</sup>中的流动方程一致. 因此如果在低磁雷诺数MHD方法中, 进一步考虑感应磁场的影响, 那

么这种方法就能从理论上突破低磁雷诺数条件的限制, 在更大程度上反映完整磁流体力学方程的物理本质, 因此适用范围更加广泛.

按照磁场矢量叠加原理, 总的物理磁场可写为

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{in}}, \quad (4)$$

这里 $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ 为外加磁场, 由机载磁场发生装置产生;  $\mathbf{B}_{\text{in}}$ 为感应磁场(或称诱导磁场), 由等离子体中感应电流诱导产生. 对于高超声速磁流体力学控制来说, 磁场对流场动量和能量的输运需要时间的累积, 因此其控制过程一般可近似为定常(或准定常)状态. 此时其收敛状态的流场中感应电流 $\mathbf{J}$ 和感应磁场 $\mathbf{B}_{\text{in}}$ 的分布不随(或近似不随)时间变化, 满足(或近似满足)电流稳恒和静磁条件. 因此 $\mathbf{r}$ 处的感应磁场 $\mathbf{B}_{\text{in}}$ 可由毕奥-萨伐尔定律积分给出:

$$\mathbf{B}_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (5)$$

这里为 $\mathbf{r}'$ 和 $V'$ 为体积分的位置矢量和区间.

由毕奥-萨伐尔定律可直接推导出安培环路定理和磁场高斯定律<sup>[29]</sup>, 因此基于感应电流磁诱导积分得到的 $\mathbf{B}_{\text{in}}$ , 自动满足了安培环路定理和磁场高斯定律. 此时, 按照磁场唯一性原理<sup>[29]</sup>, 这一 $\mathbf{B}_{\text{in}}$ 应与直接求解麦克斯韦方程中安培环路定理和磁场高斯定律等同, 这从理论上说明了该方法的可行性.

基于毕奥-萨伐尔定律积分计算 $\mathbf{B}_{\text{in}}$ , 在省去了繁琐的磁扩散方程或磁矢量势泊松方程组离散与迭代求解过程的同时, 还可以考虑边界处可能存在的面电流影响(可将其直接列入积分), 避免磁场边界或磁矢量势边界难以确定的问题. 因此其物理意义更加明确, 计算更加简便.

但这种方法也存在着明显的缺陷. 在感应磁场的每一步耦合迭代更新过程, 对于流场中每一个流体微元都需要进行全场的感应电流的磁诱导积分. 假设流场中 $N$ 个微元, 那么每一步迭代耦合的计算量将会达到 $N^2$ 量级. 随网格量增大, 计算量将迅速增加. 对于高超声速复杂流动问题, 计算网格很容易达到千万( $10^7$ )量级, 此时计算量将高达 $10^{14}$ 量级, 一般的计算机系统很难承受.

为了减小计算量和计算时间, 必须对这种基于毕奥-萨伐尔定律直接积分的方法进行改进. 这里由磁场高斯定律 $\nabla \cdot \mathbf{B}_{\text{in}} = 0$ , 引入磁矢量势 $\mathbf{A}_{\text{in}}$ 的概念:

$$\mathbf{B}_{\text{in}} = \nabla \times \mathbf{A}_{\text{in}}, \quad (6)$$

然后由毕奥-萨伐尔定律给出磁矢量势, (5) 式变形可得:

$$\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_c}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (7)$$

这里算符  $\nabla$  是对  $\mathbf{r}$  的微分算符, 与  $\mathbf{r}'$  无关, 有恒等式:

$$\begin{aligned} & \nabla \times \left[ \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned} \quad (8)$$

因此 (7) 式可写为

$$\mathbf{B}_{in}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[ \frac{\mu_c}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] = \nabla \times \mathbf{A}_{in}(\mathbf{r}), \quad (9)$$

这里磁矢量势  $\mathbf{A}_{in}$  可写为

$$\mathbf{A}_{in}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_c}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (10)$$

可见, 只要基于感应电流积分计算式 (10) 式得到磁矢量势, 然后就可由 (6) 式得到感应磁场  $\mathbf{B}_{in}$  分布. 相比于 (5) 式, (10) 式的积分计算要简单得多, 计算量也要小得多.

由于高超声速磁流体力学控制磁场与流动相互作用的主要区域, 相比于全流场空间的占比较小. 因此, 在计算感应磁场  $\mathbf{B}_{in}$  时, 可以根据磁流体流动特征对计算范围进行缩减, 进一步减小计算量.

1) 缩减需要计算感应磁场  $\mathbf{B}_{in}$  的区域

流场中并不是所有区域都需要计算感应磁场

$\mathbf{B}_{in}$ , 图 1(a) 给出了文献 [34] 计算的流场电导率, 可以看出很大区域的电导率趋近于零. 当流场某区域气流的电导率很低甚至接近于零时, 流体几乎不受常规磁场的宏观作用, 此时该区域感应磁场存在与否, 对流动干扰很小. 换句话说, 如果某区域的流体受常规磁场的影响很小, 那么该区域的感应磁场可以不用计算. 由于磁相互作用数可以在一定程度上表征磁场与流动耦合作用的整体效果, 这里引入单位磁相互作用数  $Q'_m$  的概念, 令磁相互作用数中的特征磁感应强度和特征长度分别为 1 T 和 1 m, 即有  $Q'_m = \sigma/\rho u$ , 这里  $\rho$ ,  $u$  为气体密度和速度大小. 因此, 需要计算感应磁场  $\mathbf{B}_{in}$  的区域, 可以通过气体电导率或者单位磁相互作用数高于某个值进行判定:

$$\sigma > \sigma_c \text{ 或 } Q'_m > Q_c. \quad (11)$$

为了尽可能地覆盖明显影响磁流体力学控制的绝大部分区域, 同时尽可能减少需要积分的计算区域, 截断电导率  $\sigma_c$  或者截断单位磁相互作用数  $Q_c$  应取值恰当. 例如对于高超声速流动, 其激波后电导率为  $10^2 - 10^3$  S/m,  $\sigma_c$  可取为 0.1—1.0 S/m 或者更小. 为了减小不同计算状态的人为干预, 这里引入截断因子  $\eta$ :

$$\sigma_c = \eta\sigma_0 \text{ 或 } Q_c = \eta Q'_{m0}, \quad (12)$$

其中  $\sigma_0$  为磁流体作用区域典型电导率,  $Q'_{m0}$  为磁流体作用区域典型单位磁相互作用数. 在迭代初期, 截断因子  $\eta$  可选用较大的值, 如  $\eta = 10^{-1} - 10^{-3}$ , 以减小计算量, 加快收敛; 在迭代后期,  $\eta$  可选用较小的值, 如  $\eta = 10^{-4} - 10^{-6}$ , 以提高计算精度.

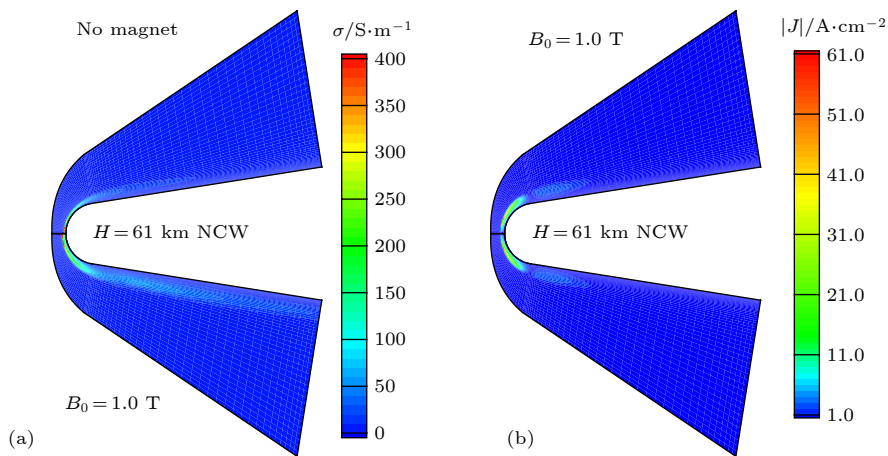


图 1 流场中电导率和环形感应电流分布 [34] (a) 电导率; (b) 电流密度

Fig. 1. Distribution of electronic conductivity and annular electric current: (a) Conductivity; (b) current.

2) 缩减计算某一点感应磁场  $B_{in}$  所需要的感应电流积分区域

流场中某一点的感应磁场, 由全场每个微元电流在该点产生的感应磁场叠加得到. 由图 1(b) 可以看出, 高超声速流场中感应电流主要集中于流场与电磁场相互作用的小部分区域, 很大区域电流趋近于零. 因此, 也可以引入类似于 (11) 式和 (12) 式的条件, 来判别计算感应磁场  $B_{in}$  时需要积分的空间区域:

$$|\mathbf{J}| > J_c, \quad J_c = \eta J_0, \quad (13)$$

这里  $J_c$  为截断电流密度大小,  $J_0$  为磁相互作用区典型电流密度.

3) 缩减相互作用区间

此外由 (5) 式还可以看出, 由电流微元产生的感应磁场与距离的平方呈反比关系. 可见由稳恒(或近似稳恒)的感应电流产生的磁场, 其主要作用区域应该为有限的空间, 将其定为

$$L < \lambda L_c, \quad (14)$$

这里  $L_c$  为磁流体作用区域的特征尺度;  $L$  为感应磁场作用区间尺度, 超出  $L$  流场空间, 不参与该外加磁场作用区域的感应磁场计算;  $\lambda$  为放大因子, 可结合具体的物理实际进行设置, 本文数值模拟时  $\lambda = 5$ .

4) 耦合策略

由于流动收敛的速度远远小于感应电流生成诱导磁场的响应速度, 因此在实际的数值模拟过程中, 先采用不考虑感应磁场的低磁雷诺数 MHD 方法迭代计算直至结果基本收敛, 然后每隔 500—5000 步进行一次感应磁场修正, 迭代计算直至结

果重新收敛.

## 4 数值计算分析

### 4.1 无限长直流导线产生磁场

为了保证电流数值离散积分过程的正确性, 首先对电流积分计算磁场的程序模块进行校验, 这是本文低磁雷诺数 MHD 方法修正的基础.

对于通电电流为  $I$  的无限长直导线, 导线外距离为  $r$  的任意一点的磁场  $B$  由安培环路定理计算:  $\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mu_c \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu_c I$ , 这里  $L$  为半径为  $r$  的圆周,  $S$  为圆面, 圆面方向为电流方向. 由于对称性  $\int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B$ , 因此有磁感应强度大小  $B = \mu_c I / 2\pi r$ , 其方向符合右手系.

采用半径为 1 mm 的直导线, 电流  $I = 1.0$  A. 假设电流在导线截面内均匀分布, 则电流密度约为  $J = 3.18 \times 10^5$  A/m<sup>2</sup>, 这与图 1(b) 流场感应电流密度在同一数量级. 为了保证“无限长”的假设近似成立, 本文取直导线长为 100 m. 采用圆柱形网格, 网格点设为  $10001 \times 51 \times 181$ , 沿导线长方向的网格点均匀分布, 其他两个方向非均匀分布.

图 2 给出了不同位置的磁场感应强度与理论值的比较. 由图 2(a) 可以看出, 在导线的端头 ( $x = 0.0$  m) 附近, 数值积分的磁感应强度明显小于理论值, 这是因为  $x < 0.0$  m 的部分被人为截断, 没有参与数值积分, 因此不满足“近似无限长条件”. 随着  $x$  增大, 这种“人为截断”产生影响逐渐减小, 数值结果逐渐趋近于理论值, 长直导线中点 ( $x = 50.0$  m),

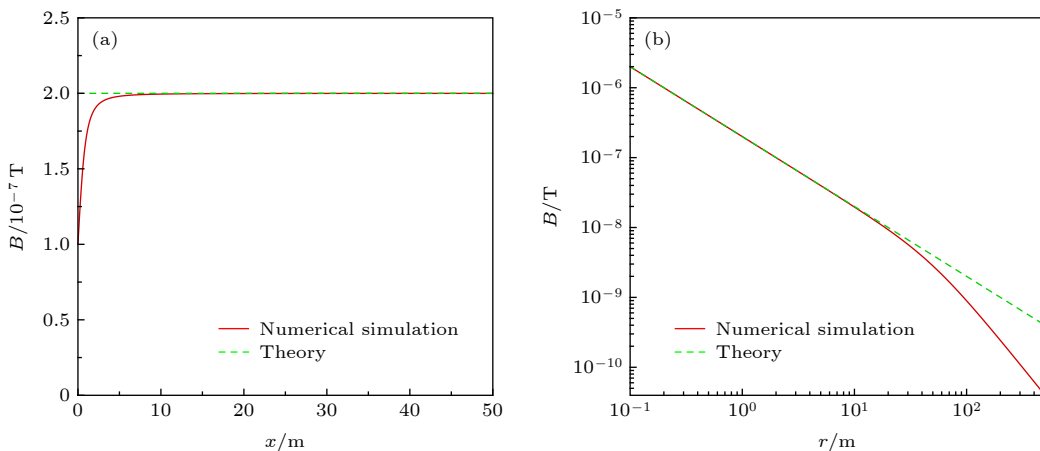


图 2 不同位置的磁感应强度 (a)  $r = 1.0$  m; (b)  $x = 50.0$  m

Fig. 2. Magnetic induction intensity in different locations: (a)  $r = 1.0$  m; (b)  $x = 50.0$  m.

数值结果几乎与理论值完全重合. 图 2(b) 中也有类似的现象: 当  $r$  较小时, 数值结果与理论值几乎完全重合, 随  $r$  进一步增大,  $r$  逐渐接近甚至大于导线的长度, 此时“人为截断”产生的影响逐渐增大, 不再满足“近似无限长条件”, 数值结果与理论

值偏离.

由此可见, 数值积分计算结果符合理论预期. 这说明本文基于电流积分的磁场计算程序模块能较为准确地给出空间磁场分布, 满足感应磁场计算精度要求.

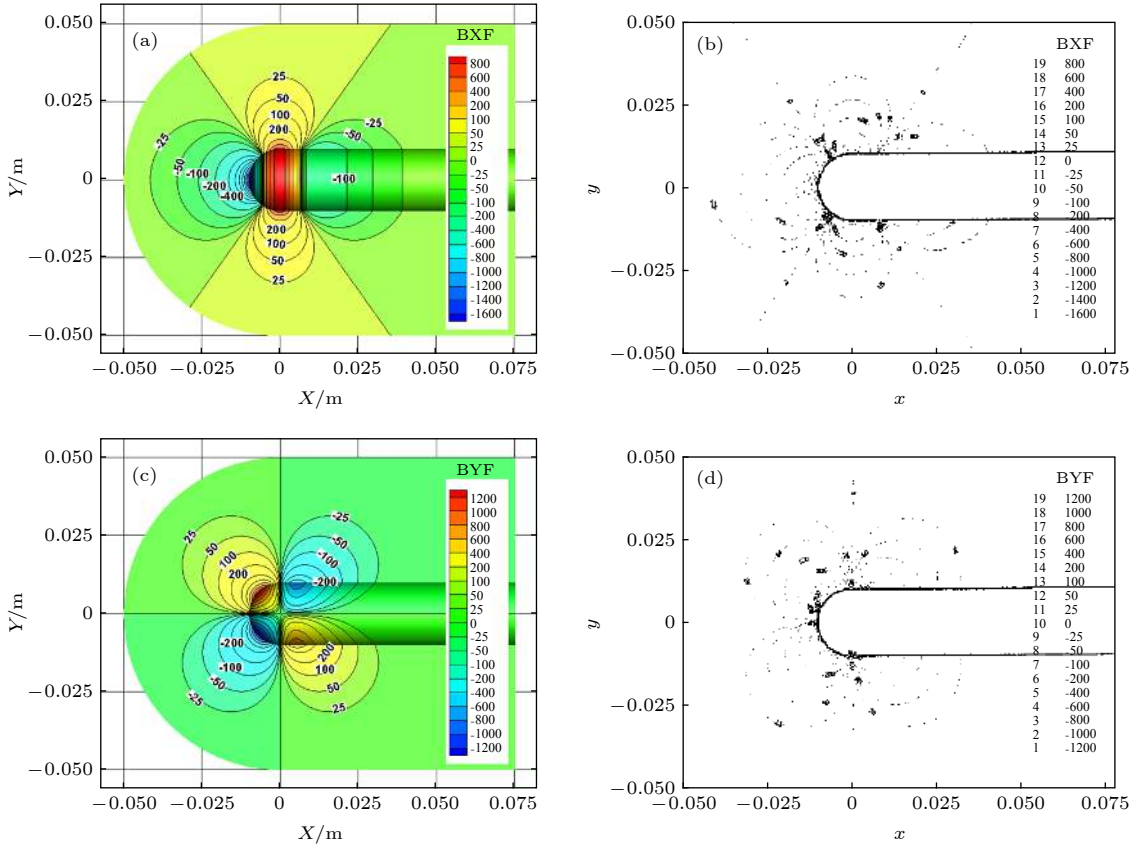


图 3 外加磁场 (a) 本文 BXF; (b) 文献 BXF; (c) 本文 BYF; (d) 文献 BYF

Fig. 3. Externally applied magnetic field: (a) BXF of this paper; (b) BXF<sup>[33]</sup>; (c) BYF of this paper; (d) BYF<sup>[33]</sup>.

### 4.2 三维钝柱体外形考虑感应磁场修正的磁流体数值模拟

为了进一步校验本文修正计算方法的有效性, 开展钝柱体外形高超声速磁流体数值模拟, 该算例有低磁雷诺数方法和全 MHD 方法计算结果<sup>[33]</sup>. 计算外形头部半径 0.01 m, 柱体长 0.075 m. 计算来流为混合电离气体, 来流温度 9000.0 K, 来流压力 7726.0 Pa, 来流密度 0.01429 kg/m<sup>3</sup>, 来流速度 6710.0 m/s, 壁面温度 12000.0 K. 采用偶极子磁场, 磁场中心位于头部球心, 磁特征感应强度  $B_0 = 4.0$  T, 磁场特征长度为 0.01 m. 采用固定电导率方法, 全场混合气体电导率均为 4800 S/m, 特征磁相互作用数为 69.

图 3 和图 4 分别给出了本文计算的外加磁场和感应磁场分布, 并与文献<sup>[33]</sup>给出的结果进行对比, 图中数值乘以  $\sqrt{\mu_e}$  转化为以特斯拉为单位的量. 由图可以看出, 本文修正方法计算得到的感应磁场, 相对于外加磁场量值较小; 除局部细节外, 整体分布变化规律和量值均与全 MHD 方法的结果<sup>[33]</sup>相符合, 这说明本文修正方法能较好计算磁流体流动过程中的感应磁场分布.

为了进一步分析感应磁场细节差异产生的原因, 图 5 给出了不同计算方法得到的流场压力分布. 可以看出, 在磁场作用下本文计算得到的流场压力分布规律与文献<sup>[33]</sup>基本一致, 但本文给出的激波脱体距离明显大于文献结果. 这是由于文献<sup>[33]</sup>没有给出混合电离气体的成分, 也没有明确气体状



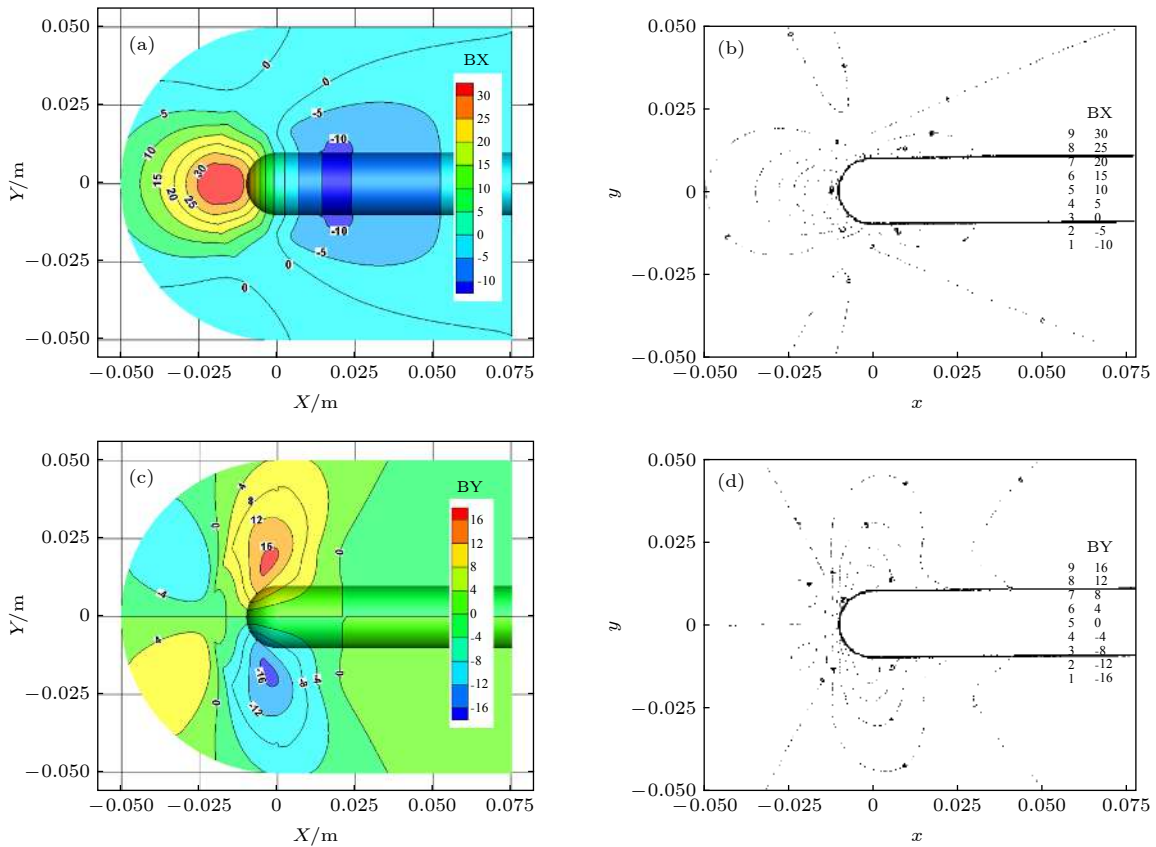


图 4 感应磁场 (a) 本文 BX; (b) 文献 BX; (c) 本文 BY; (d) 文献 BY

Fig. 4. Induced magnetic field: (a) BX of this paper; (b) BX<sup>[33]</sup>; (c) BY of this paper; (d) BY<sup>[33]</sup>.

态计算方法, 而本文采用的等效比热比的气体计算方法, 可能与文献 [33] 中的气体模型不一致. 事实上, 文献 [33] 给出的该状态磁场使激波脱体距离增大的倍数并不确定, 为 3—7.5 倍<sup>[33]</sup>, 图 2—图 5 中文献结果为增大 3 倍的结果, 而本文计算结果为磁场使激波脱体距离增大 4—5 倍. 本文计算激波脱体距离较远, 导致了感应磁场分布细节上的差异.

由图 5 还可以看出, 本文修正方法计算得到的压力与一般的低磁雷诺数 MHD 方法模拟结果, 除局部细节外的分布规律基本一致, 与文献 [33]“低磁雷诺数 MHD 方法和全 MHD 方法结果之间的差异”类似. 这里以磁场尺度和来流速度为特征量, 计算磁雷诺数  $Re_m \approx 0.4$ . 可见, 此时采用低磁雷诺数假设忽略感应磁场, 对流场结构的影响不大, 这与图 3 和图 4 显示的“感应磁场相对于外加磁场的量值较小”相互印证.

### 4.3 Ram-C 钝锥“忽略感应磁场”对磁流体数值模拟影响的分析

文献 [35] 为了分析电导率模拟准确性问题, 基

于低磁雷诺数方法探讨了国内外常见的多种电导率模型差异及其影响, 其中采用电导率模型 M6 时, 流场中峰值电导率高达 6000 S/m, 其磁雷诺数远高于 0.1, 低磁雷诺数方法的适用性有待商榷. 本文结合这一典型飞行状态与计算条件, 开展一般低磁雷诺数方法和本文修正方法的数值对比计算, 分析“忽略感应磁场”对磁流体控制数值模拟的影响, 探讨低磁雷诺数条件适用性.

采用 RAM-C 钝锥体外形<sup>[35,36]</sup>, 计算飞行高度 71 km, 飞行速度 7650 m/s, 等温壁面条件, 壁面温度 1500 K, 完全非催化壁面条件. 磁场配置采用磁偶极子磁场, 磁感应特征强度  $B_0 = 0.5$  T, 特征长度  $r_0 = 0.1524$  m, 磁偶极子方向为直角坐标横轴负方向. 采用电导率模型 M6<sup>[35]</sup>, 其形式为  $\sigma = 1.56 \times 10^{-2} T^{1.5} / \ln(1.23 \times 10^7 T^{1.5} / n_e^{0.5})$ ,  $T$  为温度,  $n_e$  为电子数密度. 采用 11 组分 Park 反应模型计算等离子体分布.

图 6 给出了采用 M6 模型计算得到的流场中电导率分布, 图 6(a) 为采用一般低磁雷诺数 MHD 方法模拟得到的流场电导率分布云图, 图 6(b)

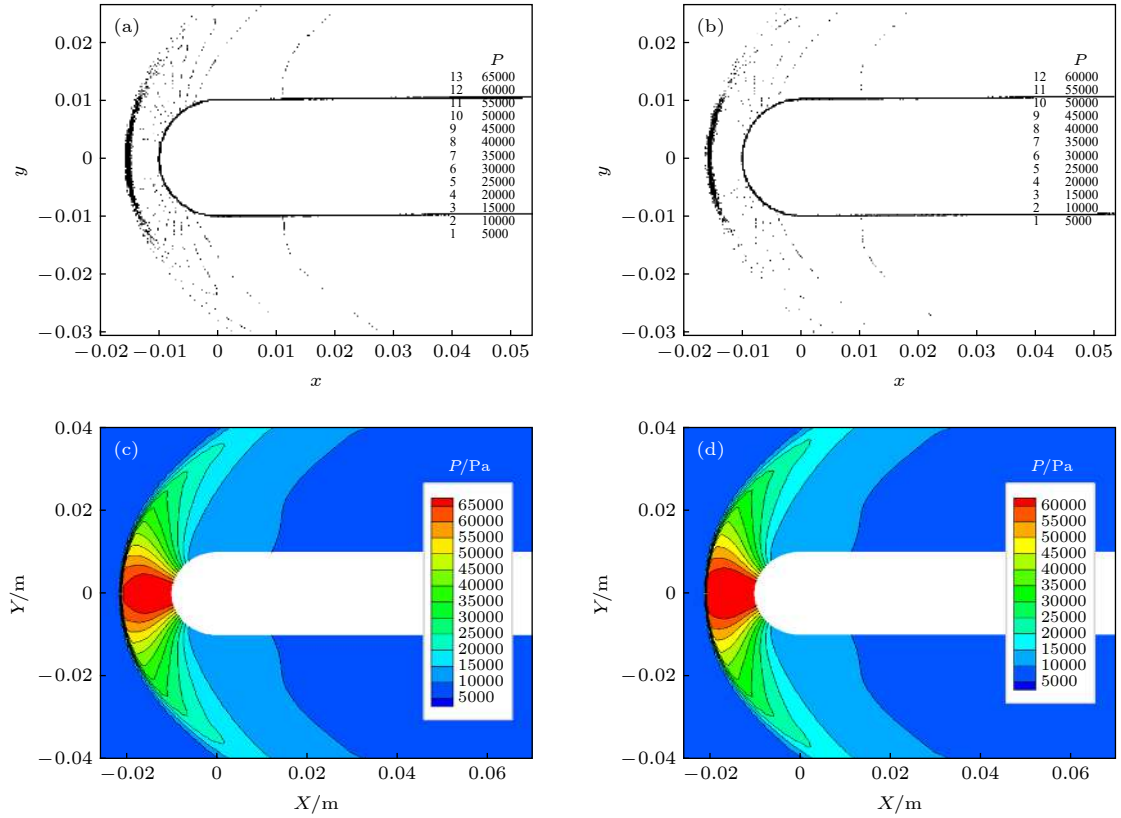


图 5 不同方法计算的流场压力分布 (a) 文献低磁雷诺数 MHD 方法; (b) 文献全 MHD 方法; (c) 本文低磁雷诺数 MHD 方法; (d) 本文修正方法

Fig. 5. Distribution of pressure in the flow computed by different method: (a) Low  $Re_m$  method<sup>[33]</sup>; (b) full MHD method<sup>[33]</sup>; (c) low  $Re_m$  method of this paper; (d) improved method of this paper.

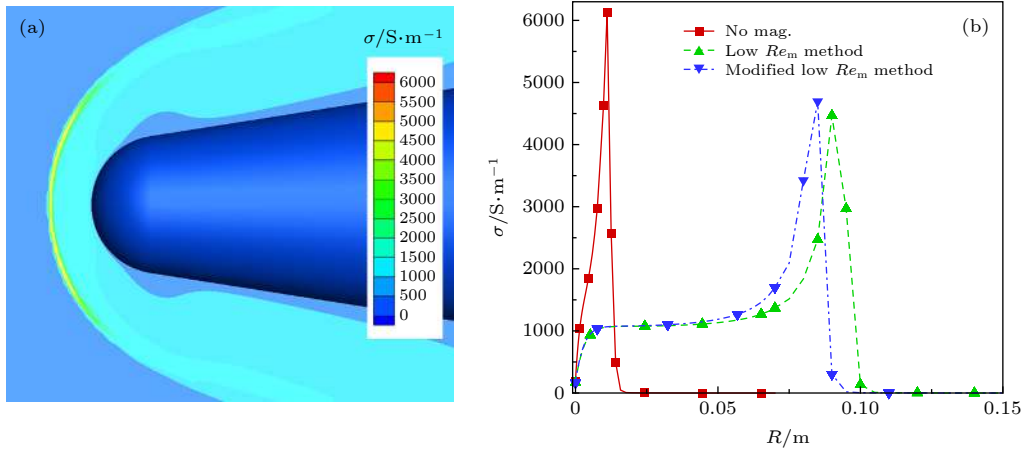


图 6 采用电导率模型 M6 计算的流场电导率分布 (a) 全场云图; (b) 驻点线参数分布

Fig. 6. Distribution of electronic conductivity using M6: (a) Full contour map; (b) parameters along stagnation line.

为采用修正方法和一般低磁雷诺数 MHD 方法计算得到的驻点线电导率分布比较. 可以看出, 在磁场作用下流场峰值电导率可达 5000 S/m, 但取得峰值电导率的等离子区域厚度较薄, 波后较大区域内气体电导率仅为 1000 S/m 左右. 采用不同方法计算, 磁场对激波脱体距离的外推效果存在差别, 采用修正方法得到的激波脱体距离, 比采用一般低

磁雷诺数 MHD 方法结果稍小.

图 7 给出了修正方法计算得到的感应磁场分布. 对比图 4 可以看出, 感应磁场的整体分布与 4.2 节钝柱体的感应磁场分布大体相似, 但二者又有明显的差异. 造成差异的原因可能有两个方面: 一是计算外形差别; 二是电导率分布存在差别, 尤其是激波波前位置, 4.2 节采用定电导率方法, 其

流场波前气体电导率为 4800 S/m, 此时波前流动也会产生较强的环形感应电流; 而本节状态的流场波前电导率接近于零, 波前环形电流也接近于零. 这种感应电流分布的差异必然影响感应磁场的分布.

为了衡量感应磁场的相对大小, 图 8 进一步给出了外加磁场分布和全磁场分布, 这里全磁场是外加磁场与感应磁场叠加的结果. 结合图 7 可以看出, 除局部细节外, 感应磁场方向大体上与外加磁

场相反, 感应磁场的影响在某种程度上相当于对外加磁场作用效果的削弱. 这是符合磁电阻扩散基本原理的, 由楞次定律可知, 具有导电性的等离子体在磁场中运动时, 其感应磁场方向总是对抗磁通量的变化方向, 因此整体上表现为对原磁场的某种削弱, 整体影响幅度不大, 其  $x$  分量最大值相当于外加磁场  $x$  方向最大值的 7.9% 左右, 其  $y$  分量最大值相当于外加磁场  $y$  方向最大值的 4.6% 左右.

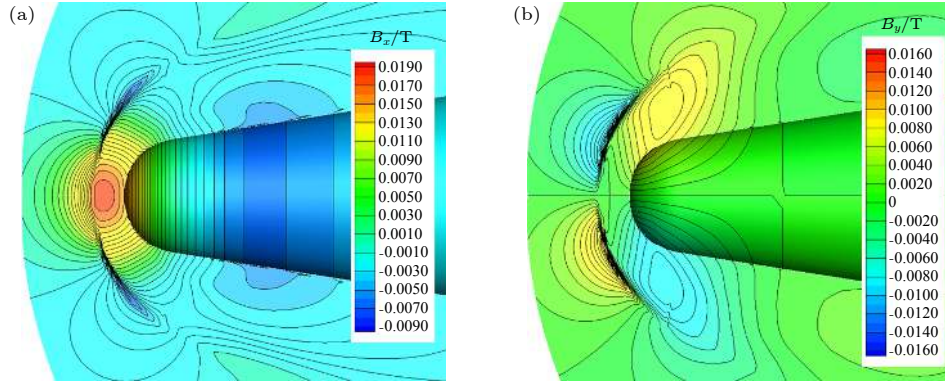


图 7 修正方法计算的钝锥 RAM-C 感应磁场 (a)  $B_x$  分量; (b)  $B_y$  分量

Fig. 7. Induced magnetic field of RAM-C using improved method: (a) Component  $B_x$ ; (b) component  $B_y$ .

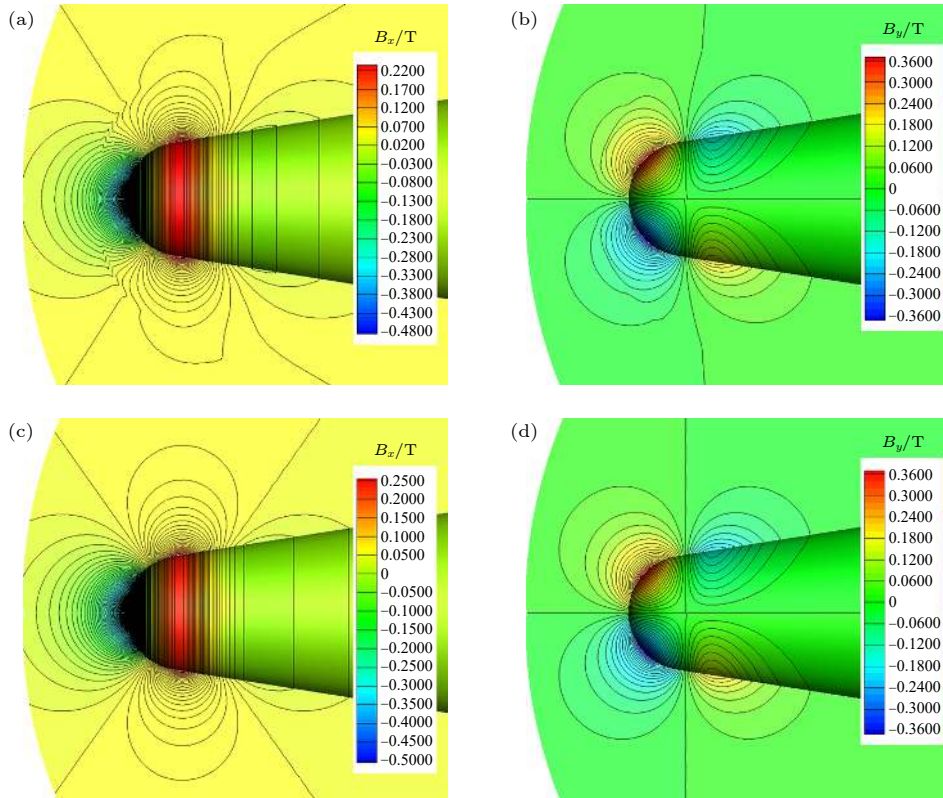


图 8 钝锥 RAM-C 外加磁场和修正方法计算的全磁场分布 (a) 全磁场  $B_x$  分量; (b) 全磁场  $B_y$  分量; (c) 外加磁场  $B_x$  分量; (d) 外加磁场  $B_y$  分量

Fig. 8. Total magnetic field computed using improved method and externally applied magnetic field of RAM-C: (a) Total  $B_x$ ; (b) total  $B_y$ ; (c) externally  $B_x$ ; (d) externally  $B_y$ .

表 1 给出了不同条件或方法计算得到的阻力系数,可以看出,采用修正方法计算得到的阻力系数与一般低磁雷诺数 MHD 方法计算结果的差异在 1% 左右,其磁控效果没有本质差别.

表 1 钝锥 RAM-C 阻力系数  
Table 1. Drag coefficient of RAM-C.

计算方法或条件	总阻力系数	增大比例
No Mag.	0.292	—
一般低 $Re_m$ 方法	0.991	239%
修正方法	0.980	234%

图 9 进一步给出了不同计算方法得到的表面热流分布. 由图可以看出,采用修正方法计算得到的热流与采用一般低磁雷诺数 MHD 方法的结果局部存在差异,但整体分布趋于一致,这说明磁控热防护效果没有本质差异. 在  $X = 0$  m 附近,两者差异稍大,采用修正方法的热流的磁控热防护效率比一般低磁雷诺数 MHD 方法的下降不到 10%. 可见,考虑感应磁场影响在一定程度上降低了局部区域的磁控热防护效果.

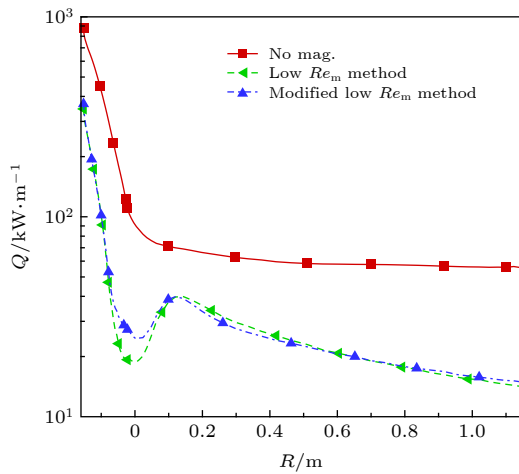


图 9 修正方法和一般低磁雷诺数 MHD 方法计算得到的热流分布比较  
Fig. 9. Heat flux computed using Low  $Re_m$  method or improved method.

这里结合磁雷诺数进行分析,按传统的低磁雷诺数的计算方法,以流场中峰值电导率、磁场特征尺度和气体来流流速为特征量,则磁雷诺数  $Re_m \approx 7.3$ ,此时不符合低磁雷诺数条件要求. 如果以波后较大区域电导率 1000 S/m 和头部等离子体层厚度 0.1 m 为特征量,则磁雷诺数  $Re_m \approx 0.96$ . 两者差异较大,后者综合考虑了等离子体的实际分

布特征、磁扩散方向以及电磁相互作用区间,因而更加准确,但其结果仍然比保守的低磁雷诺数条件 ( $Re_m \leq 0.1$ ) 高得多. 结合图 8 和表 1 “忽略感应磁场对计算结果影响较小”的结论可以看出,对于本文这种不含人工电离的高超声速空气流动计算状态,“ $Re_m < 0.1$ ”的低磁雷诺数条件过于保守,可扩展为  $Re_m < 1.0$ ,同时其特征电导率和特征尺度应综合考虑实际的等离子体分布.

图 10 进一步给出两种修正方法计算得到的热流和残差收敛曲线. Modified Method 1 为直接积分计算毕奥-萨伐尔定律积分的方法, Modified Method 2 为基于电流积分计算磁矢量势同时考虑截断因子对计算区域进行缩减的方法. 由图可以看出,这两种方法计算得到的热流几乎完全重合,计算精度相当. 本文 Modified Method 2 的计算时间较短,效率较高.

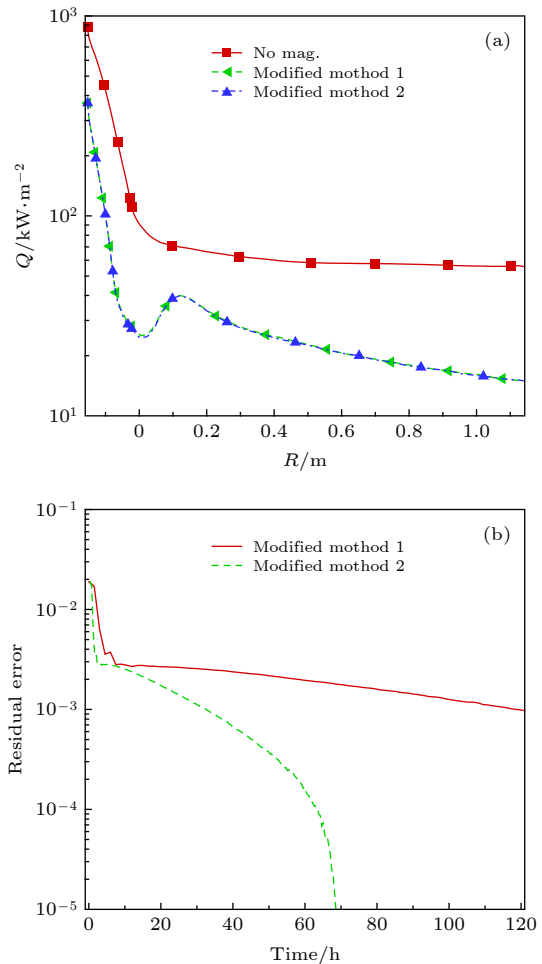


图 10 采用不同修正方法计算得到的热流和残差收敛曲线 (a) 热流; (b) 残差  
Fig. 10. Heat flux and residual error computed using different modified method: (a) Heat flux; (b) residual error.

## 5 结 论

(1) 本文在详细探讨低磁雷诺数方法适用性以及全 MHD 方法局限性及其原理的基础上, 基于感应电流积分计算磁矢量势得到感应磁场, 提出了一种低磁雷诺数 MHD 修正计算方法, 突破了“低磁雷诺数假设”的限制, 增强了低磁雷诺数 MHD 方法的适用性, 拓宽了应用范围. 考核验算表明, 该方法可较为准确地计算模拟磁流体流动中的感应磁场, 数值模拟结果与理论分析及文献结果相符, 具有较高的可信度.

(2) 针对典型计算状态, 开展了常规低磁雷诺数 MHD 方法和修正方法的数值对比计算, 探讨了感应磁场对磁流体力学控制数值模拟的影响, 分析了采用常规低磁雷诺数 MHD 方法在流场特性、气动/热特性等方面造成的计算偏差. 研究结果表明: 1) 高超声速流动过程中感应磁场的影响在宏观上表现为对外加磁场的削弱和扭曲, 一定程度上降低了磁控效果; 2) 文献 [35] 采用常规的低磁雷诺数 MHD 方法“忽略感应磁场”造成的计算偏差, 对其计算结论的取得不构成实质性影响; 3) 相比于全域直接积分计算毕奥-萨卡尔定律, 本文基于电流积分计算磁矢量势同时考虑截断因子对计算区域进行缩减的耦合计算方法, 在计算时间和效率方面具有明显优势; 4) 本文计算条件下, “ $Re_m < 0.1$ ”的低磁雷诺数条件过于保守, 建议取为  $Re_m < 1.0$ , 同时其特征电导率和特征尺度应综合考虑实际的等离子体分布.

## 参考文献

- [1] Tian Z Y 2008 *Ph. D. Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [田正雨 2008 博士学位论文 (长沙: 国防科学技术大学)]
- [2] Pan Y 2007 *Ph. D. Dissertation* (Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics) (in Chinese) [潘勇 2007 博士学位论文 (南京: 南京航空航天大学)]
- [3] Zhang X H 2014 *Ph. D. Dissertation* (Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics) (in Chinese) [张向洪 2014 博士学位论文 (南京: 南京航空航天大学)]
- [4] Palmer G 1993 *J. Thermophys Heat Transfer* **7** 294
- [5] Barmin A A, Kulikovskiy A G 1996 *J. Comput. Phys.* **126** 77
- [6] Nagata Y, Otsu H, Yamada K 2012 *43rd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference* New Orleans, Louisiana, USA, June 25–8, 2012 p2734
- [7] Otsu H 2005 *36th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference* Toronto, Ontario, Canada, June 6–9, 2005 p5049
- [8] Fujino T, Ishikawa M 2013 *44th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference* San Diego, California, USA, June 24–27, 2013 p3000
- [9] Takahashi T, Shimosawa Y, Masuda K, Fujino T 2015 *46th AIAA Plasma dynamics and Lasers Conference* Dallas, Texas, USA, June 22–26, 2015 p3365
- [10] Bisek N J, Poggie J 2011 *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* Orlando, Florida, USA, January 4–7, 2011 p897
- [11] Bisek N J, Boyd I D 2010 *J. Spacecraft Rockets* **47** 816
- [12] Lee J, Huerta M, Zha G 2010 *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* Orlando, Florida, USA, January 4–7, 2010 p229
- [13] Cristofolini A, Borghi C A, Neretti G 2012 *18th AIAA/3 AF International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference* Tours, France, September 24–28, 2012 p5804
- [14] Cristofolini A, Borghi C A, Neretti G 2012 *43rd AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference* New Orleans, Louisiana, USA June 25–28, 2012 p2730
- [15] Li K, Liu J, Liu W Q 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 084702 (in Chinese) [李开, 柳军, 刘伟强 2017 物理学报 **66** 084702]
- [16] Li K, Liu W Q 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 064701 (in Chinese) [李开, 刘伟强 2016 物理学报 **65** 064701]
- [17] Yao X, Liu W Q, Tan J G 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 174702 (in Chinese) [姚霄, 刘伟强, 谭建国 2018 物理学报 **67** 174702]
- [18] He M S, Yang W J, Zheng X M, Liu Y 2013 *J. Aerosp. Power* **28** 365 (in Chinese) [何森生, 杨文将, 郑小梅, 刘宇 2013 航空动力学报 **28** 365]
- [19] Chen G, Zhang J B, Li C X 2010 *J. BUAA* **36** 135 (in Chinese) [陈刚, 张劲柏, 李椿萱 2010 北京航空航天大学学报 **36** 135]
- [20] Sun X H 2008 *Ph. D. Dissertation* (Nanjing: Nanjing University of Science and Technology) (in Chinese) [孙晓辉 2008 博士学位论文 (南京: 南京理工大学)]
- [21] Poggie J, Gaitonde D 2002 *Phys. Fluids* **14** 1720
- [22] Fujino T, Kondo S, Ishikawa M 2007 *38th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference* Miami, Florida, USA, June 25–28, 2007 p4248
- [23] Khan O U, Hoffmann K A, Dietiker J F 2007 *38th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference* Miami, Florida, USA June 25–28, 2007 p4374
- [24] MacCormack R W 2008 *46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* Reno, Nevada, USA, January 7–10, 2008 p1070
- [25] Kim M K 2009 *Ph. D. Dissertation* (Michigan: University of Michigan)
- [26] Bocharov A N 2010 *High Temp.* **48** 483
- [27] Yoshino T, Fujino T, Ishikawa M 2007 *38th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference* Miami, Florida, USA, June 25–28, 2007 p4249
- [28] Li K, Liu W Q 2016 *J. NUDT* **38** 25 (in Chinese) [李开, 刘伟强 2016 国防科技大学学报 **38** 25]
- [29] Guo S H 1997 *Electrodynamics* (Beijing: Higher Education Press) pp1–38 (in Chinese) [郭硕鸿 1997 电动力学 (北京: 高等教育出版社) 第1—38页]
- [30] MacCormack R 2005 *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* Reno, Nevada, USA, January 10–13, 2005 p0559
- [31] Khan O U, Hoffmann K A, Dietiker J F 2006 *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* Reno, Nevada, USA, January 9–12, 2006 p966
- [32] Huang F L, Huang H L 2009 *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.* **30** 1834 (in Chinese) [黄富来, 黄护林 2009 航空学报 **30** 1834]
- [33] MacCormack R W 2005 *36th AIAA Plasmadynamics and*

*Lasers Conference* Toronto, Ontario, Canada, June 6–9, 2005 p4780

- [34] Ding M S, Jiang T, Dong W Z, Gao T S, Liu Q Z 2017 *Acta Aeronaut. Astronaut. Sin.* **38** 121030 (in Chinese) [丁明松, 江涛, 董维中, 高铁锁, 刘庆宗 2017 航空学报 **38** 121030]  
 [35] Ding M S, Jiang T, Liu Q Z, Dong W Z, Gao T S 2019 *Acta*

*Aeronaut. Astronaut. Sin.* **40** 123009 (in Chinese) [丁明松, 江涛, 刘庆宗, 董维中, 高铁锁 2019 航空学报 **40** 123009]

- [36] Ding M S, Jiang T, Dong W Z, Gao T S, Liu Q Z 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 174702 (in Chinese) [丁明松, 江涛, 董维中, 高铁锁, 刘庆宗 2019 物理学报 **68** 174702]

# An improved low magnetic Reynolds magnetohydrodynamic method based on computing induced magnetic vector potential by integrating induced current

Ding Ming-Song    Jiang Tao    Liu Qing-Zong    Dong Wei-Zhong<sup>†</sup>  
 Gao Tie-Suo    Fu Yang-Aoxiao

(*Computational Aerodynamics Institute, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang 621000, China*)

(Received 14 January 2020; revised manuscript received 25 March 2020)

## Abstract

Aiming at the applicability of low magnetic Reynolds number method, in this paper we analyze the differences in the application of low magnetic Reynolds number condition and the limitation of full MHD method when it is applied to hypersonic flow. According to the low magnetic Reynolds number magnetohydrodynamic control numerical simulation method, computing magnetic vector potential through integrating induced current, and considering the reduction of computation domain caused by truncation factors, we propose a low magnetic Reynolds number MHD computation method which is adjusted by the induced magnetic field, and the validation of this method is also presented. Through the numerical simulation of RAM-C blunt cone in flight test condition, we analyze the discrepancy caused by “neglecting induced magnetic field”, and also discuss the principle of the application of low magnetic Reynolds number assumption of hypersonic flow. The obtained results are as follows. (1) The adjusted computation method developed in this paper breaks through the limit of low magnetic Reynolds number, and expands the application range of low magnetic Reynolds number method to hypersonic flow, the numerical simulation result is reliable; Compared with direct integration of Biot-Savart law, the computation efficiency is considerably improved. (2) In the hypersonic flow, the influence of induced magnetic field is presented, thus weakening and distorting the applied magnetic field macroscopically, as a result weakening the effect of magnetic control to some extent. Under the condition of this paper, the low magnetic Reynolds number condition “ $Re_m < 0.1$ ” is probably too conservative, and it is better to adopt  $Re_m < 1.0$ , and the characteristic conductivity and characteristic length should be chosen according to the actual plasma distribution.

**Keywords:** magnetohydrodynamic, low magnetic Reynolds number condition, plasma, numerical simulation

**PACS:** 47.40.Ki, 47.85.L-, 52.30.Cv, 41.20.Gz

**DOI:** 10.7498/aps.69.20200091

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [dongwz1966@163.com](mailto:dongwz1966@163.com)