



## 多频正弦混沌细胞神经网络及其复杂动力学特性

李茹依 王光义 董玉姣 周玮

### Multi-frequency sinusoidal chaotic neural network and its complex dynamics

Li Ru-Yi Wang Guang-Yi Dong Yu-Jiao Zhou Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 240501 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20200725

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200725>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 变频正弦混沌神经网络及其应用

Frequency conversion sinusoidal chaotic neural network and its application

物理学报. 2017, 66(9): 090502 <https://doi.org/10.7498/aps.66.090502>

#### 不确定分数阶时滞混沌系统自适应神经网络同步控制

Synchronization of uncertain fractional-order chaotic systems with time delay based on adaptive neural network control

物理学报. 2017, 66(9): 090504 <https://doi.org/10.7498/aps.66.090504>

#### 激光混沌并行串联同步及其在中继器保密通信系统中的应用

Chaotic laser parallel series synchronization and its repeater applications in secure communication

物理学报. 2019, 68(17): 170502 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190212>

#### 一种具有隐藏吸引子的分数阶混沌系统的动力学分析及有限时间同步

Dynamic analysis and finite time synchronization of a fractional-order chaotic system with hidden attractors

物理学报. 2018, 67(5): 050502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172354>

#### 弹性需求下的网络交通流逐日动态演化

Day-to-day dynamical evolution of network traffic flow with elastic demand

物理学报. 2017, 66(6): 060501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.060501>

#### 基于人工神经网络在线学习方法优化磁屏蔽特性参数

Online learning method based on artificial neural network to optimize magnetic shielding characteristic parameters

物理学报. 2019, 68(13): 130701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190234>

# 多频正弦混沌细胞神经网络及其复杂动力学特性\*

李茹依 王光义† 董玉姣 周玮

(杭州电子科技大学, 现代电路与智能信息研究所, 杭州 310018)

(2020年5月13日收到; 2020年8月21日收到修改稿)

大量动物实验表明, 生物神经网络中存在着不规则的混沌现象. 混沌神经网络是一种高度非线性动力系统, 它可以实现一系列复杂的动力学行为, 能够优化全局搜索和神经计算, 还可产生伪随机序列进行信息加密. 基于脑波由不同频率的正弦信号叠加理论, 为使神经网络更具生物特性, 提出了一种基于多频-变频正弦函数和分段型函数的非单调激活函数. 分析表明, 通过调节参数可使该激活函数拥有不同状态的脑电信号, 能够模拟频率不同、类型不同的脑电波同时工作时丰富多变的脑部活动. 基于该激活函数设计了一种新型混沌细胞神经网络. 采用基于结构复杂度的 SE 复杂度算法和 CO 复杂度算法分析了神经网络的复杂度; 利用 Lyapunov 指数谱、分岔图和吸引盆等方法, 详细分析了激活函数参数变化对其动力学特性的影响, 发现此混沌神经网络模型出现了一系列的复杂现象, 如多种不同类型的混沌吸引子、共存混沌吸引子、共存极限环等, 提升了混沌神经网络的性能, 证明了多频正弦混沌神经网络具有丰富的动力学特性, 使得其在信息处理、信息加密等方面也具有较好的前景.

**关键词:** 细胞神经网络, 混沌, 多频正弦激活函数**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Jn, 07.05.Mh**DOI:** 10.7498/aps.69.20200725

## 1 引言

人工神经网络是一种新型信息处理体系, 也是一种高度的非线性动力学系统. 通过学者们的不懈研究探索, 已有数百种人工神经元和神经网络的模型被开发利用. 由于人工神经网络的快速发展, 许多领域都逐渐出现它的身影. 人工神经网络可以有效地解决许多问题, 并且在许多领域都能发挥巨大的作用. 比如在图像识别领域中, 孙为民等<sup>[1]</sup>提出将人工神经网络和 Adaboost 相结合可提高绝缘子图像识别的准确率. 在信息加密领域中, Wang 和 Li<sup>[2]</sup>基于 Hopfield 混沌神经网络提出了一种彩色图像加密算法. 该算法提高了加密效率, 具有良好的安全性能, 可以抵抗常见的攻击方法. 由于人工神经网络强大的处理信息能力, 学者们纷纷研究可

以有效模拟人工神经网络的方法. 比如董哲康等<sup>[3]</sup>基于纳米级别的忆阻器, 设计了一种多通道忆阻脉冲耦合神经网络模型, 能够有效模拟网络中连接系数的动态变化, 解决神经网络中固有的参数估计问题. Bao 等<sup>[4]</sup>建立了具有整体隐藏振荡的 3D 忆阻 HR 神经元模型, 并进行了相应的数值模拟, 该模型展示了实际神经元电活动的复杂动力学. 一个混沌系统, 其状态不仅依赖于当前状态, 也依赖于系统的初始状态, 这也恰恰反映了大脑本身的特点. 因此, 神经动力学中的混沌动力学研究逐步成为国际学术界关注的热点问题<sup>[5]</sup>.

1987年, Freeman 等<sup>[6]</sup>在研究兔子嗅觉系统时, 发现在生物神经网络中存在着不规则的混沌现象, 进而提出了混沌神经网络 (chaotic neural network, CNN) 的概念. 随后, Chua 和 Yang<sup>[7]</sup>基于 Hopfield 神经网络和细胞自动机首次提出细胞

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61771176) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wanggyi@163.com

神经网络的概念. 1990年, Aihara等<sup>[8]</sup>通过在经典的 McCulloch-Pitts 神经元中引入时间延迟, 从而提出一个混沌神经网络模型. 生物神经系统之所以出现混沌现象, 是因为它是一个强非线性系统. 为了在人工神经网络中实现这一行为, 通常采用非线性函数作为其激活函数, 由此构成的混沌神经网络作为一种高度非线性动力学系统, 它可以实现一系列复杂的动力学行为, 在全局搜索优化、信息加密及伪随机序列发生器等有着广泛的应用. Chen等<sup>[9]</sup>提出了一种左 Caputo 离散增量意义上的三维分数阶 (FO) 离散 Hopfield 神经网络 (FODHNN), 研究了一种基于混沌 FODHNN 的图像加密系统的相关问题. 而 Jiang 和 Chen<sup>[10]</sup>构建了基于混沌神经网络的超分辨率图像盲恢复模型, 主要用于解决神经网络的传统超分辨率图像盲恢复模型容易陷入局部极小问题.

神经网络中的激活函数可采取多种形式, 其整体呈现单调性, 如常见的 Sigmoid 激活函数、 $\tanh(x)$  函数、分段型函数等. 但 Potapov 和 Ali<sup>[11]</sup>指出, 激活函数采用非单调的函数可以使神经元更容易产生混沌动力学特性. 例如, Yi等<sup>[12]</sup>提出的 I-TCNN 模型, 将正弦函数与 Sigmoid 函数的复合作为非单调激励函数; Zhang 和 Xu<sup>[13]</sup>提出了 Morlet 小波混沌神经网络 (MWCNN) 和墨西哥帽小波混沌神经网络 (MHCNN) 模型, 将 Morlet 或 Mexican Hat 小波函数代替 Sigmoid 函数作为其细胞神经网络的激活函数. 这些激活函数整体单调递增而局部非单调, 都能使得神经网络具有更加复杂的动力学行为, 但都不具有生物机制, 因为脑波不是单一频率的正弦波<sup>[14]</sup>.

在不同的场景下脑电波具有不同的频率和幅度. 基于频率和幅度不同可以将脑波分为五种类型, 分别为  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\gamma$  和  $\theta$ , 其频率随着活跃度因子  $x$  的增大而增大, 而幅度则随着活跃度因子  $x$  的增大而减小. 为了更加适应人脑的生物机制, 胡志强等<sup>[15]</sup>提出了一种变频混沌神经网络 (FCS-CNN) 模型, 其激活函数由一个变频正弦函数与 Sigmoid 函数加和组成. 这虽然在混沌神经元模型中加入了生物机制, 但 FCS 函数却只有单个变频正弦波信号.

脑电波来源于锥体神经元顶端树突的突触后电位. 人的大脑有上百亿个神经元, 所产生的脑电波并非单一存在的, 而应该由同时作用的不同频率的多个正弦信号叠加而成<sup>[16]</sup>. 为使混沌神经网络

更贴近人脑工作状态, 本文提出了一种多频-变频混沌神经网络模型, 建立了一种更具生物特性的非单调激活函数, 该激活函数由一种多频-变频正弦函数 (multifrequency-frequency conversion sinusoidal, MFCS) 与一个分段线性函数加和而成. 其中, MFCS 由多个频率不同, 相位不同的正弦函数波叠加而成, 通过调节相关参数使得这些正弦函数分别拥有不同状态的脑电信号, 从而更好地模拟频率不同、类型不同的脑电波同时工作时丰富多变的脑部活动. 在 MFCS 函数激励下神经网络产生了更为复杂的混沌运动, 使其具有更丰富的生物特性, 更加贴近智能的人类行为.

## 2 多频正弦激活函数

脑电波是一些自发的有节律的神经电活动, 其频率变动范围可划分为四个波段, 即  $\delta$ (1—3 Hz),  $\theta$ (4—7 Hz),  $\alpha$ (8—13 Hz),  $\beta$ (14—30 Hz). 除此之外, 在觉醒并专注于某一事时, 常见一种频率较  $\beta$  波更高的  $\gamma$  波, 其频率为 30—80 Hz, 波幅范围不定<sup>[16]</sup>. 脑电波是一种随机性很强的非平稳信号, 具有混沌动力学特性<sup>[17]</sup>.

在生活中人们经常处在不同的状态, 相应的脑电波类型也不尽相同. 脑电波中的正弦波信号并不是单一存在的, 频率越低其幅值越低, 反之越高. 考虑到大脑活动的生物学特性, 将脑波信号引入到混沌神经网络中, 使其更加贴近大脑真实的动力学特性. 多频正弦信号是一种周期性的信号<sup>[18–20]</sup>, 它是由幅度、相位和频率不同的多个正弦信号叠加而成, 多频正弦信号的数学表达式如下:

$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (1)$$

其中,  $A_i$ ,  $\omega_i$  和  $\varphi_i$  分别为幅度、角频率和初相位.

为了分析方便本文将其简化, 使用频率和初相不同的两个正弦信号的叠加组成一个多频正弦信号, 并引入至细胞神经网络的激活函数中, 进而定义 MFCS 为

$$\begin{aligned} S(x) &= A_1 \sin\left(\frac{x}{\varepsilon_1} + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{x}{\varepsilon_2} + \varphi_2\right) \\ &= Ae^{-q|x|} \left[ \sin\left(\frac{x\pi}{\varepsilon_1 e^{-m|x|}}\right) + \sin\left(\frac{2x\pi}{\varepsilon_2 e^{-n|x|}} + \varphi_2\right) \right], \\ A_1 &= A_2, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $x$  为自变量, 表示脑部活动的强弱;  $A, A_1$  和  $A_2$  为幅值, 且区间为  $0 \leq A \leq 1$ , 取  $A_1 = A_2 = A$ ;  $q, m, n$  为正值参数,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  分别为两个不同正弦函数的陡度参数;  $\varphi_1, \varphi_2$  为初相位. 当参数取值为  $A = 0.3, \varepsilon_1 = 0.04, \varepsilon_2 = 0.02, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi/4, m = 6.8, n = 1.8, q = 7$  时, MFCS 的波形如图 1 所示.

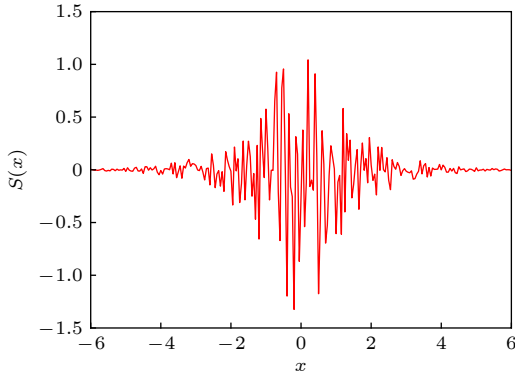


图 1 MFCS 图像  
Fig. 1. Graph of MFCS function.

由图 1 可以看出, 由两种不同频率的正弦函数叠加而成的 MFCS, 其幅度和频率的变化都更加复杂. 相比单一的变频正弦函数, 使用两个不同频率和相位的正弦函数进行叠加, 使整个函数更加贴近脑电波的生物机制.

将 MFCS 与分段线性函数  $g(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{2}$  相加构成了本文的激活函数:

$$f(x) = S(x) + g(x) = e^{-q|x|} \left[ \sin\left(\frac{x\pi}{\varepsilon_1 e^{-m|x|}}\right) + \sin\left(\frac{2x\pi}{\varepsilon_2 e^{-n|x|}} + \varphi_2\right) \right] + \frac{1}{2} (|x+1| - |x-1|). \quad (3)$$

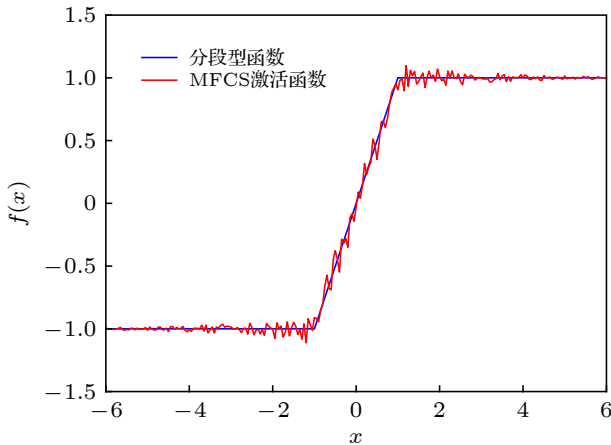


图 2 分段型函数+0.15 MFCS 激活函数  
Fig. 2. Piecewise function + 0.15 MFCS activation function.

如图 2 所示, 新的激活函数整体成单调性, 但局部是非单调的, 这一特征可以使神经元更加容易产生混沌动力学特性, 同时也使 MFCS 激活函数依然具有激活函数的动力学特性.

和 FCS 一样, MFCS 也能通过参数的调节来控制其频率和幅度, 如图 3 所示. 通过对  $A, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi, m, n, q$  进行调节, 可以看出  $q$  决定着函数的幅值宽度,  $m$  和  $n$  决定着频率的变化. 当  $q$  越大时, 幅值宽度越小;  $m$  和  $n$  越大, 频率陡度越大, 且随着  $n$  变化的频率陡度是随着  $m$  变化的频率陡度的两倍. 在参数值相同的情况下, 图 3(c) 中的频率陡

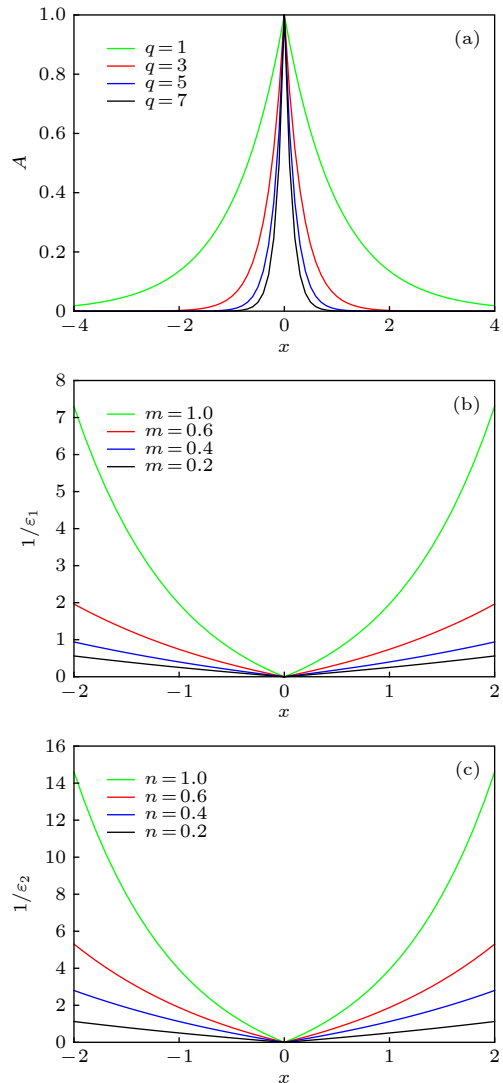


图 3 幅值和频率随  $q, m, n$  的变化 (a) 幅值  $A$  随  $q$  的变化; (b) 频率  $1/\varepsilon_1$  随  $m$  的变化; (c) 频率  $1/\varepsilon_2$  随  $n$  的变化

Fig. 3. Change characteristic of the amplitude and frequency with  $q, m, n$ : (a) The change characteristic of the amplitude  $A$  with  $q$ ; (b) the change characteristic of the frequency  $1/\varepsilon_1$  with  $m$ ; (c) the change characteristic of the frequency  $1/\varepsilon_2$  with  $n$ .

度比图 3(b) 中更加明显. 这模拟了脑电信号中, 两个不同频率的正弦波叠加工作的一种状态.

同时,  $m, n$  和  $x$  决定了 MFCS 的频率范围, 具体关系可见表 1.

表 1 频率  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  随  $n$  的变化

Table 1. Change characteristic of the frequency  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  with  $n$ .

类型	频率/Hz	$\varepsilon_1(0)$	$\varepsilon_2(0)$
$\delta$	0.50—3.01	0.32	0.64
$\theta$	3.98—6.97	0.04	0.08
$\alpha$	7.96—15.09	0.02	0.04
$\beta$	15.92—30.18	0.01	0.02
$\gamma$	36.17—100.31	0.0044	0.0088

由表 1 可知, 通过调整参数, MFCS 产生的频率  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  都能够很好地模拟脑电波的频率, 进而可以模拟多种不同频率脑电信号同时工作的状态, 其中  $|x| \leq 1$ . 为了更加直观地看出参数  $m, n$  对 MFCS 的影响, 固定自变量  $x$  为 1, 画出 MFCS 随参数  $m, n$  改变的三维立体图, 如图 4 所示. 由此看出, 多频正弦函数相比单一的正弦函数有着更加复杂的动力学特性, 且更加贴合脑电信号的工作状态.

激活函数对神经元上层级与下层级之间传递的信息进行处理, 使神经网络具备了分层的非线性

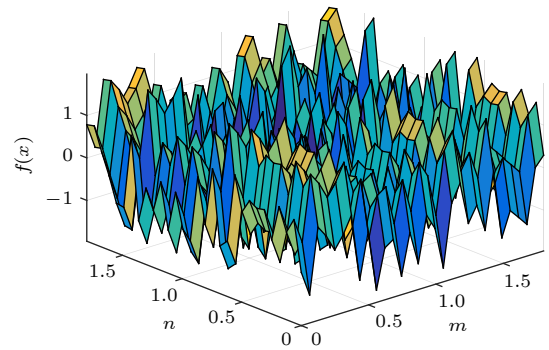


图 4 MFCS 随参数  $m, n$  变化图像

Fig. 4. Change characteristic of the MFCS with  $m$  and  $n$ .

映射学习能力, 对整个神经网络是至关重要的. 传统的 Sigmoid 激活函数存在软饱和性<sup>[21]</sup>的缺陷, 使它在向后传递的过程中出现梯度消失问题, 会导致训练速度降低. 而且它的输出不是以 0 为中心, 这会使它收敛速度较慢, 导致逼近最优解的能力大大降低. 本文提出的激活函数由多频-变频正弦函数与分段型函数加和组成, 它不但加入了生物机制, 也克服了软饱和性的缺陷. 对分段线性函数  $g(x)$  和多频-变频函数  $S(x)$  分别求导得:

$$g'(x) = \frac{1}{2} [\text{sign}(x+1) - \text{sign}(x-1)], \quad (4)$$

$$S(x) = \begin{cases} Ae^{-qx} \left\{ -q \left[ \sin \left( \frac{x\pi}{\varepsilon_1 e^{-mx}} \right) + \sin \left( \frac{2x\pi}{\varepsilon_2 e^{-nx}} + \varphi_2 \right) \right] + \cos \left( \frac{x\pi}{\varepsilon_1 e^{-mx}} \right) \frac{\pi e^{mx}}{\varepsilon_1} (1+mx) \right. \\ \quad \left. + \cos \left( \frac{2x\pi}{\varepsilon_2 e^{-nx}} + \varphi_2 \right) \frac{2\pi e^{nx}}{\varepsilon_2} (1+nx) \right\}, & (x > 0), \\ Ae^{qx} \left\{ q \left[ \sin \left( \frac{x\pi}{\varepsilon_1 e^{mx}} \right) + \sin \left( \frac{2x\pi}{\varepsilon_2 e^{nx}} + \varphi_2 \right) \right] + \cos \left( \frac{x\pi}{\varepsilon_1 e^{mx}} \right) \frac{\pi e^{mx}}{\varepsilon_1} (1+mx) \right. \\ \quad \left. + \cos \left( \frac{2x\pi}{\varepsilon_2 e^{nx}} + \varphi_2 \right) \frac{2\pi e^{-nx}}{\varepsilon_2} (1-nx) \right\}, & (x < 0), \end{cases}$$

$$= -Ae^{-q|x|} \left\{ q \left[ \sin \left( \frac{|x|\pi}{\varepsilon_1 e^{-m|x|}} \right) + \sin \left( \frac{2|x|\pi}{\varepsilon_2 e^{-n|x|}} + \varphi_2 \right) \right] + \cos \left( \frac{|x|\pi}{\varepsilon_1 e^{-m|x|}} \right) \frac{\pi e^{m|x|}}{\varepsilon_1} (1+m|x|) \right. \\ \quad \left. + \cos \left( \frac{2|x|\pi}{\varepsilon_2 e^{-n|x|}} + \varphi_2 \right) \frac{2\pi e^{n|x|}}{\varepsilon_2} (1+n|x|) \right\}. \quad (5)$$

通过调节 MFCS 激活函数的幅度参数  $q$ , 可以改变 MFCS 激活函数是否以 0 为中心输出. 分别画出分段型函数、MFCS 和 MFCS 激活函数及其导数, 如图 5 所示.

分析可知, 分段型函数和 MFCS 都可以以 0

为中心输出. 虽然分段型函数的导函数最终趋于 0, 但由于 MFCS 可通过调节幅度参数  $q$  来控制其自身的导函数最终是否趋近于 0, 因此 MFCS 激活函数的导函数也可通过调节参数  $q$  来控制其是否具有软饱和度, 故而不存在梯度消失的问题. 由

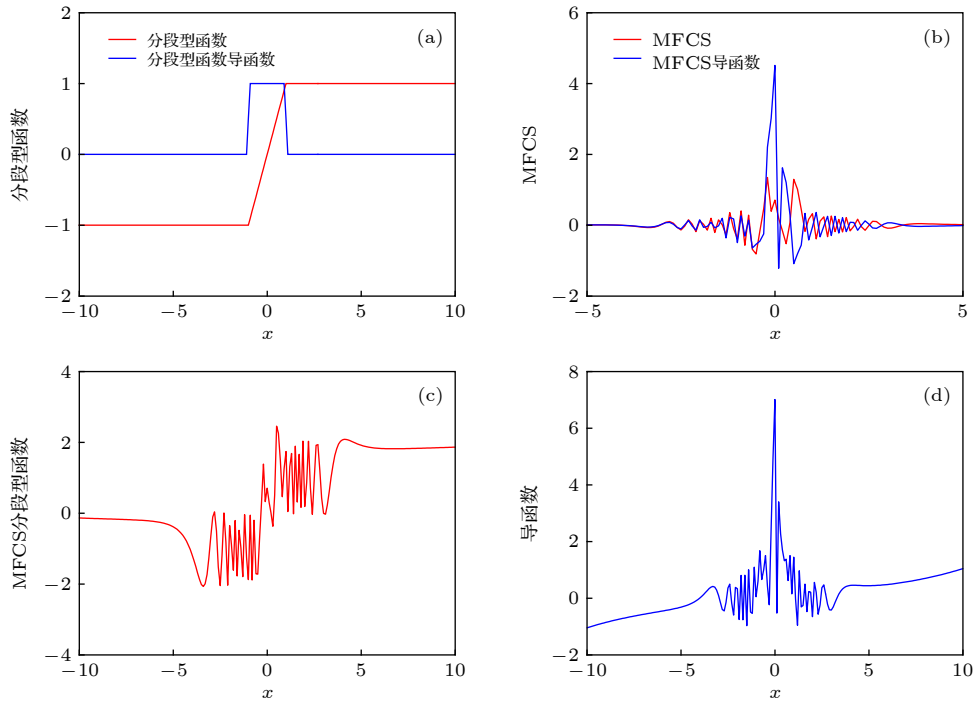


图 5 分段型函数、MFCS 和 MFCS 激活函数及其导数图像 (a) 分段型函数及其导函数; (b) MFCS 及其导函数; (c) MFCS 激活函数; (d) MFCS 激活函数导函数.

Fig. 5. Piecewise function, MFCS and MFCS activation function and its derivative image: (a) Piecewise function and its derivative function; (b) MFCS and its derivative function; (c) MFCS activation function; (d) MFCS activation function and its derivative function.

图 5(c) 可知, 虽然 MFCS 激活函数的斜率最终趋近 0, 但在  $x$  趋于正无穷和负无穷时, MFCS 激活函数的导函数 (图 5(d)) 却分别大于零和小于零. 因此, MFCS 激活函数不仅具有生物特性, 而且不容易发生梯度消失, 且其输出以 0 为中心 (图 5(c)). 本文提出的基于 MFCS 和分段函数的激活函数相比于传统的激活函数具有更好的特性.

### 3 基于多频正弦函数的细胞神经网络的混沌系统

采用本文设计的具有生物特性的函数与原激活函数相结合作为其非线性激活函数. 细胞神经网络模型可以描述为

$$\frac{dx_j}{dt} = -x_j + a_j f(x_j) + \sum_{k=i, k \neq j}^n A_{jk} f(x_k) + \sum_{k=i, k \neq j}^n S_{jk} x_k + I_j, \quad (6)$$

其中,  $a_j$ ,  $A_{jk}$  和  $S_{jk}$  取常数,  $f(x_j)$  为 MFCS 和激活函数加和而成的 MFCS 激活函数. 当  $a_j$ ,  $A_{jk}$  和  $S_{jk}$  取一些特定的值时, 可以呈现具有丰富动力学特性的混沌现象. 设六阶细胞神经网络的细胞参数为

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{jk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ 0 & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{41} & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ S_{51} & S_{52} & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & S_{62} & 0 & 0 & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix}, \\ a_i = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_5 = I_6 = 0, \\ A_{24} = 4, \text{ 其余 } A_{jk} = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

则此 MFCS 混沌神经元模型可以描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = S_{13}x_3 + S_{14}x_4, \\ \dot{x}_2 = S_{22}x_2 + S_{23}x_3 + A_{24}f(x_4), \\ \dot{x}_3 = S_{31}x_1 + S_{32}x_2, \\ \dot{x}_4 = S_{41}x_1 + S_{44}x_4, \\ \dot{x}_5 = S_{51}x_1 + S_{52}x_2 + S_{55}x_5, \\ \dot{x}_6 = S_{62}x_2 + S_{65}x_5 + S_{66}x_6, \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} f(x_4) &= Ace^{-q|x_4|} \left[ \sin\left(\frac{x_4\pi}{\varepsilon_1 e^{-m|x_4|}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{2x_4\pi}{\varepsilon_2 e^{-n|x_4|}} + \varphi\right) \right] + g(x_4), \\ g(x_4) &= \frac{1}{2} (|x_4 + 1| - |x_4 - 1|). \end{aligned} \quad (9)$$

此处, 参数  $S_{jk}$ ,  $A_{24}$ ,  $A$ ,  $c$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varphi$  均为常数;  $g(x)$  为原激活函数. 当参数取适当的值时, 将会产生混沌现象. 例如参数取值如表 2 所列, 系统产生的混沌吸引子相图见图 6, 图中的  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$ ,  $u$  和  $v$  分别对应 (8) 式中的  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  和  $x_6$ .

Lyapunov 指数可以表征系统运动的特征, 通过计算得到该混沌神经元系统的 Lyapunov 指数

为  $LE1 = 5.2631$ ,  $LE2 = -0.0005$ ,  $LE3 = -0.9956$ ,  $LE4 = -4.0100$ ,  $LE5 = -7.5025$ ,  $LE6 = -104.0340$ , Lyapunov 维数  $DL = 2.2986$ .

### 3.1 MFCS 混沌细胞神经网络复杂性分析

由于本文采用的混沌细胞神经元模型使用的是 MFCS 激活函数, 这使生成的 MFCS 混沌细胞神经网络系统具有复杂的动力学行为.

为了更加深入分析 MFCS 混沌细胞神经元模型特性, 以及它相对于传统的细胞神经网络所表现出的更为复杂的动力学特性, 画出其随参数  $m$  变化的 Lyapunov 指数谱图, 同时使用一种基于结构复杂度的算法——SE 复杂度算法 [22] 和 C0 复杂度算法 [23,24]. 这种基于结构复杂度的算法, 时间序列复杂性越大, 随机性越大, 序列能够恢复成原序列越困难. 对于 SE 复杂度算法, 当序列的功率谱变

表 2 与图 6 相对应的参数取值

Table 2. Values of parameters corresponding Fig. 6.

参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值
$S_{13}$	-1.0	$S_{41}$	98	$S_{65}$	4.0	$m$	10.6
$S_{14}$	-1.0	$S_{44}$	-105	$S_{66}$	-4.0	$n$	0.1
$S_{22}$	-1.3	$S_{51}$	1.0	$A_{24}$	5.0	$\varepsilon_1$	0.04
$S_{23}$	2.0	$S_{52}$	18	$A$	0.5	$\varepsilon_2$	0.02
$S_{31}$	13.0	$S_{55}$	-1	$c$	0.25	$\varphi$	$-\pi/4$
$S_{32}$	-14.0	$S_{62}$	100	$q$	-1.0		

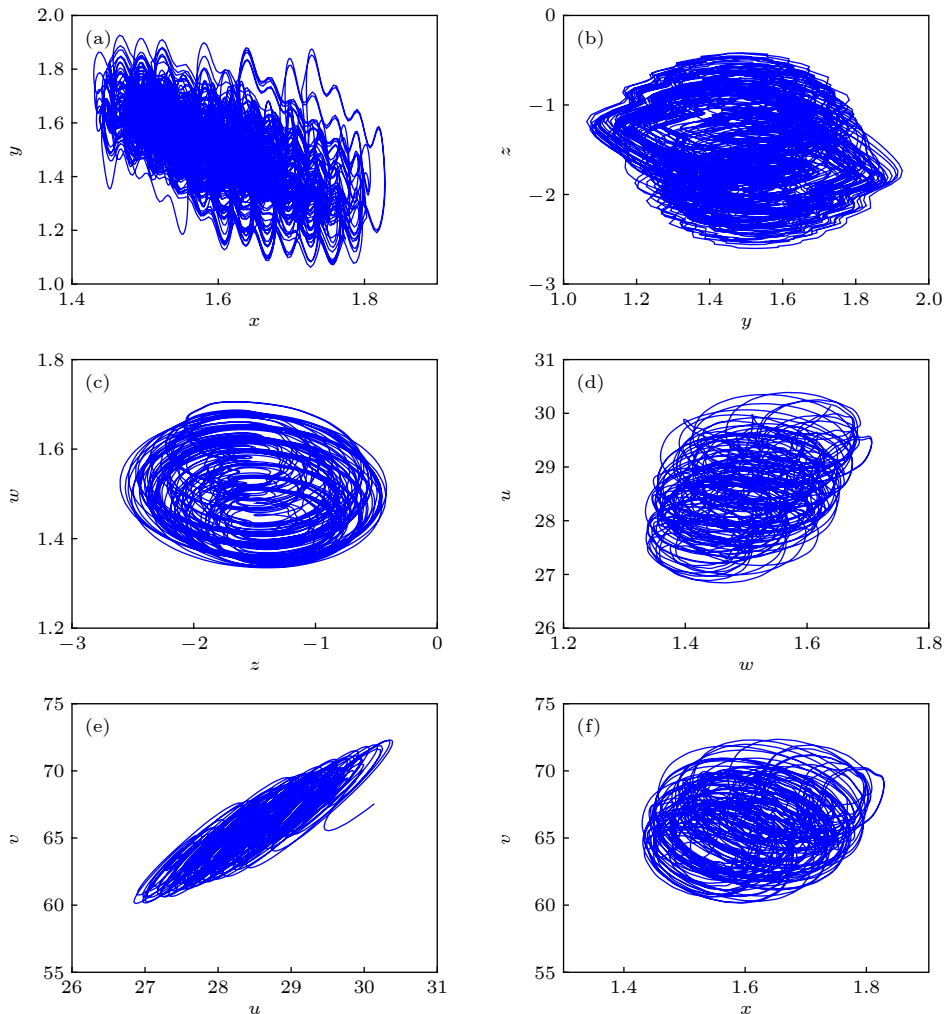


图 6 混沌吸引子相图

Fig. 6. Chaotic attractors of the MFCS chaotic cell neuron model.

化越稳定, 相对应的结构则越简单, 振幅越不明显; 对于 C0 复杂度算法, 不规则的部分越多, 其对应时域信号越接近随机序列, 而序列的复杂性也越大. 图 7 为画出的三维 SE 图与 C0 图.

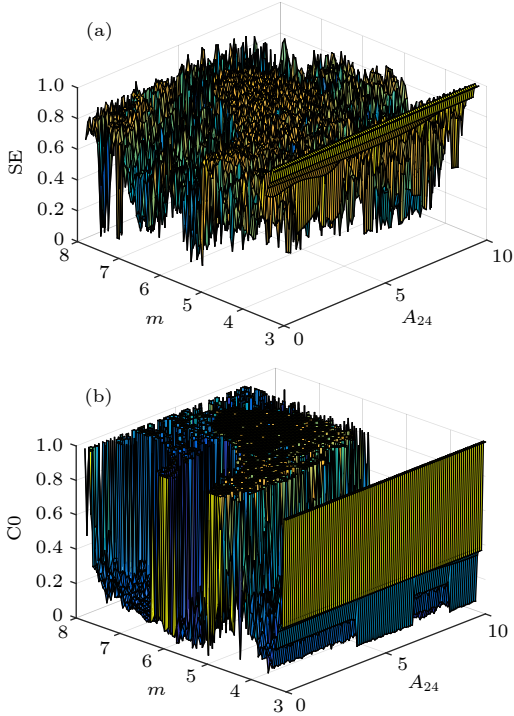


图 7 系统的三维复杂度 (a) SE 图; (b) C0 图  
Fig. 7. Three-dimensional complexity of the system: (a) The complexity of the SE; (b) the complexity of the C0.

从 SE 图和 C0 图可知, 当系统处于周期态时, 其 SE 和 C0 复杂度最小, 反之系统处于混沌态时, 其 SE 和 C0 复杂度大. 为清楚起见截取  $A_{24} = 5$  时随  $m$  变化的 SE 图和 C0 图, 如图 8 所示. 可以看出, 在  $m = 3.5$  与  $m = 7.8$  等窗口处, 系统处于周期状态, 对应的 SE 与 C0 的值也比较小. 当处于  $m = 4.7$  与  $m = 6.5$  等窗口处时, 其 SE 与 C0 的值比较大, 说明此时系统处于混沌状态.

### 3.2 MFCS 激活函数对系统动力学特性影响

本文取 MFCS 激活函数中几个具有代表性的参数  $c$ ,  $q$  和  $n$ , 分析 MFCS 激活函数对细胞神经网络的影响. 其中  $c$  代表着 MFCS 激活函数的比例系数,  $q$  为控制幅度  $A$  的参数,  $n$  为控制频率变化的参数. 随着参数  $c$ ,  $q$ ,  $n$  的改变, 系统也将处于不同的状态. 固定初始条件 (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6), 令参数  $c$ ,  $q$ ,  $n$  分别在一定区间内变化, 其他参数的取值如表 3 所列, 对应的系统的分岔图与

Lyapunov 指数谱如图 9、图 11 和图 13 所示, 相应的相图如图 10、图 12 和图 14 所示.

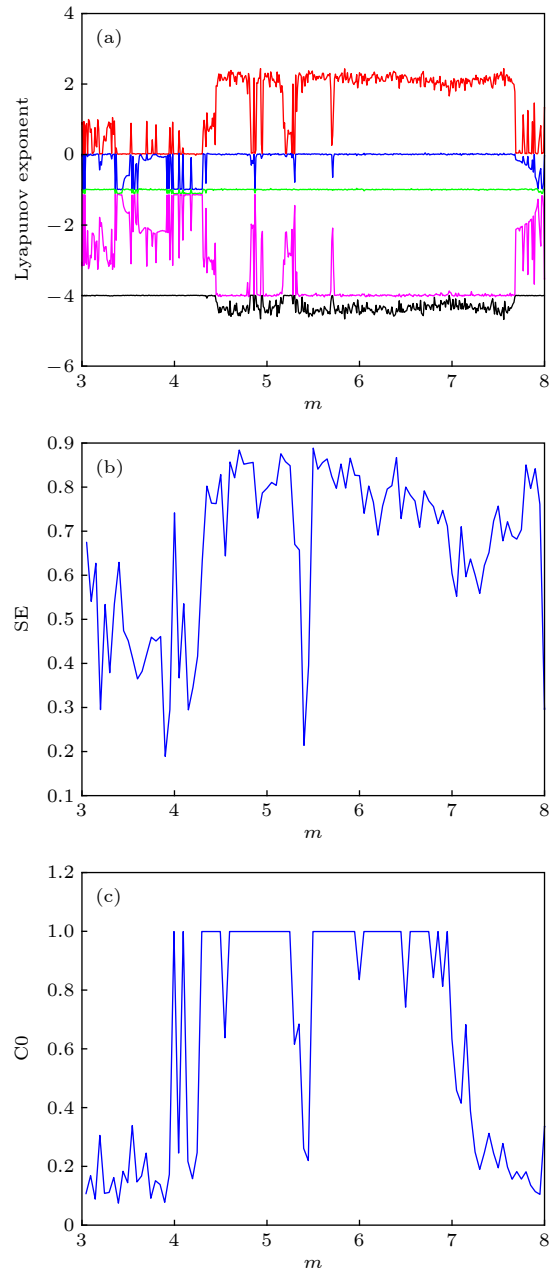


图 8 系统的二维复杂度 (a) Lyapunov 指数谱; (b) SE 图; (c) C0 图

Fig. 8. Two-dimensional complexity of the system: (a) Lyapunov exponents; (b) the complexity of SE; (c) the complexity of C0.

表 3 参数  $c$ ,  $q$ ,  $n$  取不同值时, 其他参数的取值  
Table 3. Values of other parameters when changing  $c$ ,  $q$ ,  $n$ .

参数	参数值	参数	参数值
$A_{24}$	5	$\varepsilon_1$	0.04
$A$	0.5	$\varepsilon_2$	0.02
$m$	10.6	$\varphi$	$-\pi/4$



### 3.2.1 MFCS 激活函数参数 $n$ 对系统动力学特性的影响

当  $n$  在区间  $[0, 5]$  变化时,  $c$  和  $q$  的取值分别为  $c = 0.25$  和  $q = -1$ , 其余参数如表 3 所列, 系统的分岔图及 Lyapunov 指数谱如图 9 所示.

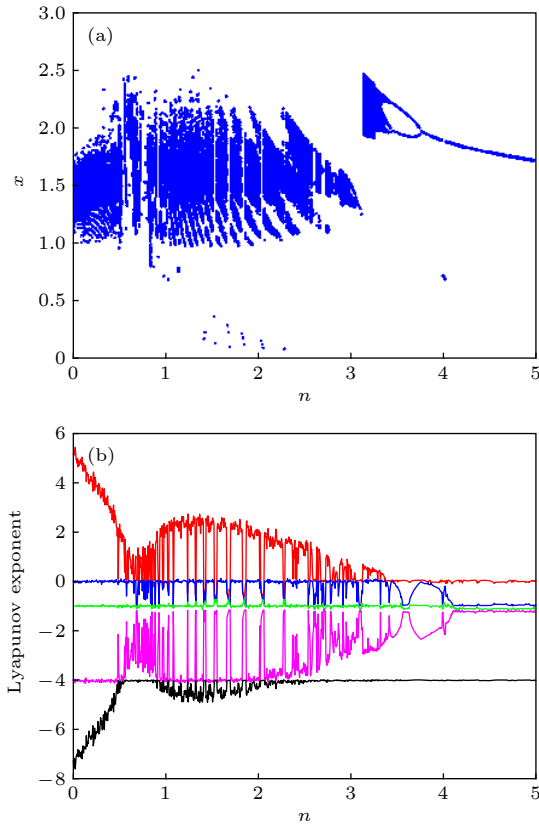


图 9 系统随参数  $n$  变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱  
Fig. 9. Bifurcation diagram and Lyapunov exponential spectrum of the system varying with  $n$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponents.

在 MFCS 激活函数中,  $n$  为控制频率变化的参数. 从图 9 看出, 随着参数  $n$  的增大, 系统处于混沌状态而后又通过逆倍周期分岔逐渐演变为周期状态. 因此, 在  $n > 3.2$  的频率范围内, 系统不出现复杂现象.

另外, 在此演化过程中还出现了多次阵发混沌现象. 其分岔图整体可以分为 4 个部分:  $[0, 0.5]$ ,  $[0.5, 0.8]$ ,  $[0.8, 2.75]$  和  $[2.75, 4]$ . 当  $n$  处于  $[0, 0.5]$  时, 系统处于混沌状态, 其吸引子形状较为复杂, 如图 10(a) 所示; 当  $n$  处于  $[0.5, 0.8]$  时, 系统处于周期与混沌交替的状态, 此时系统分岔图的结构相对于区间  $[0, 0.5]$  比较简单, 区间也比较小, 反映至相图上, 即相图呈现出较第一部分更为简单的吸引

子相图交替出现, 如图 10(b)—(d) 所示; 当  $n$  处于区间  $[0.8, 2.75]$  时, 系统又处于一个较为复杂的阶段, 此时系统的混沌吸引子以更复杂的线轨呈现出来, 如图 10(e) 所示; 当  $n$  处于区间  $[2.75, 4]$  时, 系统的分岔图逐渐趋于简单化最终演变为周期, 期间的混沌吸引子如图 10(f) 和图 10(g) 所示.

### 3.2.2 MFCS 激活函数参数 $c$ 对动力学特性的影响

当  $c$  在区间  $[0, 1]$  变化时,  $q$  和  $n$  的取值分别为  $q = -1$  和  $n = 2.5$ , 其余参数如表 3 所列, 可画出系统的分岔图及 Lyapunov 指数谱如图 11 所示.

由图 11 可知, 系统逐渐由周期轨道通过周期分岔演变为混沌状态. 参数  $c$  为 MFCS 激活函数的比例系数, 当  $c$  越大时, MFCS 函数在细胞神经网络中所占的比例也就越大. 随着参数  $c$  逐渐增大, 变量  $x$  的混沌映射区间 (幅值) 也逐渐增大. 当  $c$  运行至 0.51 与 0.7 时, 出现混沌映射区间突然增大的现象, 此时系统的吸引子也变得更为复杂. 这一现象也验证了参数  $c$  越大, MFCS 函数所占的比重越大, 系统变量的混沌映射区间也越大, 其动力学特性也更为丰富多变. 其典型的混沌吸引子见图 12.

### 3.2.3 MFCS 激活函数参数 $q$ 对动力学特性的影响

当  $q$  在区间  $[-1.5, 0.5]$  变化时,  $c$  和  $n$  的取值分别为 0.25 和 2.5, 其余参数如表 3 所列, 系统的分岔图及 Lyapunov 指数谱如图 13 所示.

MFCS 激活函数中,  $q$  为控制幅度  $A$  的参数. 可以看出, 随着参数  $q$  的增大, 系统通过几个逆倍周期分岔窗口逐渐从混沌演变至周期, 在整个演化过程中有多次周期轨道与混沌轨道的切换, 这对系统激活函数的幅度提出了一定的限制. 例如当  $q \in [-0.7, -0.63]$  系统处于混沌轨道, 当  $q \in [-0.63, -0.58]$  系统处于周期轨道. 类似地, 在区间  $[-0.5, 0]$  内, 系统经历了多次混沌轨道与周期轨道切换的过程,  $x-y$  相平面吸引子随  $q$  变化的几种典型相图如图 14 所示.

从图 9、图 11 和图 13 看出, 当系统分别随参数  $c$ ,  $q$  和  $n$  变化时, 所产生的混沌吸引子的 Lyapunov 指数都较大, 其中随参数  $n$  变化时, 最大 Lyapunov 指数为 5.263, 随参数  $c$  变化时, 最大 Lyapunov 指数为 2.5211, 而随参数  $q$  变化时最大

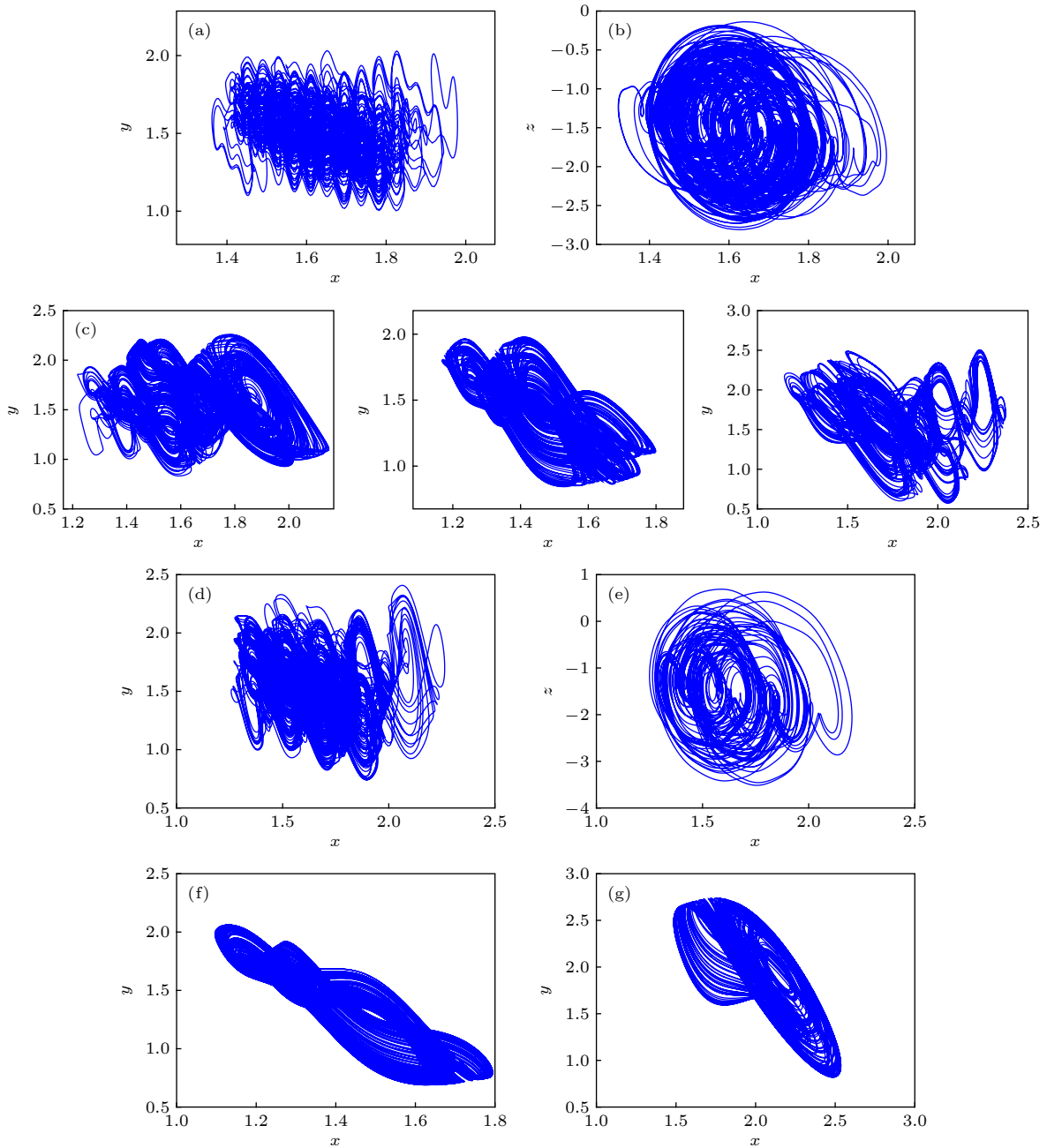


图 10 系统随参数  $n$  变化的相图 (a)  $n = 0.2$ ; (b)  $n = 0.53$ ; (c)  $n = 0.61$ ; (d)  $n = 0.7$ ; (e)  $n = 1.62$ ; (f)  $n = 2.98$ ; (g)  $n = 3.16$   
 Fig. 10. Chaotic attractors of the system changing with parameter  $n$ : (a)  $n = 0.2$ ; (b)  $n = 0.53$ ; (c)  $n = 0.61$ ; (d)  $n = 0.7$ ; (e)  $n = 1.62$ ; (f)  $n = 2.98$ ; (g)  $n = 3.16$ .

Lyapunov 指数也有 2.0655. 大的 Lyapunov 指数反映了系统在初值变化时其轨道之间的分离程度, 即具有更好的初值敏感性. 这说明在 MFCS 激活函数作用下系统会产生更为复杂的混沌动力学行为, 其吸引子相图较一般的混沌神经网络系统也显得更为丰富, 如图 15 所示.

### 3.3 非线性系统的共存动力学行为

当系统设置参数  $A_{24} = 5$ ,  $A = 0.5$ ,  $c = 0.25$ ,

$m = 5.6$ ,  $n = 2.5$ ,  $q = -1$ ,  $\varepsilon_1 = 0.02$ ,  $\varepsilon_2 = 0.04$  和  $\varphi = -\pi/4$  时, 状态变量  $x$  随着初始条件  $[0.1, y(0), 0.3, 0.4, 0.5, 0.6]$  中  $y(0) \in [-2, 2]$  的变化, 系统的 Lyapunov 指数谱和分岔图如图 16 所示.

可以看出, 系统大多数时间都处于混沌状态, 其运动轨迹大致分为三部分. 第一部分处于周期轨道和混沌轨道相互切换的状态; 第二部分和第三部分处于混沌状态, 且在  $y(0)$  等于  $-1$  和  $0.8$  的情况下, 系统的混沌轨道发生了两次跳变, 其吸引子类

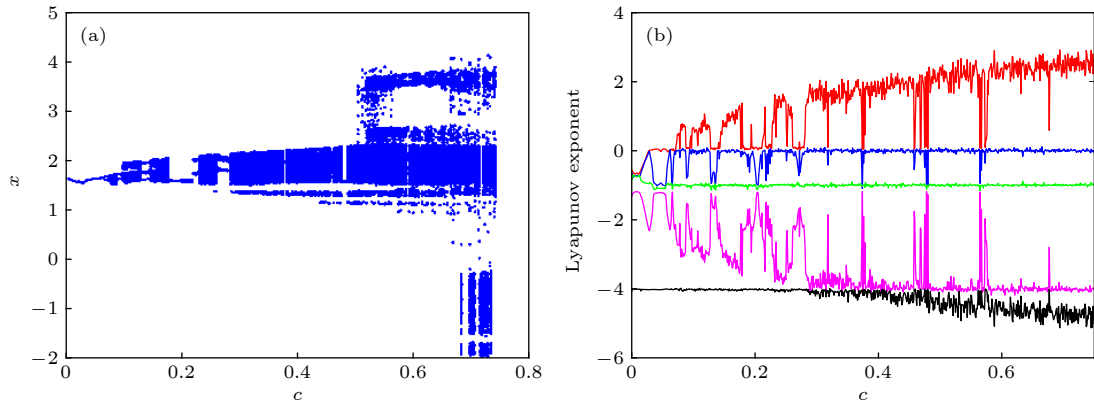


图 11 系统随参数  $c$  变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 11. Bifurcation diagram and Lyapunov exponential spectrum of the system varying with  $c$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponents.

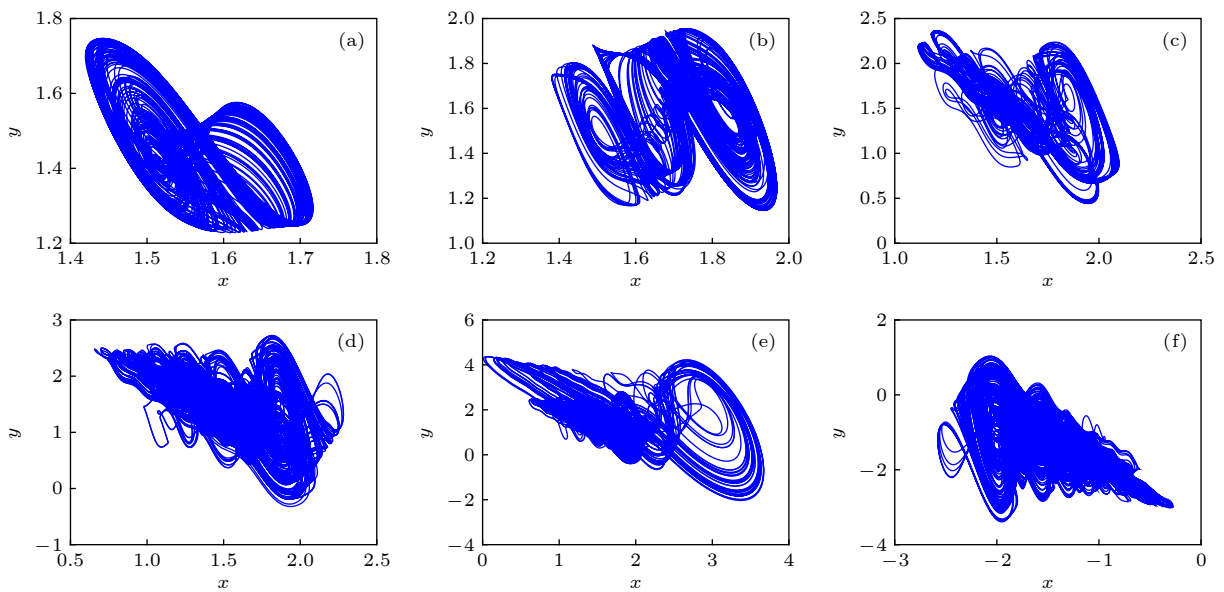


图 12 系统随参数  $c$  变化的相图 (a)  $c = 0.08$ ; (b)  $c = 0.118$ ; (c)  $c = 0.25$ ; (d)  $c = 0.50$ ; (e)  $c = 0.52$ ; (f)  $c = 0.73$

Fig. 12. Chaotic attractors of the system changing with parameter  $c$ : (a)  $c = 0.08$ ; (b)  $c = 0.118$ ; (c)  $c = 0.25$ ; (d)  $c = 0.50$ ; (e)  $c = 0.52$ ; (f)  $c = 0.73$ .

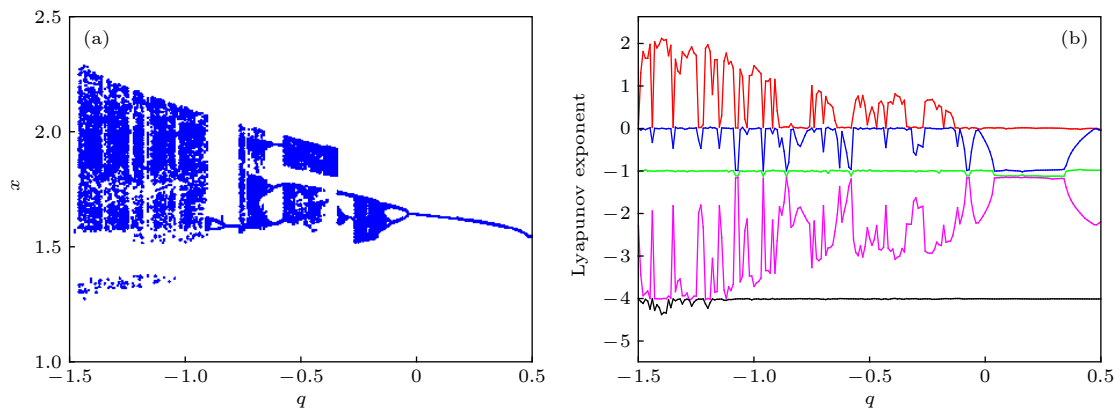


图 13 系统随参数  $q$  变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱

Fig. 13. Bifurcation diagram and Lyapunov exponential spectrum of the system varying with  $q$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponents.

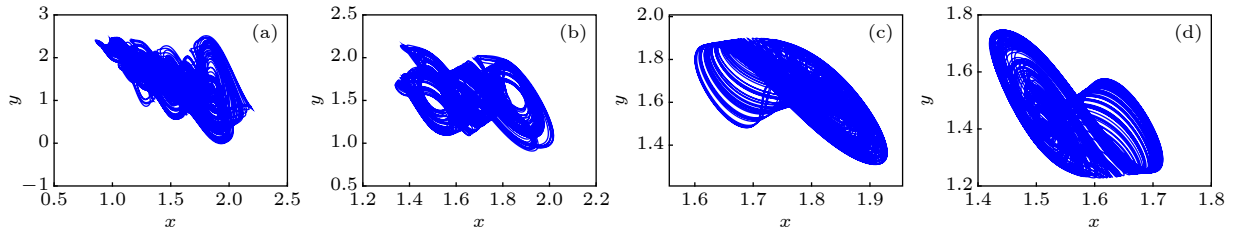


图 14 系统随参数  $q$  变化的相图 (a)  $q = -1.26$ ; (b)  $q = -0.75$ ; (c)  $q = -0.38$ ; (d)  $q = -0.25$

Fig. 14. Chaotic attractors of the system changing with parameter  $q$ : (a)  $q = -1.26$ ; (b)  $q = -0.75$ ; (c)  $q = -0.38$ ; (d)  $q = -0.25$ .

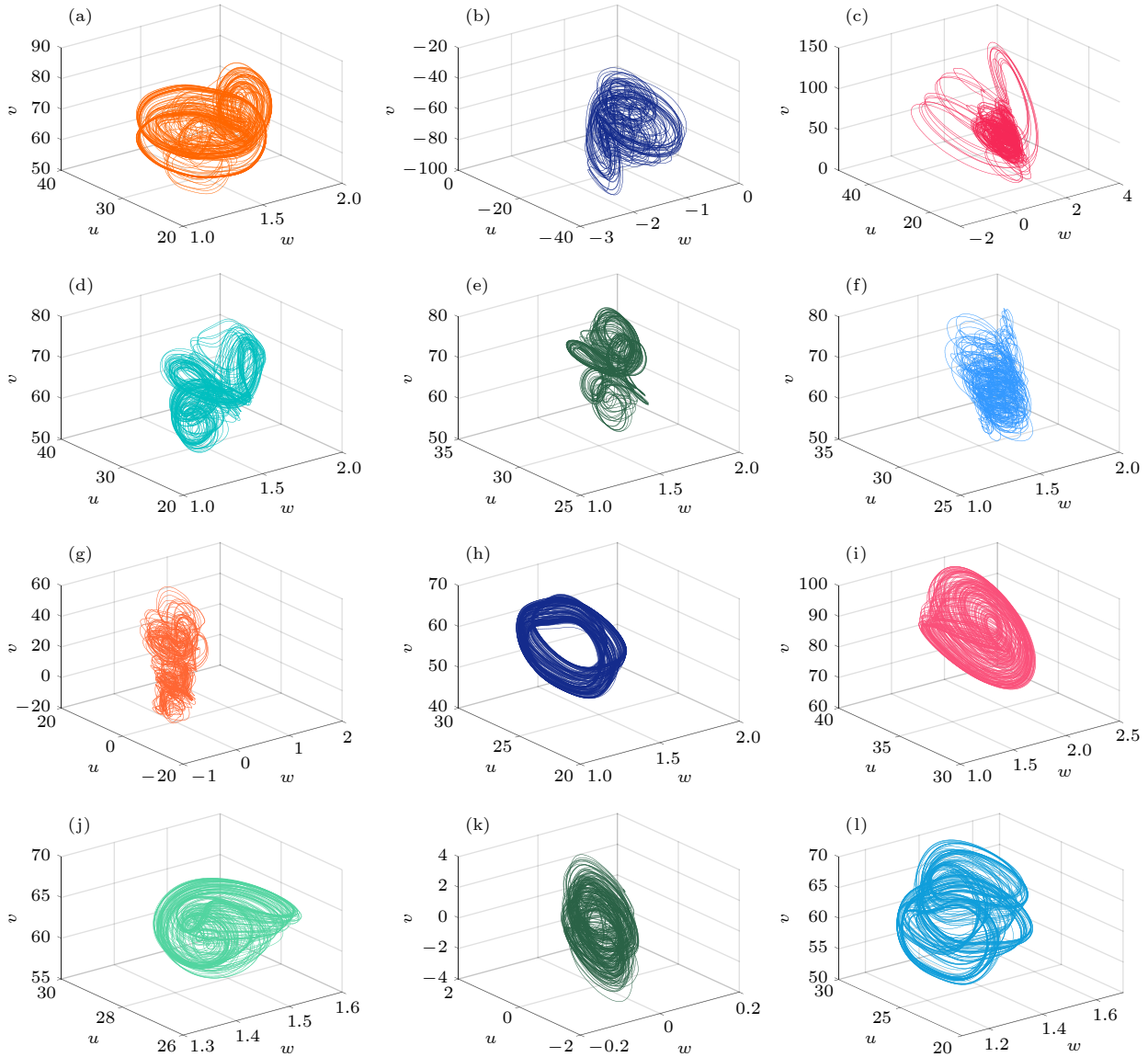


图 15 系统随参数  $c, q, n$  变化的几种典型相图 (a)  $c = 0.25, q = -1, n = 2.5$ ; (b)  $c = 0.73, q = -1, n = 2.5$ ; (c)  $c = 0.52, q = -1, n = 2.5$ ; (d)  $c = 0.25, q = -1, n = 0.715$ ; (e)  $c = 0.118, q = -1, n = 2.5$ ; (f)  $c = 0.25, q = -1, n = 0.2$ ; (g)  $c = 0.73, q = -0.9, n = 2.5$ ; (h)  $c = 0.25, q = -1, n = 2.98$ ; (i)  $c = 0.25, q = -1, n = 3.16$ ; (j)  $c = 0.08, q = -1, n = 2.5$ ; (k)  $c = -0.25, q = -0.9, n = 2.5$ ; (l)  $c = 0.25, q = -1, n = 0.61$

Fig. 15. Several typical chaotic attractors of the system changing with parameter  $c, q, n$ : (a)  $c = 0.25, q = -1, n = 2.5$ ; (b)  $c = 0.73, q = -1, n = 2.5$ ; (c)  $c = 0.52, q = -1, n = 2.5$ ; (d)  $c = 0.25, q = -1, n = 0.715$ ; (e)  $c = 0.118, q = -1, n = 2.5$ ; (f)  $c = 0.25, q = -1, n = 0.2$ ; (g)  $c = 0.73, q = -0.9, n = 2.5$ ; (h)  $c = 0.25, q = -1, n = 2.98$ ; (i)  $c = 0.25, q = -1, n = 3.16$ ; (j)  $c = 0.08, q = -1, n = 2.5$ ; (k)  $c = -0.25, q = -0.9, n = 2.5$ ; (l)  $c = 0.25, q = -1, n = 0.61$ .

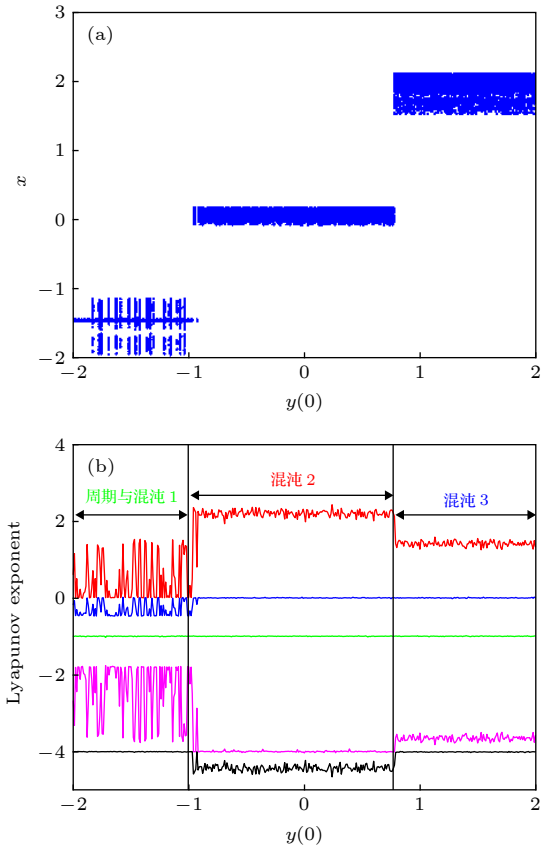


图 16 系统随初始值  $y(0)$  变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数谱  
 Fig. 16. Bifurcation diagram and Lyapunov exponential spectrum of the system varying with the initial value  $y(0)$ : (a) Bifurcation diagram; (b) Lyapunov exponents.

型与形状随之改变, 如图 17 所示. 当  $y(0)$  处于区间  $[-2, -1]$  时, 系统大部分时间处于周期状态, 但期间存在多次周期轨道与混沌轨道的切换. 当  $y(0)$  处于区间  $[-1, 2]$  时, 系统处于混沌状态, 但是当  $y(0)$  处于 0.8 时, 混沌发生了跳变如图 16 所示.

共存吸引子是系统参数固定时, 初值变化引起的不同动力学行为, 其本质反映论文系统的敏感性, 但与传统的初值敏感性有所不同. 传统的初值敏感性一般指在同一个混沌吸引子中, 由于初值的微小扰动而引起混沌轨道的快速分离. 而共存吸引子是指初值变化时系统产生的不同动力学特性的吸引子, 如混沌、周期和点吸引子等, 或具有系统动力学特性但特征不同的吸引子. 因此也把共存吸引子分为两类, 一类是具有相同动力学行为的不同吸引子, 称之为同质共存吸引子; 另一类是具有不同动力学行为的不同吸引子, 称之为不同质的共存吸引子. 若一个混沌系统具有共存吸引子, 说明该混沌系统对初值更为敏感, 也具有更复杂的动力学

行为, 系统在信息加密和保密通信等方面也具有更好的应用价值.

一个系统在不同的参数下, 具有很多不同的共存吸引子不算特别, 但本文所述的 MFCS 混沌细胞神经网络在固定参数数值的情况下, 依然具有十分丰富的共存吸引子. 不同类型的吸引子共存在一起是系统多稳定性的体现. 多稳定性可用于图像处理等领域, 因此在许多保密工程中, 它被视为另一个随机序列的来源. 如果取表 4 中的参数值, 系统可产生多种共存吸引子, 几个典型的例子如图 18 所示. 可以看出, 随着初值的变化, 系统将会产生多种共存现象. 其中有  $I_c$  型、 $II_c$  型和  $III_c$  三种类型的共存混沌吸引子, 如图 18(a) 和表 4 所列. 此外还存在混沌吸引子与极限环共存的情况, 如图 18(b) 所示; 也存在  $I_p$  型和  $II_p$  两种极限环的共存现象, 如图 18(c) 所示. 每种共存吸引子的性质与初值条件如表 5 所列.

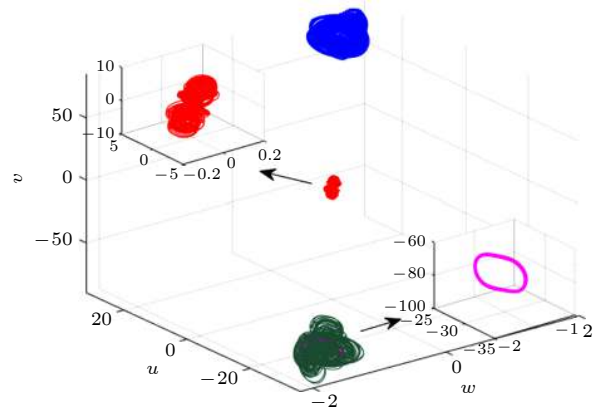


图 17 系统随初始值  $y(0)$  变化的相图-共存吸引子  
 Fig. 17. Chaotic attractors of the system changing with the initial value  $y(0)$ -coexistence attractor.

表 4 与图 18 相对应的参数的取值  
 Table 4. Values of parameters corresponding Fig. 18..

参数	参数值	参数	参数值
$A_{24}$	5	$q$	-1
$A$	0.5	$\varepsilon_1$	0.04
$m$	5.6	$\varepsilon_2$	0.02
$n$	2.5	$\varphi$	$-\pi/4$

从图 17、图 18 和表 5 看出, 系统产生的  $II_c$  型、 $III_c$  型吸引子相互对称, 分别从初始状态  $(0.52, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$  和  $(-0.5, -1.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)$  出发, 但这两种吸引子的初始条件并不对称, 显然其对称性来自系统本身. 系统关于初值  $x(0)$ -

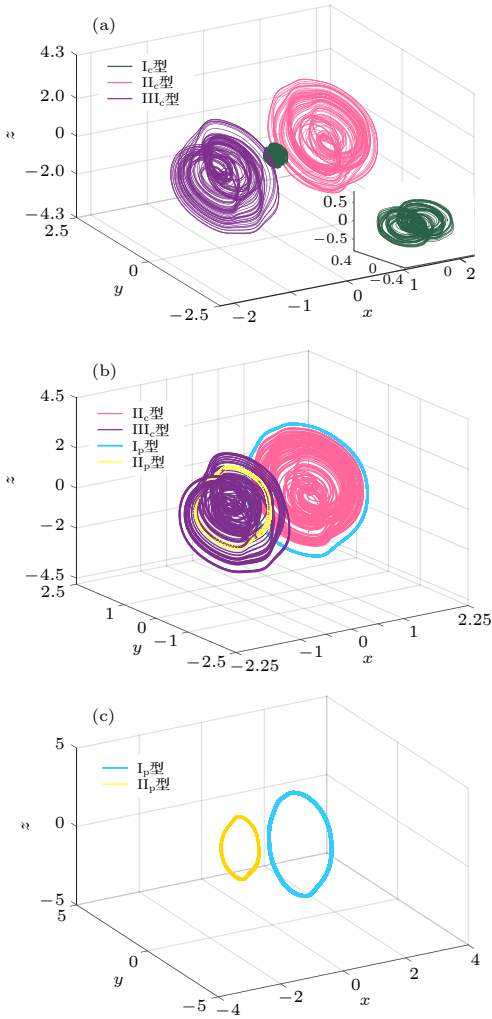


图 18 系统在  $x$ - $y$ - $z$  平面的共存吸引子 (a) 混沌吸引子共存; (b) 混沌吸引子与极限环共存; (c) 极限环共存  
 Fig. 18. Coexistence attractor of the system in the  $x$ - $y$ - $z$  plane: (a) Chaotic attractors coexist; (b) chaos attractors coexist with limit cycles; (c) limit cycles coexist.

表 5 初始条件的取值  
 Table 5. Values of initial conditions.

性质	类型	初始条件
混沌吸引子与混沌吸引子	$I_c$ 型、 $II_c$ 型	(0.2, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.52, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)
	$I_c$ 型、 $III_c$ 型	(0.2, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (-0.5, -1.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)
混沌吸引子与极限环	$II_c$ 型、 $III_c$ 型	(0.52, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (-0.5, -1.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)
	$II_c$ 型、 $I_p$ 型	(0.82, 1.5, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (5.5, 5.81, 0.305, 0.4, 0.5, 0.6001)
	$III_c$ 型、 $II_p$ 型	(-0.8, -1.5, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6), (0.1, -1.51, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)
极限环与极限环	$I_p$ 型、 $II_p$ 型	(5.5, 5.81, 0.305, 0.4, 0.5, 0.6001), (0.1, -1.51, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6)

$y(0)$  和  $x(0)$ - $z(0)$  的吸引盆如图 19 所示, 其中不同的颜色区域代表不同种类的共存吸引子. 图 19(a) 中橙色代表  $II_p$  型, 红色代表  $II_c$  型, 蓝色代表  $I_p$  型; 图 19(b) 中橙色代表  $I_c$  型, 红色代表  $II_c$  型, 蓝色代表  $I_p$  型.

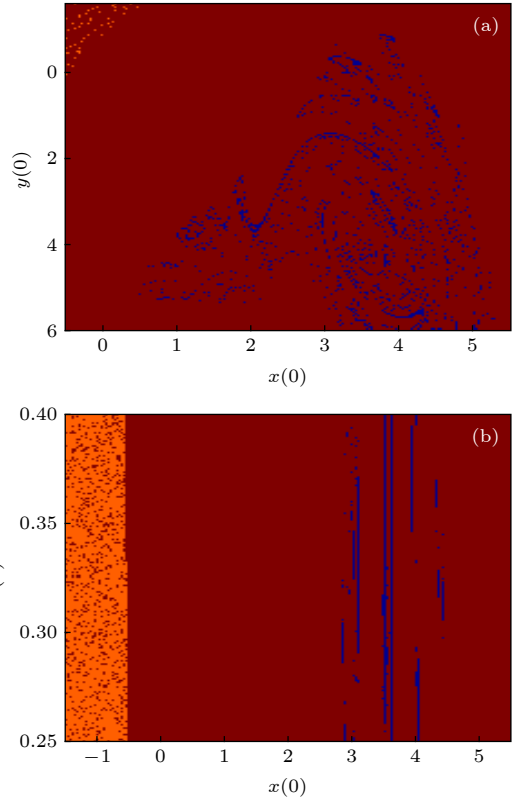


图 19 系统随  $x(0)$ ,  $y(0)$ ,  $z(0)$  变化的吸引盆 (a) 系统随  $x(0)$ ,  $y(0)$  变化的吸引盆; (b) 系统随  $x(0)$ ,  $z(0)$  变化的吸引盆  
 Fig. 19. Suction basin of the system varying with  $x(0)$ ,  $y(0)$  and  $z(0)$ : (a) The suction basin of the system varying with  $x(0)$ ,  $y(0)$ ; (b) the suction basin of the system varying with  $x(0)$ ,  $z(0)$ .

## 4 结 论

本文基于多频-变频正弦函数设计了一种新的激活函数, 此激活函数不仅具有激活函数的特性, 而且还具有一定的生物特性. 将此激活函数应用于细胞神经网络中, 提出了一种基于多频-变频正弦激活函数的混沌细胞神经网络. 分析发现激活函数中的参数显著影响系统的动力学特性, 使混沌细胞神经网络产生了系列复杂动力学行为, 包括各类混沌吸引子和周期吸引子, 以及各类共存吸引子等, 提升了混沌神经网络的性能, 使得其在信息处理、信息加密等方面具有较好的前景.

## 参考文献

- [1] Sun W M, Wang H, Gao T, Xia R R, Zhang L 2017 *Elec. World.* **24** 27 (in Chinese) [孙为民, 王晖, 高涛 2017 *电子世界* **24** 27]
- [2] Wang X Y, Li Z M 2019 *Optlase. Eng.* **115** 107
- [3] Dong Z K, Du C J, Lin H P, Lai J S, Hu X F, Duan S K 2020 *J. Elec. Inform. Tech.* **42** 835 (in Chinese) [董哲康, 杜晨杰, 林辉品, 赖俊昇, 胡小方, 段书凯 2020 *电子与信息学报* **42** 835]
- [4] Bao H, Hu A H, Liu W B, Bao B C 2019 *IEEE Trans. Neural. Netw. Learn. Syst.* **31** 502
- [5] Wang C H, Lin H R, Sun R J, Zhou L, Zhou C, Deng Q L 2020 *J. Elec. Inform. Tech.* **42** 795 (in Chinese) [王春华, 蒯海荣, 孙晶如, 周玲, 周超, 邓全利 2020 *电子与信息学报* **42** 795]
- [6] Freeman W J 1987 *Biol. Cybern.* **56** 139
- [7] Chua L O, Yang L 1988 *IEEE T Circuits* **35** 1257
- [8] Aihara K, Takabe T, Toyoda M 1990 *Phys. Lett. A* **144** 333
- [9] Chen L P, Hao Y, Huang T W, Yuan L G, Zheng S, Yin L S 2020 *Neural Networks* **125** 174
- [10] Jiang C S, Chen Q 2020 *Chaos Soliton Fract.* **131** 109
- [11] Potapov A, Ali M K 2000 *Phys. Lett. A* **277** 310
- [12] Yi Z, Xu G J, Qin X Z, Jia Z H 2011 *Proc. Eng.* **24** 479
- [13] Zhang J H, Xu Y Q 2009 *Nat. Sci.* **1** 204
- [14] Sih G C, Tang K K 2012 *Theor. Appl. Fract. Mec.* **61** 21
- [15] Hu Z Q, Li W J, Qiao J F 2016 *Acta Phys. Sin.* **66** 090502 (in Chinese) [胡志强, 李文静, 乔俊飞 2016 *物理学报* **66** 090502]
- [16] Sanei S, Chambers J A 2007 *Comput. Intel. Neurosc.* **2** 1178
- [17] Yin Y H 2008 *M. S. Thesis* (Shanghai: Tongji University) (in Chinese) [殷艳红 2008 硕士学位论文 (上海: 同济大学)]
- [18] Pedro J C, De Carvalho N B 1999 *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* **47** 2393
- [19] Hajji R, Beanregard F, Ghannouchi F M 1997 *IEEE Trans. Microw Theory Tech.* **45** 1093
- [20] Jan V, Frans V, Marc B V 2000 *56th ARFTG Conference Digest Boulder, AZ, USA, November 30–December 1, 2000* p1
- [21] Gulcehre C, Moczulski M, Denil M, Bengio Y 2017 *International Joint Conference on Neural Networks Anchorage, AK, USA, May 14–19, 2017* p17010846
- [22] Phillip P A, Chiu F L, Nick S J 2009 *Phys. Rev. Stat. Non. Soft Matter Phys.* **79** 011915
- [23] Chen F, Xu J H, Gu F J 2000 *Biol. Cybern.* **83** 355
- [24] Sui K H, He S B, Zhu C X, He Y 2013 *Acta Elec. Sin.* **41** 1765 (in Chinese) [孙克辉, 贺少波, 朱从旭, 何毅 2013 *电子学报* **41** 1765]

# Multi-frequency sinusoidal chaotic neural network and its complex dynamics\*

Li Ru-Yi   Wang Guang-Yi<sup>†</sup>   Dong Yu-Jiao   Zhou Wei

(*Institute of Modern Circuits and Intelligent Information, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China*)

( Received 13 May 2020; revised manuscript received 21 August 2020 )

## Abstract

A large number of animal experiments show that there is irregular chaos in the biological nervous systems. An artificial chaotic neural network is a highly nonlinear dynamic system, which can realize a series of complex dynamic behaviors, optimize global search and neural computation, and generate pseudo-random sequences for information encryption. According to the superposition theory of sinusoidal signals with different frequencies of brain waves, a non-monotone activation function based on the multifrequency-frequency conversion sinusoidal function and a piecewise function is proposed to make a neural network more consistent with the biological characteristics. The analysis shows that by adjusting the parameters, the activation function can exhibit the EEG signals in its different states, which can simulate the rich and varying brain activities when the brain waves of different frequencies and types work at the same time. According to the activation function we design a new chaotic cellular neural network. The complexity of the chaotic neural network is analyzed by the structural complexity based SE algorithm and C0 algorithm. By means of Lyapunov exponential spectrum, bifurcation diagram and basin of attraction, the effects of the activation function's parameters on its dynamic characteristics are analyzed in detail, and it is found that a series of complex phenomena appears in the chaotic neural network, such as many different types of chaotic attractors, coexistent chaotic attractors and coexistence limit cycles, which improves the performance of the chaotic neural network, and proves that the multi-frequency sinusoidal chaotic neural network has rich dynamic characteristics, so it has a good prospect in information processing, information encryption and other aspects.

**Keywords:** cellular neural network, chaos, multifrequency sinusoidal activation function

**PACS:** 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Jn, 07.05.Mh

**DOI:** [10.7498/aps.69.20200725](https://doi.org/10.7498/aps.69.20200725)

---

\* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant No. 61771176).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wanggyi@163.com](mailto:wanggyi@163.com)