



地下黏弹性介质波动方程及波场数值模拟

宋利伟 石颖 陈树民 柯璇 侯晓慧 刘志奇

Wave equation for underground viscoelastic media and wavefield numerical simulation

Song Li-Wei Shi Ying Chen Shu-Min Ke Xuan Hou Xiao-Hui Liu Zhi-Qi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 149102 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210005

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210005>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于广义交替数值通量的局部间断Galerkin方法求解二维波动方程

Two-dimensional wave equation solved by generalized alternating flux based local discontinuous Galerkin method

物理学报. 2020, 69(2): 020202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190613>

绝热脉冲磁共振地下水探测技术数值模拟及影响分析

Numerical simulation and analyze of magnetic resonance sounding with adiabatic pulse for groundwater exploration

物理学报. 2020, 69(12): 123301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200015>

三维电磁扩散场数值模拟及磁化效应的影响

Three-dimensional numerical simulation of electromagnetic diffusion problem and magnetization effects

物理学报. 2019, 68(3): 030201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181567>

气力提升系统气液两相流数值模拟分析

Numerical simulation of gas-liquid two-phase flow in gas lift system

物理学报. 2020, 69(6): 064705 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191755>

化学复合率对激发赤道等离子体泡影响的数值模拟

Numerical simulation of recombination rate effect on development of equatorial plasma bubbles

物理学报. 2019, 68(19): 199401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190173>

热粘弹波在变温非均匀合金熔体中的传播

Propagation of thermoviscoelastic wave in inhomogeneous alloy melt with varying temperature

物理学报. 2019, 68(4): 048101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181923>

地下黏弹性介质波动方程及波场数值模拟*

宋利伟^{1)†} 石颖²⁾ 陈树民³⁾ 柯璇²⁾ 侯晓慧¹⁾ 刘志奇²⁾

1) (东北石油大学物理与电子工程学院, 大庆 163318)

2) (东北石油大学地球科学学院, 大庆 163318)

3) (大庆油田有限责任公司勘探开发研究院, 大庆 163712)

(2021 年 1 月 2 日收到; 2021 年 1 月 25 日收到修改稿)

实际介质普遍具有黏弹性, 波在传播过程中常伴有能量的耗散、相位畸变和频带变窄等, 对于含有液体和气体的介质, 衰减现象尤为突出. 由于经典的波动理论未考虑介质的黏弹性效应, 基于完全弹性假设的模拟波场和实际传播特征之间的差异明显, 波动理论在工程技术中的应用效果还有提升的空间. 在岩石物理中, 品质因子 Q 是量化地震衰减强度的参数, 为了研究波在地下介质中的传播规律, 本文从常 Q 理论出发, 在黏弹性介质频散关系中, 利用多项式拟合和 Taylor 展开法将频率的分数阶转化为整数阶, 进而推导了时间域复数形式的地下黏弹性介质波动方程. 该近似处理避免了频散关系经域转换后出现分数阶时间微分项, 能有效地降低计算成本. 最后, 采用有限差分法联合伪谱法对均质模型实现了波场的数值模拟, 验证了方程的有效性.

关键词: 黏弹性介质, 波动方程, 数值模拟, 伪谱法**PACS:** 91.30.Ab, 91.60.Qr**DOI:** 10.7498/aps.70.20210005

1 引言

地下介质普遍具有黏弹性, 波在传播过程中部分能量转变成热, 波场特征会发生明显变化, 如振幅衰减、相位畸变和频带变窄等. 当地层中含有气体或液体时, 黏弹性效应更加突出. 忽略黏弹性的波场模拟易导致波场描述失真, 不利于工程技术中的应用^[1-4], 因此有必要开展黏弹性介质波动理论及波场数值模拟的研究.

在岩石物理中, 品质因子 Q 用于计算应力与应变之间的相位差, 是度量地震波衰减特征的参数. Liu 等^[5]利用广义标准线性体建立了不依赖频率的 Q 模型, 解释了地震波能量衰减和相位畸变的原因, 理论上 Q 值与实际介质的匹配度取决于线性体的数目和组合方式^[6,7]. Kjartansson^[8]在衰

减系数和频率成线性关系的假设下建立了常 Q 模型, 由于频散关系的数学形式简单, 在地震资料处理中得到了广泛关注. 从常 Q 模型的本构关系出发, Carcione 等^[9,10]推导了黏弹性介质波动方程, 并采用 Grünwald-Letnikov 近似实现了地震波场数值模拟, 由于方程中分数阶时间微分项的计算依赖于历史时刻波场, 因此需要保存全时程波场, 计算成本较高. 虽然短时截断法和内部变量法能降低内存的占用^[11,12], 但依然难以应对大尺度模型. Yang 和 Zhu^[13]推导了分数阶拉普拉斯算子的黏弹性介质波动方程, 并应用于地下构造成像中.

波动方程是双曲线偏微分方程^[14-17], 常用的数值模拟方法有伪谱法、有限元法和有限差分法. 有限差分法无需数据域的转换, 且计算效率高, 是波动方程数值模拟中最常用的算法^[18,19], 为了在相同计算量的情况下提高数值模拟精度, 先后发展了

* 国家自然科学基金 (批准号: 41930431, 41804133)、中央支持地方高校改革发展资金人才培养支持计划 (批准号: 140119001) 和黑龙江省普通本科高等学校青年创新人才培养计划 (批准号: UNPYSCT-2020149) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhidaoy90@163.com

交错网格和旋转交错网格^[20,21]. 伪谱法通过 Fourier 变换实现, 相当于无限阶差分算子精度, 计算效率不及有限差分法^[22]. 有限元法的优势是网格剖分灵活, 能模拟复杂介质中的波传播, 但计算成本较高^[23].

本文基于 Kjartansson 提出的常 Q 模型, 建立了黏弹性介质波动方程, 研究了波动方程的数值模拟方法, 通过数值实验分析了品质因子 Q 对波场振幅、相位和频带的影响.

2 波动方程建立

在 Kjartansson^[8] 提出的常 Q 模型中, 模量 $M(\omega)$ 在频率域的形式为

$$M(\omega) = i^{2\gamma} \omega^{2\gamma} \omega_0^{-2\gamma} M_0, \quad (1)$$

其中 ω_0 是参考频率; M_0 是模量; ω 是频率; i 是虚数单位; γ 与品质因子 Q 相关, 可通过下式确定^[8]:

$$\frac{1}{Q} = \tan(\pi\gamma). \quad (2)$$

式中, $\pi\gamma$ 的物理意义是介质应力和应变之间相位差.

在地下黏弹性介质中波速 v_c 与量 $M(\omega)$ 的关系为^[24]

$$v_c = \sqrt{\frac{M(\omega)}{\rho}}, \quad (3)$$

式中, ρ 为介质密度. 相速度 v_p 可利用下式计算,

$$v_p = \frac{\omega}{k_R}, \quad (4)$$

式中, k_R 是波数 k 的实部, 利用等价关系 $i = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2)/2$, k 的实部 k_R 和虚部 k_I 根据 (5) 式和 (6) 式确定,

$$k_R = \operatorname{Re} \left(\frac{\omega}{v_c} \right) = \omega^{1-\gamma} \omega_0^\gamma v_0^{-1}, \quad (5)$$

$$k_I = \operatorname{Im} \left(\frac{\omega}{v_c} \right) = -\tan \left(\frac{\gamma\pi}{2} \right) \omega^{1-\gamma} \omega_0^\gamma v_0^{-1}, \quad (6)$$

式中, Re 和 Im 分别为取实部和虚部算子; $v_0 =$

$\sqrt{M_0/\rho} \cos^{-1}(\gamma\pi/2)$, 是在参考频率处的相速度. 将 (5) 式代入 (4) 式可得

$$v_p = v_0 \omega^\gamma \omega_0^{-\gamma}. \quad (7)$$

类似于弹性介质, 在黏弹性介质中波的频散关系可表示为

$$\frac{\omega^2}{v_c^2} = k^2. \quad (8)$$

将 (1) 式和 (3) 式代入 (8) 式有

$$\omega^{2-2\gamma} \omega_0^{2\gamma} \cos(\gamma\pi) - i \omega^{2-2\gamma} \omega_0^{2\gamma} \sin(\gamma\pi) = v^2 k^2. \quad (9)$$

式中, $v^2 = M_0/\rho$, v 是 Q 趋于无穷大时的相速度, 即介质趋于弹性介质时波的相速度. 若将 (9) 式从频率-波数域变换至时间-空间域, 可得含有分数阶时间微分的波动方程, 虽然采用 Grünwald-Letnikov 近似能实现分数阶微分项的计算, 但该方法需保存历史时间波场. 为此, 将 (9) 式等号左侧第一项进行多项式拟合有

$$\omega^{2-2\gamma} \omega_0^{2\gamma} \cos(\gamma\pi) = a_1 \omega^2 + a_2 \omega + a_3. \quad (10)$$

式中, a_1 , a_2 和 a_3 为拟合系数, 表 1 提供了参考频率为 50 Hz 时不同品质因子 Q 对应的拟合系数. 当 $Q = 30$ 时, (10) 式拟合曲线如图 1 所示, 图中实心点是理论数值, 实线为拟合曲线, 以上拟合均是将频率转换至圆频率所得.

(9) 式中等号左侧第二项中 $i\omega$ 经 Fourier 变换是时间的一阶微分算子, 为了使剩余的 $\omega^{1-2\gamma}$ 易于

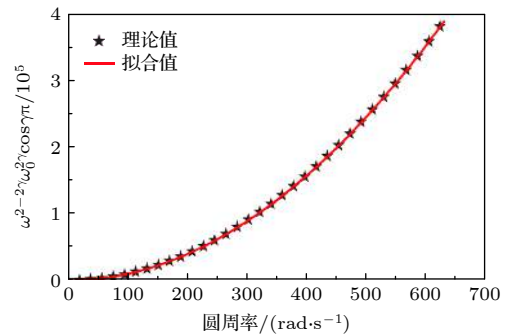


图 1 拟合曲线 ($Q = 30$)

Fig. 1. Fitting curve ($Q = 30$).

表 1 不同 Q 值拟合系数
Table 1. Fitting coefficients of different Q values.

Q	5	10	20	30	60	100	5000
a_1	0.8144	0.9081	0.9545	0.9698	0.9850	0.991	0.9998
a_2	58.452	30.728	15.662	10.499	5.276	3.1716	0.0636
a_3	-2078.2	-1133.1	-587.58	-396.08	-200.14	-120.57	-2.4255

计算, 先对 $k^{2\gamma-1}$ 进行处理,

$$k^{2\gamma-1} = (k_R + ik_I)^{2\gamma-1} = k_R^{2\gamma-1} \left(1 + i \frac{k_I}{k_R}\right)^{2\gamma-1}. \quad (11)$$

将 (5) 式和 (6) 式代入 (11) 式得

$$k^{2\gamma-1} = k_R^{2\gamma-1} \left(1 - i \tan \frac{\gamma\pi}{2}\right)^{2\gamma-1}. \quad (12)$$

对于弱衰减介质有 $\gamma \ll 1$, 利用 Taylor 展开可将 $[1 - i \tan(\gamma\pi/2)]^{2\gamma-1}$ 表示为

$$\left(1 - i \tan \frac{\gamma\pi}{2}\right)^{2\gamma-1} = 1 + i \frac{\gamma\pi}{2} + o(r)^2. \quad (13)$$

忽略 (13) 式的高阶无穷小量后代入 (12) 式有

$$k_R^{1-2\gamma} = k^{1-2\gamma} \left(1 + i \frac{\gamma\pi}{2}\right). \quad (14)$$

(4) 式的等价形式为

$$\omega^{1-2\gamma} = v_p^{1-2\gamma} k_R^{1-2\gamma}. \quad (15)$$

根据 (7) 式, 当参考频率接近于波的频率时, 有 $v_p \approx v_0$, 将 (14) 式代入 (15) 式为

$$\omega^{1-2\gamma} = v_0^{1-2\gamma} k^{1-2\gamma} \left(1 + i \frac{\gamma\pi}{2}\right). \quad (16)$$

将 (10) 式和 (16) 式代入 (9) 式有

$$\begin{aligned} & a_1 \omega^2 + a_2 \omega + a_3 - i\tau \omega k^{1-2\gamma} \\ & + \gamma \pi \tau \omega k^{1-2\gamma} / 2 = v^2 k^2, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\tau = \omega_0^{2\gamma} v_0^{1-2\gamma} \sin(\gamma\pi)$.

$$\begin{aligned} & F \left[\begin{matrix} \omega^2 & \omega & i\omega & k^\xi \end{matrix} \right] \\ & = \left[\begin{matrix} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} & -i\frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial t} & (-\nabla^2)^{\frac{\xi}{2}} \end{matrix} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

根据 Fourier 变换的微分性质, (18) 式给出了算子在频率-波数域和时间-空间域的对应关系, F 为 Fourier 变换算子, ∇ 是拉普拉斯算子. 将 (17) 式乘频率-波数域波场后, 经域转换可得时间-空间域地下黏弹性介质波动方程:

$$\begin{aligned} & a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + i a_2 \frac{\partial u}{\partial t} - a_3 u + \tau (-\nabla^2)^{0.5-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} \\ & + i \frac{\gamma \pi \tau (-\nabla^2)^{0.5-\gamma}}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = v^2 \nabla^2 u, \end{aligned} \quad (19)$$

(19) 式中, u 是复数波场, 取其实际部即物理意义上的波场. 为了在数值模拟中研究波动方程中各项对波场的主控因素, 可将 (19) 式改写为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \lambda \left[(a_1 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + i a_2 \frac{\partial u}{\partial t} - a_3 u \right] \\ & + \mu \left[\tau (-\nabla^2)^{0.5-\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\gamma \pi \tau (-\nabla^2)^{0.5-\gamma}}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ & = v^2 \nabla^2 u. \end{aligned} \quad (20)$$

(20) 式中参数 λ 和 μ 的取值为 1 或 0, 两参数组合可形成四个方程, 当 $\lambda = 1$, $\mu = 1$ 时, (20) 式和 (19) 式等价; 当 $\lambda = 0$, $\mu = 0$ 时, (20) 式退化为声波方程.

3 波场递推公式

本文采用二阶精度有限差分法求解 (19) 式中的时间微分项, 其离散格式为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^n = \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}. \quad (22)$$

式中, n 为时间节点; Δt 是时间采样间隔.

(19) 式中的空间微分项采用伪谱法计算, 先通过 Fourier 变换将时间-空间域波场转换至波数域, 与波数 k 和拉普拉斯算子的阶数作用后, 再经反 Fourier 变换即可实现求解^[25,26]. 以上过程可用 (23) 式表示:

$$(-\nabla^2)^\xi u = F^{-1} [k^{2\xi} F(u)]. \quad (23)$$

结合 (21) 式、(22) 式和 (23) 式, 波动方程 (19) 式的波场递推公式为

$$\begin{aligned} u^{n+1} = & \frac{\Delta t^2}{a_1} \left\{ v^2 F^{-1} [-K^2 F(u)] - i \left(a_2 \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right. \right. \\ & + \frac{\gamma \pi \tau}{2} F^{-1} \left(K^{1-2\gamma} F \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right) \right) \Bigg) \\ & + a_3 u^n - \tau F^{-1} \left(K^{1-2\gamma} F \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right) \right) \Bigg\} \\ & + 2u^n - u^{n-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

4 数值实验

为研究地下黏弹性介质中波的传播规律, 设计水平和垂直方向的距离为 3.8 km 的均质模型, 空间网格间距为 10 m, 波在参考频率 50 Hz 处的相速度为 2216 m/s. 利用主频是 20 Hz 的 Ricker 子波作为激发震源, 其振幅峰值为 1 Pa, 时间采样间

隔 1 ms, 子波的函数形式为

$$\text{Ricker}(t) = [1 - 800\pi^2(t - 0.1)^2]e^{-400\pi^2(t-0.1)^2}. \quad (25)$$

震源位于模型中央位置, 距离震源 0.6 km 处布置检波器, 数值实验模型如图 2 所示. 设置模型品质因子 Q 为 20, 编程验证 (19) 式的有效性和数值模拟方案的可行性. 图 3 为 600 ms 的波场, 由于介质中不含波阻抗界面, 因此波场特征是外扩的圆. 在模型垂直方向 1.9 km 处, 水平方向 0—3.8 km 范围分别提取 500 和 600 ms 波场, 如图 4 所示, 随着时间推移, 波场的能量由 1.9 km 处向外传递,

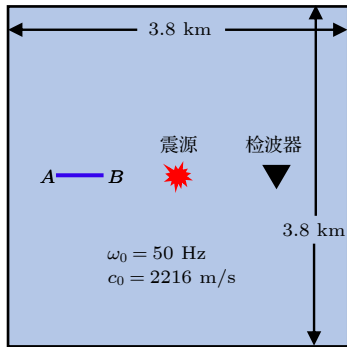


图 2 数值模拟模型

Fig. 2. Numerical simulation model.

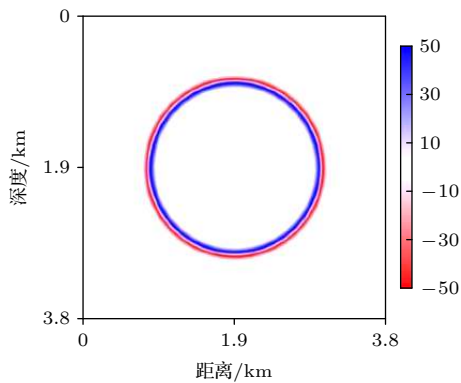


图 3 600 ms 波场快照

Fig. 3. Wavefield snapshot at 600 ms.

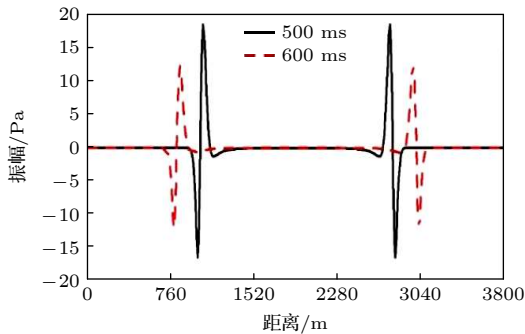


图 4 不同时刻的 1 维波场

Fig. 4. One dimensional wavefield at different times.

受到介质的吸收衰减, 波场的振幅明显变小.

介质的黏弹性不仅衰减波场的振幅, 而且影响相位和频带. 现采用不同 Q 值实施波场模拟, 检波器从震源激发时开始采集信息, 直至 1000 ms 结束, 在模拟区域外侧添加吸收衰减层以避免边界产生虚假反射. 图 5 是在相同传播路径下, 不同 Q 值所对应的记录, 由于检波器接收的信息集中在 380 ms, 排除无效信息仅对 200 至 600 ms 记录显示, Q 值由 30 变为 10 后, 波场的振幅明显减小, 相位发生畸变. 图 5 中两记录的归一化频谱如图 6 所示, Q 值影响了记录频带的特征, 主频由初始的 20 Hz 分别降至 15 和 10 Hz. 在 Kjartansson 提出的常 Q 模型中, Q 的减小对应着应力和应变之间的滞后变大, 进而介质对波场的吸收衰减变强, 此外该模型的假设是衰减系数与波场的频率成正比关系, 即低频成分的衰减比高频成分弱, 通过数值实验表明, 建立的波动方程能够准确地描述波场的衰减规律, 且数值模拟方案可行.

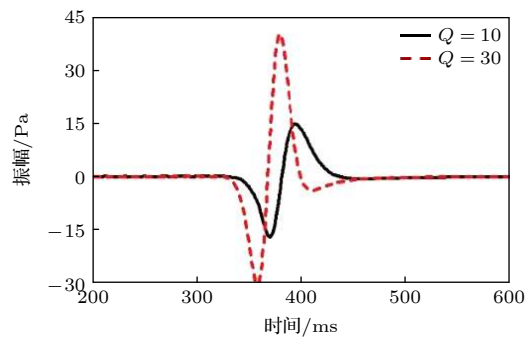


图 5 波场记录

Fig. 5. Wavefield record.

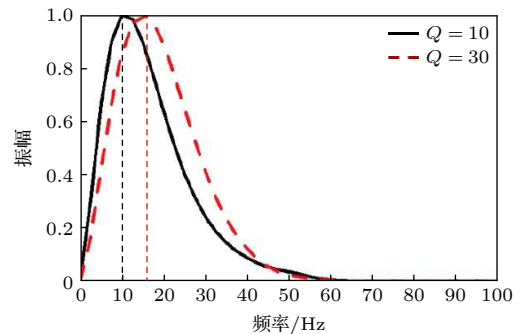


图 6 记录频谱

Fig. 6. Record spectrum.

为了对比分析 (20) 式中各项对波场的主控因素, 采用控制参数 λ 和 μ 的方式对方程实施数值模拟, 图 7(a)—(d) 分别对应 $\lambda = 0, \mu = 0, \lambda = 0,$

$\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$ 和 $\lambda = 1$, $\mu = 1$ 的截取波场, 图 7(a) 与图 7(b) 和图 7(c) 的差异分别在于振幅和相位, 图 7(a) 和图 7(d) 在振幅和相位上均有差异. 基于以上研究, (20) 式中等号左侧第二项主控相位畸变, 第三项主控振幅衰减. 图 8 为 4 个波场的局部 (图 2 中 A 点至 B 点) 单道显示, 该图展示了弹性介质波场经振幅衰减和相位畸变后演变为黏弹性介质波场的过程.

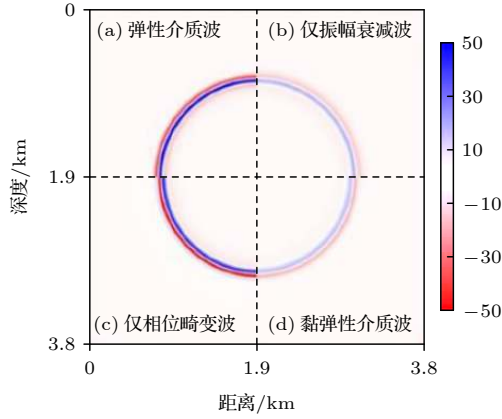


图 7 组合波场

Fig. 7. Combined wavefield.

为了测试数值方法对于复杂模型的有效性, 进行了波场数值模拟. 采用模型在水平和垂直方向的网格点数分别为 401 和 301, 网格间距为 10 m, 即

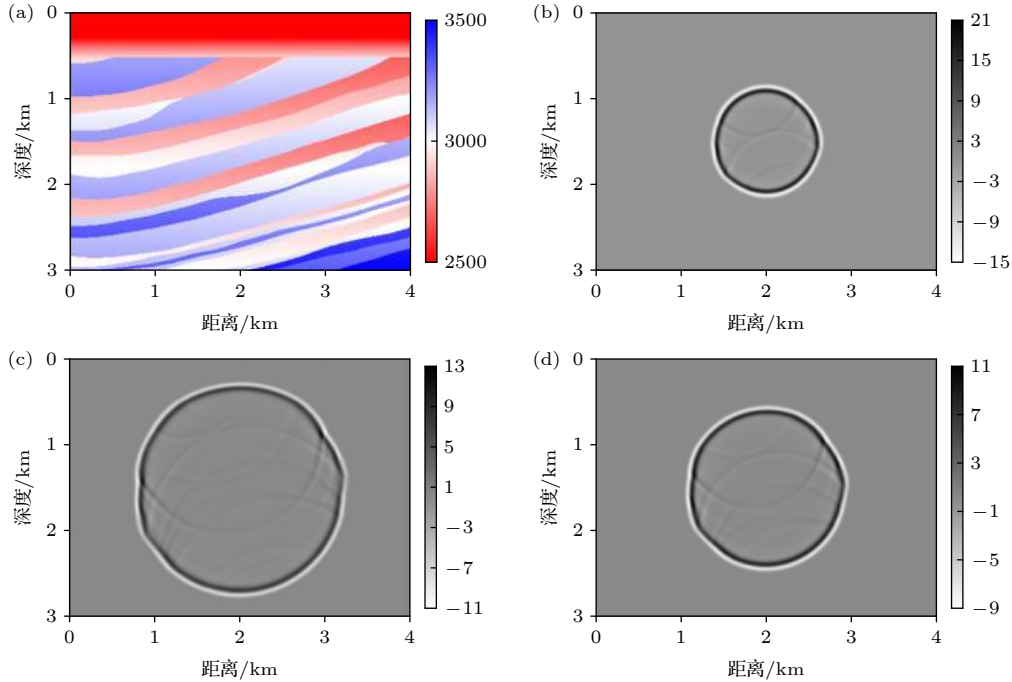


图 9 复杂模型波场模拟 (a) 速度模型; (b) 0.3 s 波场; (c) 0.4 s 波场; (d) 0.5 s 波场

Fig. 9. Wavefield simulation for the complex model: (a) Velocity; (b) wavefield at 0.3 s; (c) wavefield at 0.4 s; (d) wavefield at 0.5 s.

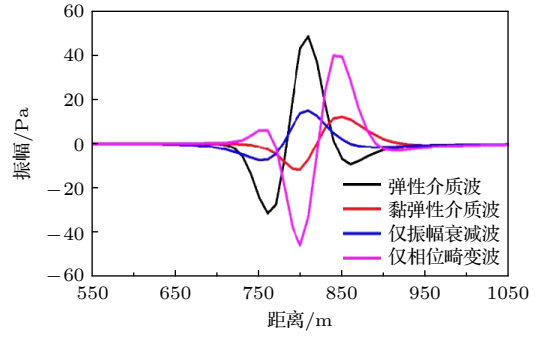


图 8 部分波场

Fig. 8. Part wavefield.

水平距离为 4 km, 垂直深度为 3 km, 模型速度分布在 2500 至 3500 m/s 区间, 以层状构造为主, 如图 9(a) 所示, 品质因子 Q 取 25. 震源布置在模型中央, 三个不同时刻的波场如图 9(b),(c) 所示. 随着时间递增, 波场能量逐步外扩, 由于介质的黏滞性效应, 波场振幅出现了衰减特征. 通过测试表明, 构建的黏弹性介质波动方程能刻画波传播至波阻抗界面所产生的透射波和反射波.

5 结 语

本文在常 Q 理论基础上, 建立了黏弹性介质波动方程, 该方程能解耦振幅衰减和相位畸变效应, 有助于分析介质中的复杂波场现象, 可为地震

资料处理提供理论基础. 需要注意的是方程中拉普拉斯算子的阶数是 Q 的函数, 伪谱法仅能处理 Q 场为常数的情况, 对于 Q 场较平滑的介质, 可将 Q 场的平均应用至全局. 为了应对 Q 场具有强非均质性的波场模拟, 如何将 Q 从拉普拉斯算子的阶数中分离值得深入研究.

参考文献

- [1] Yang P, Brossier R, Metivier L 2018 *SIAM J. Sci. Comput.* **40** B1101
- [2] Chen H, Zhou H, Yao Y 2020 *Geophysics* **85** S169
- [3] Keating S, Innanen K 2020 *Geophysics* **85** R397
- [4] Zhang, W, Shi Y 2019 *Geophysics* **84** S95
- [5] Liu H P, Anderson D L, Kanamori H 1976 *Geophys. J. Int.* **47** 41
- [6] Emmerich H, Korn M 1987 *Geophysics* **52** 1252
- [7] Zhu T, Carcione J M, Harris J M 2013 *Geophys. Prospect.* **61** 931
- [8] Kjartansson E 1979 *Geophys. Prospect.* **84** 4737
- [9] Carcione J M 2008 *Geophysics* **74** T1
- [10] Carcione J M, Cavallini F, Mainardi F, Hanyga A 2002 *Pure Appl. Geophys.* **159** 1719
- [11] Lu J F, Hanyga A 2004 *Geophys. J. Int.* **159** 688
- [12] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (California: Academic Press) pp270–217
- [13] Yang J, Zhu H 2018 *Geophys. J. Int.* **215** 1064
- [14] Chen X W, Zhang R C, Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **16** 282
- [15] Dorodnitsyn V, Kozlov R 2010 *J. Eng. Math.* **66** 253
- [16] Fang G, Zhang B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 154502 (in Chinese) [方刚, 张斌 2013 物理学报 **62** 154502]
- [17] Li H X, Tao C H, Liu C, Huang G N, Yao Z A 2020 *Chin. Phys. B* **29** 064301
- [18] Zhou C, Wang Q 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 239101 (in Chinese) [周聪, 王庆良 2015 物理学报 **64** 239101]
- [19] Zhang Z J, Wang G J, Harris J M 1999 *Phys. Earth Planet. Inter.* **114** 25
- [20] Dong L G, Ma Z T, Cao J Z 2000 *Chin. J. Geophys* **43** 856 (in Chinese) [董良国, 马在田, 曹景忠 2000 地球物理学报 **43** 856]
- [21] Meng L W, Cheng G L, Zhang M M, Shang J H 2017 *J. Naval Univ. Eng.* **29** 57 (in Chinese) [孟路稳, 程广利, 张明敏, 尚建华 2017 海军工程大学学报 **29** 57]
- [22] Du Q, Liu L, Sun J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6143 (in Chinese) [杜启振, 刘莲莲, 孙晶波 2007 物理学报 **56** 6143]
- [23] Tang C A 1997 *Chin. J. Rock Mech. Eng.* **4** 75 (in Chinese) [唐春安 1997 岩石力学与工程学报 **4** 75]
- [24] Carcione J M 2014 *Wave Fields in Real Media* (Amsterdam: Elsevier Science) p75
- [25] Chen W, Holm S 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **115** 1424
- [26] Carcione J M 2010 *Geophysics* **75** A53

Wave equation for underground viscoelastic media and wavefield numerical simulation^{*}

Song Li-Wei^{1)†} Shi Ying²⁾ Chen Shu-Min³⁾ Ke Xuan²⁾
Hou Xiao-Hui¹⁾ Liu Zhi-Qi²⁾

1) (*School of Physics and Electronic Engineering, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China*)

2) (*School of Earth Sciences, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China*)

3) (*Exploration and Development Research Institute of Daqing Oilfield Co Ltd, Daqing 163712, China*)

(Received 2 January 2021; revised manuscript received 25 January 2021)

Abstract

The energy of wavefield is gradually attenuated in all real materials, which is a fundamental feature and more obvious in the media containing liquid and gas. Because the viscosity effect is not considered in the classical wave theory, the actual wavefield is different from the simulated scenario based on the assumption of complete elasticity so that the application of wavefield does not meet the expectations in engineering technology, such as geophysical exploration. In the rock physics field, the well-known constant- Q theory gives a linear description of attenuation and Q is regarded as independent of the frequency. The quality factor Q is a parameter for calculating the phase difference between stress and strain of the media, which, as an index of wavefield attenuation behavior, is inversely proportional to the viscosity. Based on the constant- Q theory, a wave equation can be directly obtained by the Fourier transform of the dispersion relation, in which there is a fractional time differential operator. Therefore, it is difficult to perform the numerical simulation due to memory for all historical wavefields. In this paper, the dispersion relation is approximated by polynomial fitting and Taylor expansion method to eliminate the fractional power of frequency which is uncomfortably treated in the time domain. And then a complex-valued wave equation is derived to characterize the propagation law of wavefield in earth media. Besides the superiority of numerical simulation, the other advantage of this wave equation is that the dispersion and dissipation effects are decoupled. Next, a feasible numerical simulation strategy is proposed. The temporal derivative is solved by the finite-difference approach, moreover, the fractional spatial derivative is calculated in the spatial frequency domain by using the pseudo-spectral method. In the process of numerical simulation, only two-time slices, instead of the full-time wavefields, need to be saved, so the demand for data memory significantly slows down compared with solving the operator of the fractional time differential. Following that, the numerical examples prove that the novel wave equation is capable and efficient for the homogeneous model. The research work contributes to the understanding of complex wavefield phenomena and provides a basis for treating the seismology problems.

Keywords: viscoelastic media, wave equation, numerical simulation, pseudo-spectral method

PACS: 91.30.Ab, 91.60.Qr

DOI: 10.7498/aps.70.20210005

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41930431, 41804133), the Local Universities Reformation and Development Personnel Training Supporting Project from Central Authorities, China (Grant No. 140119001), and the University Nursing Program for Young Scholars with Creative Talents in Heilongjiang Province, China (Grant No. UNPYST-2020149).

[†] Corresponding author. E-mail: zhidao90@163.com