

修正的变分迭代法在四阶Cahn-Hilliard方程和BBM-Burgers方程中的应用

钟鸣 田守富 时怡清

**Application of the modified variational iteration method in the fourth-order Cahn-Hilliard equation BBM-Burgers equation**

Zhong Ming Tian Shou-Fu Shi Yi-Qing

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 190202 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20202147

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202147>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

基于局部加密纯无网格法非线性Cahn-Hilliard方程的模拟

Simulation of nonlinear Cahn-Hilliard equation based on local refinement pure meshless method

物理学报. 2020, 69(8): 080202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191829>

四阶色散非线性薛定谔方程的明暗孤立波和怪波的形成机制

Study on the generation mechanism of bright and dark solitary waves and rogue wave for a fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation

物理学报. 2020, 69(1): 010502 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191384>

非线性波动方程的新数值迭代方法

New numerical iterative method for nonlinear wave equations

物理学报. 2020, 69(3): 034301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191440>

非线性薛定谔方程的高阶分裂改进光滑粒子动力学算法

Numerical study of nonlinear Schrödinger equation with high-order split-step corrected smoothed particle hydrodynamics method

物理学报. 2019, 68(9): 090203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190169>

任意阶标度分形格分抗与非正则格型标度方程

Scaling fractal-lattice fractance approximation circuits of arbitrary order and irregular lattice type scaling equation

物理学报. 2018, 67(7): 070202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171671>

基于分裂格式有限点集法对孤立波二维非线性问题的模拟

Simulation of two-dimensional nonlinear problem with solitary wave based on split-step finite pointset method

物理学报. 2019, 68(14): 140203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190340>

# 修正的变分迭代法在四阶 Cahn-Hilliard 方程和 BBM-Burgers 方程中的应用\*

钟鸣 田守富† 时怡清

(中国矿业大学数学学院, 徐州 221100)

(2020 年 12 月 17 日收到; 2021 年 5 月 24 日收到修改稿)

变分迭代法是一种基于变分原理, 具有高数值精度的数值格式, 目前已广泛应用于各类强非线性孤立波方程的数值求解中. 本文利用修正的变分迭代法对两类非线性方程进行研究. 该格式是对原数值方法的一种改进, 即在变分项前引入了参数  $h$ . 通过定义误差函数的离散二范数并在定义域内绘出  $h$ -曲线, 从而确定出使误差达到最小的  $h$ , 再返回原迭代过程进行求解. 同时, 参数的引入也扩大了原数值解的收敛域, 在迭代次数一定的情况下达到了数值最优. 在数值实验中, 将上述结果应用于四阶的 Cahn-Hilliard 方程和 Benjamin-Bona-Mahoney-Burgers 方程. 对于四阶的 Cahn-Hilliard 方程, 普通的变分迭代法绝对误差在  $10^{-1}$  左右, 经过修正后, 绝对误差降为  $10^{-4}$ , 而且修正后的方法扩大了原数值解的收敛域. 对于 Benjamin-Bona-Mahoney-Burgers 方程, 利用带有辅助参数的变分迭代法将数值解的精度提高到  $10^{-3}$ , 对真解的逼近效果优于原始的变分迭代法. 此数值方法也为其他强非线性孤立波微分方程的数值求解提供了方法和参考.

**关键词:** 修正的变分迭代法, 非线性孤立波方程, 四阶 Cahn-Hilliard 方程, Benjamin-Bona-Mahoney-Burgers 方程

**PACS:** 02.60.Cb, 02.60.Jh

**DOI:** 10.7498/aps.70.20202147

## 1 引言

非线性科学作为现代数学物理的一个重要组成, 具有广泛的分支. 如非线性场论<sup>[1]</sup>、玻色-爱因斯坦凝聚物<sup>[2]</sup>、孤立波理论<sup>[3,4]</sup>、非线性光学<sup>[5,6]</sup>等. 而非线性发展方程本身的物理背景和孤立波解的特殊性质使得孤子理论成为当前科学发展的前沿和热点问题. 目前, 已经发展出了多种多样的用来处理各种可积方程的解析方法, 如 Fokas 方法<sup>[7,8]</sup>、反散射变换<sup>[9-11]</sup>、达布变换<sup>[12,13]</sup>等. 最近, 光孤子的出现也引起了一大批学者的关注<sup>[14-17]</sup>. 但是由于发展型方程的强非线性, 解析方法不总是适用的. 因此数值方法的出现大大促进了孤子理论和

非线性物理的发展. 如杨建科<sup>[18]</sup>提出的平方迭代算法来进行孤立波的稳定性分析得到了广泛的应用; Bao 和 Yin<sup>[19]</sup>利用四阶时间分裂傅里叶谱方法研究了 Diarc 方程, 也被推广到其他非线性方程中; Antoine 等<sup>[20]</sup>使用数值方法研究了非线性薛定谔方程的动力学性质; Cockburn 和 Shu<sup>[21]</sup>以及 Jiang 和 Shu<sup>[22]</sup>率先提出了间断有限元和加权无本质振荡 (WENO) 等方法, 极大丰富了数值求解偏微分方程的格式.

本文要介绍的变分迭代法与上述几种传统的数值求解方法相比, 有着求解过程灵活、收敛速度快、数值精度高等优势. He<sup>[23]</sup>首次提出了变分迭代法, 并对变分迭代方法进行了非常清晰的讨论. 同时该方法也被推广到各类积分-微分方程<sup>[24,25]</sup>的

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11975306) 和江苏省高校自然科学基金项目 (批准号: BK20181351) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [sftian@cumt.edu.cn](mailto:sftian@cumt.edu.cn)

数值求解中. Hesameddini 和 Latifizadeh<sup>[26]</sup> 使用 Laplace 变换重构了变分迭代算法; Salkuyeh<sup>[27]</sup> 证明了变分迭代算法的收敛性. 至此, 变分迭代法的基本理论已经成形. Noor 和 Mohyud-Din<sup>[28]</sup> 利用 He's 多项式对变分迭代法进一步改进, 该方法将变分迭代法与同伦摄动法<sup>[29]</sup> 进行结合, 大大提高了数值精度; Zayed 和 Rahman<sup>[30]</sup> 利用改进后的变分迭代法研究了 KdV 方程和 Wu-Zhang 方程的数值解, 说明了变分迭代法在处理高维问题上的优势.

本文第 2 节简要介绍原始变分迭代法的原理以及求解过程; 第 3 节重点介绍带有参数摄动的修正变分迭代法<sup>[31]</sup>, 该方法通过在变分项前引入参数  $h$ , 从而对原始数值算法进行改进, 提高了格式的收敛性; 第 4 节和第 5 节将上述方法应用到两类强非线性孤立波微分方程中, 其逼近效果理想, 且与问题的物理性质兼容.

## 2 变分迭代法

考虑一般的微分方程

$$L[u(x)] + N[u(x)] = f(x), \quad (1)$$

其中  $L[u(x)]$  和  $N[u(x)]$  分别代表线性项和非线性项,  $f(x)$  为已知函数. 变分迭代法的主要思想是为 (1) 式构造一个校正泛函如下.

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_0^x \lambda(\eta) \{L[u_k(\eta)] + N[\tilde{u}_k(\eta)] - f(\eta)\} d\eta, \quad (2)$$

其中  $\lambda(\eta)$  称为广义的拉氏乘子, 可以用变分理论最佳识别. 对 (2) 式两边同时对  $u_k(x)$  取变分  $\delta$ , 即

$$\delta u_{k+1}(x) = \delta u_k(x) + \delta \int_0^x \lambda(\eta) \{L[u_k(\eta)] + N[\tilde{u}_k(\eta)] - f(\eta)\} d\eta, \quad (3)$$

其中  $\tilde{u}_k(\eta)$  称为变分限制项, 即  $\delta \tilde{u}_k(\eta) = 0$ .

简而言之, 方程 (1) 的求解过程如下, 给定初值  $u_0(x)$ ,

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \int_0^x \lambda(\eta) \{L[u_k(\eta)] + N[\tilde{u}_k(\eta)] - f(\eta)\} d\eta, \quad (4)$$

其中  $k = 0, 1, \dots$ , 进行迭代计算.

上述通过迭代算法得到解的方法便称为变分迭代法.

## 3 修正的变分迭代法

可以将未知的辅助参数插入到变分迭代算法 (4) 式中, 则算法修正如下:

给定初值  $u_0(x)$ , 通过以下迭代式进行计算

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + h \int_0^x \lambda(\eta) \{L[u_k(\eta)] + N[u_k(\eta)] - f(\eta)\} d\eta, \quad (5)$$

其中  $k = 0, 1, \dots$ . 通常会采取截断解  $u_k(x, t, h)$ , 其中含有辅助参数  $h$ , 它保证了数值精度、收敛速度以及收敛域, 这种方法被称为带有辅助参数的变分迭代算法. 该格式的最大优点是简便, 并且能在较大的收敛域中对原方程进行近似. 通常, 可通过误差函数在给定的区域内根据二范数画出  $h$  曲线, 从而确定出  $h$  的最佳取值, 再将  $h$  代入到迭代算法 (5) 式中进行求解.

## 4 四阶 Cahn-Hilliard 方程

考虑如下的四阶 Cahn-Hilliard 方程:

$$u_t + \{b(u) [\gamma u_{xxx} - (\psi'(u))_x]\}_x = 0, \quad (x, t) \in (0, 4) \times (0, 1), \quad (6)$$

同时给定初值  $u(x, 0) = u_0(x)$ . 其中  $\psi(u)$  是关于  $u$  的光滑函数, 一般为非线性. 四阶 Cahn-Hilliard 方程是 Cahn 和 Hilliard<sup>[32]</sup> 在 1958 年研究二元合金的分离现象时首次提出的. 随着现代科学技术的不断发展, 该方程的应用越来越广泛, 例如多相流中的界面动力学. 一些学者利用经典的数值方法对四阶 Cahn-Hilliard 方程进行求解, 例如有限元方法<sup>[33]</sup>、间断有限元法<sup>[34]</sup>、多重网格法<sup>[35]</sup>. 本文的主要工作是通过修正的变分迭代法对四阶 Cahn-Hilliard 方程进行数值求解, 并且与原始的格式进行了对比.

在数值实验中, 取  $b(u) = 1$ ,  $\psi(u) = \frac{3}{2}(1 - u^2)$ ,  $\gamma = 4$ ,  $u_0(x) = \sin(x) - \sin(x/2)$ . 该方程的精确解为  $u(x, t) = e^{-t} \sin(x) - e^{t/2} \sin(x/2)$ . 通过原始算法, 得出下述迭代公式

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} + 3 \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^4 u_n(x, s)}{\partial x^4} \right] ds, \quad (7)$$

取上述初值后便可以进行计算求解. 通过迭代求解, 图 1 给出了  $u_{10}(x, t)$  的绝对误差图像.

由图 1 可以看出, 在  $x$  和  $t$  较大时, 误差会偏大. 如果继续执行迭代过程, 则可以提高精度; 当  $n$  趋向无穷大时, 可以获得精确解.

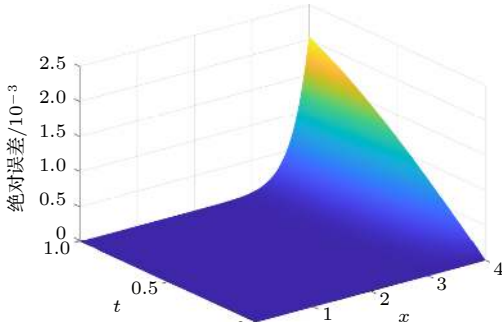


图 1 原始算法的误差

Fig. 1. Error of the original algorithm.

利用带有辅助参数的变分迭代法, 得出以下迭代公式

$$u_{n+1}(x, t, h) = u_n(x, t, h) - h \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} + 3 \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^4 u_n(x, s)}{\partial x^4} \right] ds. \quad (8)$$

下面通过方程定义误差函数如下:

$$r_n(x, t, h) = \frac{\partial u_n(x, t, h)}{\partial t} + 3 \frac{\partial^2 u_n(x, t, h)}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^4 u_n(x, t, h)}{\partial x^4}. \quad (9)$$

为了找到一个合适的参数  $h$ , 图 2 给出了误差函数在离散网格上的二范数. 其中, 离散后的误差函数的二范数定义为

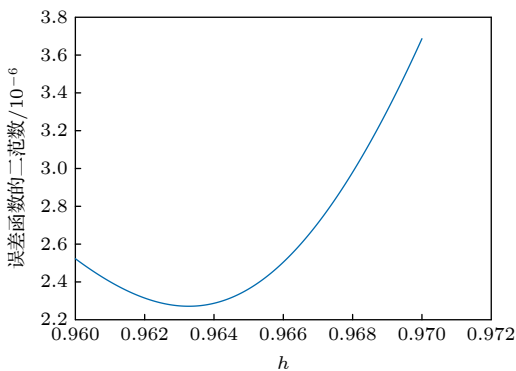


图 2  $h$ -曲线

Fig. 2.  $h$ -curve.

$$\frac{1}{400} \sum_{i=1}^{20} \sum_{j=1}^{20} r_{10} \left( \frac{i}{5}, \frac{j}{20}, h \right). \quad (10)$$

根据图 2, 选取  $h = 0.963575$  作为辅助参数, 将其代回到 (8) 式进行迭代求解. 结果与真解之间的绝对误差如图 3 所示. 可以看出, 带有辅助参数的变分迭代法不仅扩大了收敛域, 同时提高了数值精度.

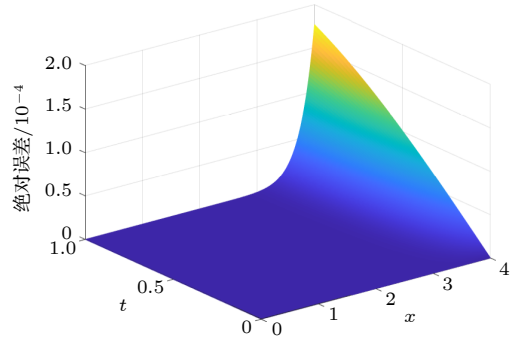


图 3 带有参数的算法的误差

Fig. 3. Error of algorithm with parameter.

图 4 和图 5 分别给出了区域内的真解与数值解图像.

图 6 中, 固定  $x = 4$ , 给出了数值解与真解的剖面图对比.

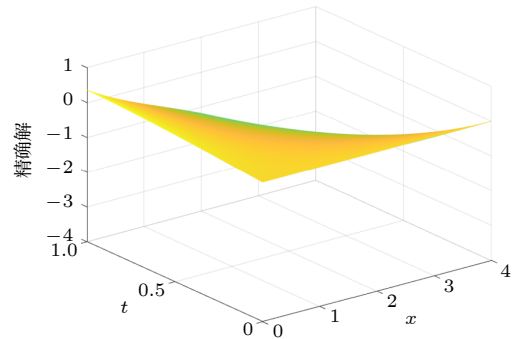


图 4 精确解

Fig. 4. Exact solution.

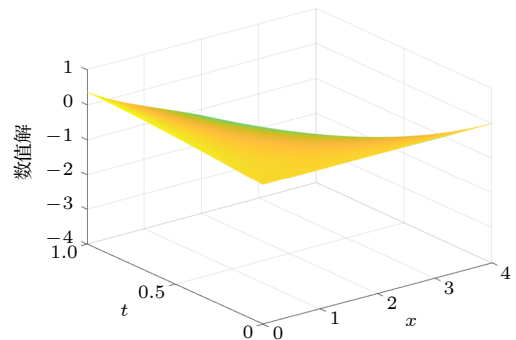


图 5 数值解

Fig. 5. Numerical solution.

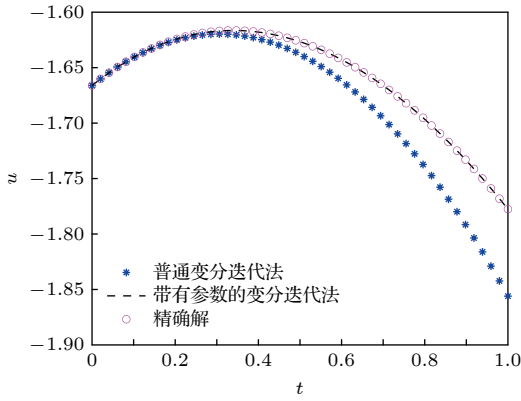


图 6  $x = 4$  时原方法和修正后方法的数值解以及真解的图像

Fig. 6. The numerical solution of the original method and the corrected method, as well as the image of the exact solution when  $x = 4$ .

### 5 Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBM-B) 方程

Benjamin-Bona-Mahony-Burgers(BBM-B) 方程表示为

$$u_t - \gamma u_{xxt} - \alpha u_{xx} + u_x + \beta uu_x = 0, \quad (x, t) \in (0, 2) \times (0, 2), \quad (11)$$

给定初值为  $u_0(x)$ . 其中  $\alpha, \beta, \gamma$  为已知常数. 上述方程由 Benjamin 等<sup>[36]</sup> 提出并研究, 用于研究均匀水槽中小振幅水波的行为. 其中,  $u(x, t)$  代表水平  $x$  方向上的流体速度. 作为特殊情况, 这些方程包括非线性扩散模型的 Burgers 方程和 nonlinear 分散介质中的长波模型的 BBM 方程. Karakoc 和 Bhowmik<sup>[37]</sup> 利用 B 样条的伽辽金有限元方法进行了数值模拟.

在本文的数值实验中, 取  $\alpha = 1, \beta = 12, \gamma = 1$ ,  $u_0(x) = -\frac{1}{5} \frac{2e^x + e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$ , 该问题有以下精确解:

$$u(x, t) = -\frac{1}{5} \frac{2e^{x+t/5} + e^{2(x+t/5)}}{[1 + e^{2(x+t/5)}]^2}. \quad (12)$$

原始的变分格式可以利用以下迭代公式进行求解:

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} + 12u_n(x, t) + 12u_n(x, t) \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} \right] ds. \quad (13)$$

图 7 给出了给定区域内  $u_4(x, t)$  的误差图像. 在  $x$  和  $t$  偏小的情况下, 误差不会增加很快; 但是

当  $x$  和  $t$  增大时, 误差会迅速增长到 10 左右. 从图 7 不难看出以下结论: 原始的变分迭代法对于真实解的逼近效果较差, 而且在增加迭代次数的情况下, 会出现数值不稳定的情况.

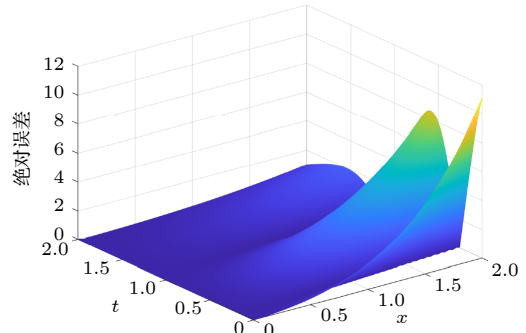


图 7 原始算法的误差

Fig. 7. Error of the original algorithm.

故下面采用参数摄动的变分迭代法进行数值求解. 迭代公式为

$$u_{n+1}(x, t, h) = u_n(x, t, h) - h \int_0^t \left[ \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} + 12u_n(x, t) + 12u_n(x, t) \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} \right] ds. \quad (14)$$

通过参数的引入, 本文通过误差函数定出  $h$  的最佳取值. 误差函数定义如下:

$$r_n(x, t, h) = \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_n(x, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x} + 12u_n(x, t) + 12u_n(x, t) \frac{\partial u_n(x, s)}{\partial x}. \quad (15)$$

引入节点后,  $h$  曲线给出了  $h$  的局部最佳取值. 定义误差函数的二范数如下:

$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} r_{10} \left( \frac{i}{5}, \frac{j}{5}, h \right). \quad (16)$$

从图 8 可以看出, 当  $h = 0.1037$  时, 整体误差达到极小值. 故在 (14) 式中取  $h = 0.1037$ , 进行迭代求解. 图 9 给出了改进得到的数值解与真解之间的误差, 不难看出带有参数摄动的数值格式大大降低了数值解的误差, 绝对误差降低到  $10^{-3}$ , 对真解的逼近达到了理想效果. 区域内不同点的真解和数值解值如表 1 所列. 图 10 和图 11 给出了数值解和真解的图像对比.

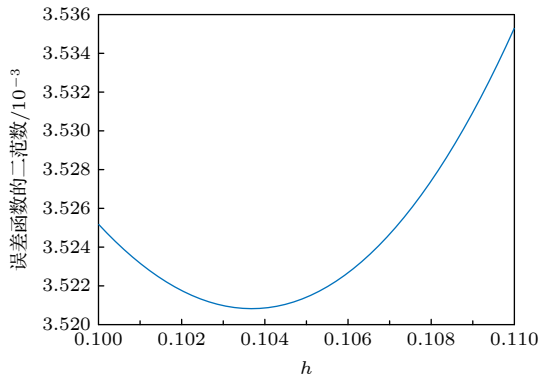


图 8  $h$ -曲线

Fig. 8.  $h$ -curve.

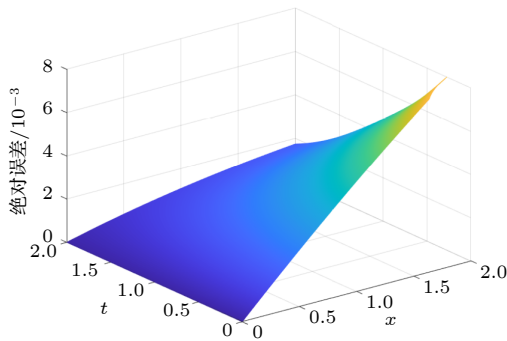


图 9 带有参数的算法的误差

Fig. 9. Error of algorithm with parameters.

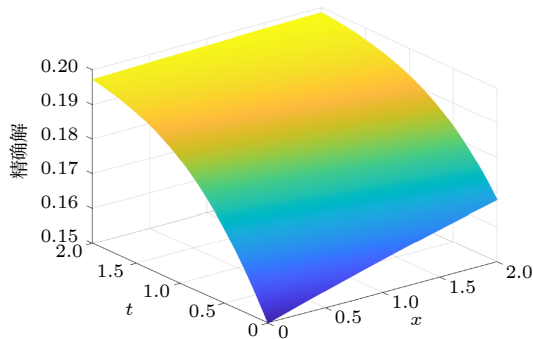


图 10 精确解

Fig. 10. Exact solution.

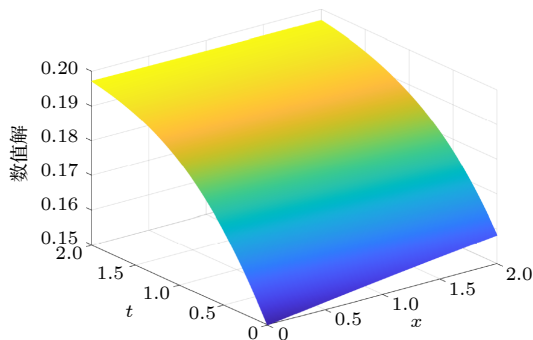


图 11 数值解

Fig. 11. Numerical solution.

表 1 不同点处真解与数值解对比

Table 1. Comparison of true and numerical solutions at different points.

$(x, t)$	原始数值解 $u_1$	修正数值解 $u_2$	精确解 $u$
(1, 0.2)	$-1.855 \times 10^{-1}$	$-1.855 \times 10^{-1}$	$-1.855 \times 10^{-1}$
(1, 0.4)	$-2.176 \times 10^{-1}$	$-1.857 \times 10^{-1}$	$-1.864 \times 10^{-1}$
(1, 0.6)	$-2.970 \times 10^{-1}$	$-1.860 \times 10^{-1}$	$-1.873 \times 10^{-1}$
(1, 0.8)	$-4.234 \times 10^{-1}$	$-1.862 \times 10^{-1}$	$-1.881 \times 10^{-1}$
(1, 1.0)	$-6.297 \times 10^{-1}$	$-1.863 \times 10^{-1}$	$-1.889 \times 10^{-1}$
(1, 1.2)	$-8.914 \times 10^{-1}$	$-1.866 \times 10^{-1}$	$-1.893 \times 10^{-1}$
(1, 1.4)	-1.212	$-1.868 \times 10^{-1}$	$-1.903 \times 10^{-1}$
(1, 1.6)	-1.590	$-1.870 \times 10^{-1}$	$-1.910 \times 10^{-1}$
(1, 1.8)	-2.033	$-1.872 \times 10^{-1}$	$-1.916 \times 10^{-1}$
(1, 2.0)	-2.429	$-1.874 \times 10^{-1}$	$-1.922 \times 10^{-1}$

## 6 结论

本文使用具有辅助参数的变分迭代算法可以解决四阶的 Cahn-Hilliard 方程和 BBM-B 方程的数值解问题. 具有辅助参数的变分迭代算法在应用, 计算精度与效率等方面具有明显的优势. 其中辅助参数可以通过  $h$  曲线和残差函数的 2 范数的误差来确定. 图形和数值结果表明, 带有参数摄动的变分迭代算法适用于物理科学和工程学中出现的大部分线性和非线性问题, 优于原始的变分迭代算法.

感谢中国矿业大学数学学院杨金杰博士的讨论.

## 参考文献

- [1] Kartashov Y V, Astrakharchik G E, Malomed B A, Torner L 2019 *Nat. Rev. Phys.* **1** 185
- [2] Kengne E, Liu W M, Malomed B A 2020 *Phys. Rep.* **1** 899
- [3] Zhang D J 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010202 (in Chinese) [张大军 2020 物理学报 **69** 010202]
- [4] Song C Q, Zhu Z N 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010204 (in Chinese) [宋彩芹, 朱佐农 2020 物理学报 **69** 010204]
- [5] Wang P, Zheng Y L, Chen X F, Huang C M, Kartashov Y V, Torner L, Konotop, V V, Ye F W 2020 *Nature* **577** 42
- [6] Fu Q D, Wang P, Huang C M, Kartashov Y V, Torner L, Konotop V V, Ye F W 2020 *Nat. Photonics* **14** 663
- [7] Tian S F 2016 *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.* **472** 20160588
- [8] Tian S F 2017 *J. Differ. Equ.* **262** 506
- [9] Ma W X 2020 *Appl. Math. Lett.* **102** 106161
- [10] Zhang G Q, Yan Z Y 2020 *Physica D* **402** 132170
- [11] Wang X B, Han B 2020 *J. Math. Anal. Appl.* **487** 123968
- [12] Li B Q, Ma Y L 2020 *Appl. Math. Comput.* **386** 125469
- [13] Su J J, Gao Y T, Ding C C 2019 *Appl. Math. Lett.* **88** 201
- [14] Zhang X, Wang R, Zhang Y Q, Kartashov Y V, Li F, Zhong H, Guan H, Gao K, Li F, Zhang Y P, Xiao M 2020 *Nat.*

- Commun.* **11** 1902
- [15] Jin K, Li Y, Li F, Belic M R, Zhang Y P, Zhang Y Q 2020 *Adv. Photonics* **2** 046002
- [16] Zeng L, Zeng J 2019 *Adv. Photonics*. **1** 046004
- [17] Zeng L, Zeng J 2020 *Commun. Phys.* **3** 26
- [18] Yang J K 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 6862
- [19] Bao W Z, Yin J 2019 *Res. Math. Sci.* **6** 1
- [20] Antoine X, Bao W Z, Besse C 2013 *Comput. Phys. Commun.* **184** 2621
- [21] Cockburn B, Shu C W 1998 *SIAM J. Math. Anal.* **35** 2440
- [22] Jiang G S, Shu C W 1996 *J. Comput. Phys.* **126** 202
- [23] He J H 1999 *Int. J. Non. Linear Mech.* **34** 699
- [24] He J H 2007 *J. Comput. Appl. Math.* **207** 3
- [25] He J H 2007 *Comput. Math. Appl.* **54** 881
- [26] Hesameddini E, Latifizadeh H 2009 *J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **10** 1377
- [27] Salkuyeh D K 2008 *Comput. Math. Appl.* **56** 2027
- [28] Noor M A, Mohyud-Din S T 2008 *J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **9** 141
- [29] Liao S J 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 499
- [30] Zayed E M, Rahman H 2009 *J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **10** 1093
- [31] Hosseini M M, Mohyud-Din S T, Ghaneai H, Usman M 2010 *J. Comput. Appl. Math.* **11** 495
- [32] Cahn J W, Hilliard J E 1958 *J. Chem. Phys.* **28** 258
- [33] Barrett J W, Blowey J F 1997 *Numer. Math.* **77** 1
- [34] Wells G N, Kuhl E, Garikipati K 2006 *J. Comput. Phys.* **218** 860
- [35] Kay D, Welford R 2006 *J. Comput. Phys.* **212** 288
- [36] Benjamin T B, Bona J L, Mahony J J 1972 *Philos. Trans. R. Soc. A* **272** 47
- [37] Karakoc S B G, Bhowmik S K 2019 *Comput. Math. Appl.* **77** 1917

# Application of the modified variational iteration method in the fourth-order Cahn-Hilliard equation BBM-Burgers equation\*

Zhong Ming Tian Shou-Fu<sup>†</sup> Shi Yi-Qing

(School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221100, China)

( Received 17 December 2020; revised manuscript received 24 May 2021 )

## Abstract

The variational iteration method, based on the variational principle, is a numerical format with high numerical accuracy and convenience, has been widely applied in the numerical solution of various strong-nonlinear solitary wave equations. In this paper, the modified variational iteration method is used to improve the original numerical method, that is, the parameter  $h$  is introduced before the variational item. By defining the discrete two norm of the error function and drawing the  $h$ -curve in the domain of definition, the  $h$  that minimizes the error is determined and then returned to the original iteration process for solution. In this paper, We choose the uniform grid points to caculate the error. At the same time, the introduction of parameters also expands the convergence domain of the original numerical solution and achieves the numerical optimization under the condition of a certain number of iterations, which shows better than the general method. In the numerical experiment, the above results are applied to the fourth-order Cahn-Hilliard equation and the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation. The Cahn-Hilliard equation was first found to describe the phenomeno in interface dynamics. It has vital application in physical. For the fourth-order Cahn-Hilliard equation, the error order of the ordinary variational iteration method is about  $10^{-1}$ , and the absolute error is reduced to  $10^{-4}$  after the modification. Moreover, the modified method expands the convergence domain of the original numerical solution. And the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation can be degenerated to the Benjamin-Bona-Mahony and the Burgers equation under the appropriate parameter selection. For the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, if using the normal method, we can find that the numerical solution will not converge. But the accuracy of the numerical solution is decreased to  $10^{-3}$  by using the variational iteration method with auxiliary parameters, which is superior to the original variational iteration method in the approximation effect of the true solution. This numerical method also provides a scheme and reference for the numerical solution of other strong-nonlinear solitary wave differential equations. This scheme provieds a continuous solution in the time and space domain, which differs from the finite difference method, finite volume scheme and so on. That means we can use this method independently without using any other scheme to match our approach, this is also the advantage of the modified variational iteration method.

**Keywords:** modified variational iteration method, nonlinear solitary wave equation, fourth order Cahn-Hilliard equation, Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation

**PACS:** 02.60.Cb, 02.60.Jh

**DOI:** 10.7498/aps.70.20202147

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11975306) and the Natural Science Foundation of Higher Education Institutions of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20181351).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [sftian@cumt.edu.cn](mailto:sftian@cumt.edu.cn)