



倾斜弹性海底条件下浅海声场的简正波相干耦合特性分析

张士钊 朴胜春

Coherent mode coupling in shallow water overlaying sloping elastic ocean bottom

Zhang Shi-Zhao Piao Sheng-Chun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 214304 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20211013

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211013>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

浅海波导中低频声场干涉简正模态的判别

Identification of interference normal mode pairs of low frequency sound in shallow water

物理学报. 2019, 68(13): 134304 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190221>

深海波导中基于采样简正波模态降维处理的广义似然比检测

Dimension-reduced generalized likelihood ratio detection based on sampling of normal modes in deep ocean

物理学报. 2019, 68(17): 174301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190700>

浅海周期起伏海底环境下的声传播

Sound propagation in shallow water with periodic rough bottom

物理学报. 2021, 70(3): 034302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201233>

三维浅海下弹性结构声辐射预报的有限元-抛物方程法

Acoustic radiation from a cylinder in shallow water by finite element-parabolic equation method

物理学报. 2019, 68(2): 024301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181452>

基于变分模态分解-相干分析的肌间耦合特性

Intermuscular coupling characteristics based on variational mode decomposition-coherence

物理学报. 2017, 66(6): 068701 <https://doi.org/10.7498/aps.66.068701>

基于弹性变分模态分解的癫痫脑电信号分类方法

eEpileptic electroencephalogram signal classification method based on elastic variational mode decomposition

物理学报. 2021, 70(1): 018702 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200904>

倾斜弹性海底条件下浅海声场的简正波 相干耦合特性分析*

张士钊³⁾ 朴胜春^{1)2)3)†}

1) (哈尔滨工程大学, 水声技术重点实验室, 哈尔滨 150001)

2) (哈尔滨工程大学, 海洋信息获取与安全工信部重点实验室, 哈尔滨 150001)

3) (哈尔滨工程大学水声工程学院, 哈尔滨 150001)

(2021 年 5 月 28 日收到; 2021 年 6 月 22 日收到修改稿)

建立了一种适用于复本征值情况下的弹性耦合简正波声场模型, 给出了包含泄漏模态时弹性简正波的归一化和耦合系数表达式, 耦合系数满足声能流守恒. 利用该模型分析了倾斜弹性海底条件下声场的简正波相干耦合特性, 发现考虑泄漏模态时, 简正波耦合不仅会导致简正波幅度变化, 而且也会带来附加相移. 仿真计算表明: 其一, 在倾斜弹性海底条件下, 考虑泄漏模态耦合附加相移影响后得到的声传播损失更接近有限元商用软件的计算结果; 其二, 耦合大大提升了界面波的幅度. 此外, 本文还分析了海洋环境参数变化对声传播损失的影响.

关键词: 弹性耦合简正波模型, 泄漏模态, 相移

PACS: 43.30.+m

DOI: 10.7498/aps.70.20211013

1 引言

在弹性海底情况下, 声波在海洋中传播时, 海底会激发起纵波和横波. 而在海洋环境随着距离发生变化的情况下, 海洋中传播的各阶简正波之间会发生简正波耦合效应, 带来简正波之间的能量转移.

Pekeris^[1]首次提出简正波模型, 解决了液态海底条件下两层水平分层介质中的水中点源爆炸声传播问题. Press 和 Ewing^[2]将 Pekeris 提出的简正波模型扩展到包含弹性海底的情况, 解决了弹性海底条件下的水平分层介质中的爆炸声传播问题. Porter 和 Reiss^[3]采用有限差分方法, 数值计算弹性海底水平分层介质中的简正波声传播. Ainslie^[4]

计算了多层弹性海底条件下水平分层介质中的纵波和横波反射和传播系数. Schneiderwind 等^[5]研究了水平分层弹性 Pekeris 波导条件下的声场简正波解, 并通过水池实验加以验证.

实际海洋环境随距离变化, 导致各阶简正波之间的耦合效应. Pierce^[6]首次将简正波声场分析方法扩展到距离依赖海洋环境中, 提出了简正波耦合模型. Chwioroth 等^[7]将耦合简正波方法用于随距离变化的抛物线声速模型, 分析了该环境下的简正波能量转移. Williams^[8]分析了随距离线性变化海深条件下, 上坡和下坡时的前两阶简正波之间的能量耦合. Rutherford 和 Hawker^[9]分析了倾斜海底环境的边界条件, 用修正边界条件对简正波耦合理论做了一阶能量守恒修正. McDaniel^[10]分析了常量坡度倾斜液态海底条件下的简正波能量交换, 发

* 国家自然科学基金 (批准号: 11474073) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: 3514497) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: piaoshengchun@hrbeu.edu.cn

现了靠近截止频率的简正波对连续谱简正波的强烈耦合效应. Evans^[11]采用距离步进简正波耦合模型, 考虑了水深随距离变化带来的反向散射, 以及有限阶传播简正波之间的耦合. Porter 等^[12]采用改进边界条件, 解决了倾斜海底阶梯近似中的单向抛物方程模型能量守恒问题. Abawi 和 Kuperman^[13]采用耦合简正波抛物方程模型, 计算距离依赖海洋环境下的声场, 处理简正波之间以及不同方位角之间的能量耦合. Knobles 等^[14]采用双向积分耦合简正波方法, 分析大陆架海域的声传播, 既包括离散谱, 也包括连续谱, 并且用泄漏模态近似表示连续谱. 莫亚泉等^[15]提出了一种满足能量守恒的双向简正波耦合方法, 实现了非水平分层波导中的双向场的准确计算.

弹性海底情况下, 简正波耦合问题变得更加复杂. Kennett^[16]分析了水平变化海洋环境下的弹性简正波耦合, 包括了前向和后向传播的简正波. Odom^[17]研究了随距离变化海深弹性海底条件下, 简正波之间的耦合, 包括与连续谱的耦合. Hall^[18]通过测量垂直于海底的深度, 解决了倾斜海底时简正波之间耦合系数的计算错误; 发现, 浅水倾斜海底环境下, 负声速梯度导致了简正波耦合系数增大. Maupin^[19]采用局地简正波耦合方法处理距离依赖的弹性海底海洋环境, 分析了二维声场中的 Love 波和 Rayleigh 波之间的简正波能量转移. Collins^[20]采用能量守恒抛物方程方法, 解决涉及倾斜海底界面波传播的问题, 以及涉及简正波截止和耦合至海底剪切波束的问题. Collins 和 Siegmann^[21]对弹性抛物方程进行声能流密度守恒修正, 处理距离依赖海深时的声场. Jeroen^[22]分析了海底地形变化条件下, 界面波传播中的简正波耦合, 而 Abawi 和 Porter^[23]将该成果应用于倾斜弹性海底条件下的耦合简正波传播, 得到了该条件下的纵波和横波声压. Odom 等^[24]将弹性海底中的倾斜边界条件转换为与距离导数无关的项, 从而简化了弹性海底时的简正波耦合. Abawi 和 Porter^[25]采用虚源法计算楔形弹性海底条件下的声场, 得到了和弹性抛物方程方法一致的结果. Xie 等^[26]采用拉格朗日谱元法, 分析半无限空间中的流体-固体耦合问题, 处理距离有关海洋环境中的声传播问题.

在海洋环境随着距离发生变化的情况下, 简正波耦合的计算过程中会受到一些因素的影响. 1 个典型的影响是, 特征方程中, 垂直波数的计算往往

会选取 Pekeris 割线法, 而特定环境下, 算出的本征值过于接近割线位置, 导致本征值出现较大的误差, 甚至搜根失败, 严重影响最终的简正波归一化和耦合结果. 为了消除 Pekeris 割线对声场计算的影响, 一些学者采用了多种方法来处理. 骆文于等^[27]采用稳定的深度格林函数, 结合波数积分方法, 得到了简正波水平波数接近海底波数时的准确声压. 而莫亚泉等^[28]采用复等效深度法, 提高了波导简正波本征值位于割线枝点附近情况下声传播损失的计算精度. Chapman 等^[29]采用等效深度法处理弹性 Pekeris 波导中的声传播问题, 得到了精确的简正波相速度. McCollom 和 Collis^[30]采用格林函数处理弹性海底 Pekeris 波导中的简正波求解问题. Zhang 和 Tindle^[31]将采用复等效深度法, 处理浅海弹性海底时的简正波求解问题, 包含了“泄漏”模态. Stickler^[32]采用割线积分方法处理“泄漏”简正波, 发现了割线积分对浅水声场的显著贡献. Westwood 和 Koch^[33]采用弱正梯度声速半无限空间近似方法, 在液态海底环境下, 消除了 Pekeris 割线附近的简正波计算误差; Westwood 等^[34]还将此方法应用于弹性海底情况, 结合等效反射系数和等效深度方法修正本征值.

前人的工作, 多从位移和应力张量的角度, 将耦合简正波分为局地简正波, 和与距离有关的简正波幅度, 并采用耦合差分方程来计算简正波幅度, 从而得到弹性海底时, 海洋环境变化情况下的声场. 然而, 局地简正波阶梯近似的方法, 多见于液态海底的情况; 弹性海底时, 这方面的分析较少, 而且多局限于“受限”的简正波, 很少有对“泄漏”简正波的分析. 而本文将简正波耦合扩展到包含“泄漏”简正波的情况, 建立了复本征值弹性耦合简正波模型. 在距离依赖弹性海底的海洋环境中, 该模型提高了对声传播损失的预报精度. 此外, 还将能量守恒近似扩展以包含复数本征值 (泄漏简正波), 来保证结果的准确性. 本文还分析了倾斜弹性海底条件下的简正波耦合效应, 发现了泄漏模态对简正波耦合系数的影响, 以及由此导致的简正波声压相位和幅度的复杂变化.

2 复本征值弹性耦合简正波模型

在二维直角坐标系下, 考虑时间因子为 $\exp(i\omega t)$ 的点声源, 不考虑外力作用, 也不考虑 y 方向的

声场, 在弹性海底水平变化波导中激发起声场, 采用阶梯近似来处理水平变化弹性海底边界, 如图 1 所示.

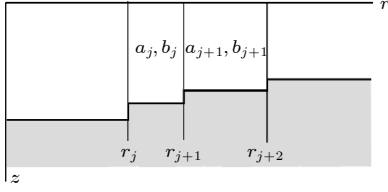


图 1 水平变化弹性海底的分段阶梯近似
Fig. 1. Stepwise approximation of a horizontally varying elastic seabed.

2.1 弹性波导中声场的运动方程

在弹性海底水平变化波导中激发起的声场, 其应力 $\mathbf{t}$ 和质点位移 $\mathbf{w}$ 满足的运动方程如下:

$$\rho \partial^2 \mathbf{w} / \partial t^2 = \nabla_i \mathbf{t}_i. \quad (1)$$

这里 ρ 为介质密度, 应力矢量 $\mathbf{t}$ 定义如下:

$$\mathbf{t}_i = C_{ij} \partial \mathbf{w} / \partial x_j, \quad (2)$$

其中 C_{ij} 为弹性模量有关系数, 详见附录 A. 假设声源为线源, 只考虑 xOz 平面, y 方向保持不变,

$$\mathbf{w} = (w_x, w_z), \quad \mathbf{t}_i = (\tau_{ix}, \tau_{iz}).$$

将位移 $\mathbf{w}$ 做时域傅里叶变换, 得到

$$\mathbf{w}(x, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{w}(x, z, t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (3)$$

其中, x 表示接收器到声源的距离, z 表示接收深度. 运动方程:

$$-\rho \omega^2 \mathbf{w} = \partial \mathbf{t}_1 / \partial x + \partial \mathbf{t}_3 / \partial z, \quad (4)$$

其中频域位移 $\mathbf{w} = (w_x, w_z)$, w_x 和 w_z 分别为水平位移和垂直位移分量. $\mathbf{t}_1 = (t_{11}, t_{13})$, $\mathbf{t}_3 = (t_{31}, t_{33})$, $\mathbf{t}_i = C_{i1} \partial \mathbf{w} / \partial x + C_{i3} \partial \mathbf{w} / \partial z$.

下文中, 定义 $\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 = (\tau_{xx}, \tau_{xz})$, 位移应力矢量 $\mathbf{u} = (\mathbf{w}, \mathbf{t})^T$. 从而得到

$$\partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (5)$$

其中差分算子:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -C_{11}^{-1} C_{13} \frac{\partial}{\partial z} & C_{11}^{-1} \\ -\rho \omega^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left(Q_{33} \frac{\partial}{\partial z} \right) & -\frac{\partial}{\partial z} C_{31} C_{11}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

矩阵 $\mathbf{Q}_{gh}$ 定义如下:

$$\mathbf{Q}_{gh} = \mathbf{C}_{gh} - \mathbf{C}_{g1} C_{11}^{-1} \mathbf{C}_{1h}, \quad g, h = 1, 2, 3. \quad (7)$$

边界条件要求界面处的位移和应力连续, 对于形如 $z = h(x)$ 的第 m 层界面, 法向为 $\mathbf{n}$, 界面斜率 $dz_m/dx = \partial h_m / \partial x = \dot{h}_m$, 界面倾角 $\theta_m = \arctan(\dot{h}_m)$, 法向矢量可以写成 $\mathbf{n} = \sin \theta_m \mathbf{i} - \cos \theta_m \mathbf{k}$, 第 m 层界面上的应力 $\mathbf{T} = \mathbf{t}_j \mathbf{n}_j$ 连续可以写成:

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{t}_1 \sin \theta_m - \mathbf{t}_3 \cos \theta_m] \\ = [\dot{h}_m \mathbf{t} - \mathbf{t}_3] / \sqrt{1 + \dot{h}_m^2} = 0. \quad (8)$$

方括号表示第 m 层界面处变量的值的跳变, 从底部 ($z > h_m$) 到顶部 ($z < h_m$), 下同. 根据 (8) 式, 得到边界条件

$$[\mathbf{t}_3]_m = \dot{h}_m [\mathbf{t}]_m. \quad (9)$$

由此可将运动方程 (5) 和边界条件 (9) 合写成:

$$\partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{A} \mathbf{u} + \sum_m \dot{h}_m \{0, [\mathbf{t}]_m \delta(z - h_m(x))\}^T. \quad (10)$$

相应的边界条件为

$$[\mathbf{t}_3]_m = [\mathbf{w}]_m = 0. \quad (11)$$

需要说明的是, (10) 式中的 $\delta(z - h_m(x))$ 项作用于 $\mathbf{u}$ 矢量这个整体, 而当考虑下文中的局地简正波 $\mathbf{u}_n(x_0, z) \exp\{-ik_n(x_0)x\}$ 时, $\delta(z - h_m(x))$ 项作为边界条件存在, 用于推导正交归一化, 不直接出现在局地简正波 $\mathbf{u}_n(x_0, z)$ 表达式中.

2.2 复本征值简正波归一化

二维距离依赖介质中的声传播问题可以通过距离无关介质中的本征函数来解决. 运动方程 (10) 的各向同性局部简正波解可以写成:

$$\mathbf{u}_n(x_0, z) \exp\{-ik_n(x_0)x\}, \quad (12)$$

其中 $\mathbf{u}_n$ 满足:

$$-ik_n(x_0) \mathbf{u}_n(x_0, z) = \mathbf{A} \mathbf{u}_n(x_0, z). \quad (13)$$

在 (13) 式中,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -C_{11}^{-1} C_{13} \frac{\partial}{\partial z} & C_{11}^{-1} \\ -\rho \omega^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left(Q_{33} \frac{\partial}{\partial z} \right) & \frac{\partial}{\partial z} C_{31} C_{11}^{-1} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_n = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_n \\ \mathbf{t}_n \end{Bmatrix}.$$

矩阵算子 $\mathbf{A}$ 中各个参数含义见附录 A.

我们发现, 在本征值为复数的情况下, 根据特征方程^[5]

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} k_s^4 \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}} \tan(k_{z,1}H) + (2k_x^2 - k_s^2)^2 - 4k_x^2 k_{z,2} k_{z,s} = 0,$$

$$k_{z,1} = \sqrt{k_1^2 - k_x^2},$$

$$k_{z,2} = \begin{cases} -i\sqrt{k_p^2 - k_x^2}, & |k_x| < k_p, \\ \sqrt{k_x^2 - k_p^2}, & |k_x| > k_p, \end{cases}$$

$$k_{z,s} = \begin{cases} -i\sqrt{k_s^2 - k_x^2}, & |k_x| < k_p, \\ \sqrt{k_x^2 - k_s^2}, & |k_x| > k_p. \end{cases}$$

求得本征值的方法会有较大的误差, 其中 k_p 和 k_s 为海底纵波和横波波数. 为了解决这个问题, 对特征方程进行黎曼面上的分支处理:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{k_s^4}{k_{z,1}} \text{Pek}(k_x, k_p) \tan(k_{z,1}H) + (2k_x^2 - k_s^2)^2$$

$$- 4k_x^2 \text{Pek}(k_x, k_s) \text{Pek}(k_x, k_p) = 0,$$

$$\text{Pek}(a, b) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2}, & \text{Re}(a) \geq \text{Re}(b), \\ -\sqrt{a^2 - b^2}, & \text{Re}(a) < \text{Re}(b). \end{cases}$$

可以得到满足 (13) 式的复数 $k_n(x)$. 而如果不进行黎曼面上的分支处理, 将无法准确求得方程的复数根.

2.3 复本征值简正波正交性

在复本征值条件下, 以往的简正波正交性条件^[19]不再成立, 需要给出新的适用于复数本征值 $k_n(x)$ 的正交性推导. 定义局地本征函数 $\mathbf{u}_m$ 和 $\mathbf{u}_n$ 的标量积如下:

$$\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = i \int_0^\infty (\mathbf{u}_m^* \mathbf{t}_n - \mathbf{t}_m^* \mathbf{u}_n) dz. \quad (14)$$

经过一些推导 (见附录 B), 得到适用于复本征值 $k_n(x)$ 的正交性表达式:

$$\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{A} \mathbf{u}_n \rangle + \langle \mathbf{A} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = i(k_m^* - k_n) \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = 0. \quad (15)$$

$m \neq n$ 时, $i(k_m^* - k_n) \neq 0$, 所以 $\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = 0$. 当 $m = n$ 时, 采用归一化因子 $\langle \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n \rangle$ 对 (14) 式进行处理, 从而得到归一化表达式:

$$\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = \delta_{mn}. \quad (16)$$

对 $\mathbf{u}_n$ 实现归一化, 适用于所有的复数 $k_n(x)$. 而参考文献 [19] 的 (A2) 式 (被参考文献 [24] 用于推导简正波归一化) 中给出的简正波正交性表达式 $i(k_m - k_n) \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = 0$, 仅适用于实数 $k_n(x)$, 和

本文推导出的适用于复数 $k_n(x)$ 的简正波正交归一化表达式 (15) 并不相同.

根据 (14)–(16) 式进行简正波归一化, 采用了简正波幅度 A_m 的共轭相乘, 归一化除法因子含有 $A_m A_m^* = |A_m|^2$, 归一化前的简正波声压幅度 A_m^2 在归一化后变为 $A_m^2/|A_m|^2$, 相位得到保留. 在经典的声压计算方法中, 通常采用朗斯基归一化, 简正波声压幅度在归一化后将变为 1. 为了和经典的声场计算方法的结果进行对比, 我们将经过简正波正交归一化的声压除以 $A_m^2/|A_m|^2$, 以便使简正波声压幅度 A_m^2 变为 1, 消去幅度 A_m^2 的相位, 得到修正后的归一化所得声压, 且和未修正的声压进行了对比 (图 3).

2.4 包含泄漏模态的耦合简正波模型

基于上述归一化, 只考虑沿着 x 轴正方向传播的简正波, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (\mathbf{w} \quad \mathbf{t})^T \\ &= \sum_m a_m \exp\left(-\int_0^x i k_m(\zeta) d\zeta\right) \\ &\quad \times (\mathbf{w}_m(x, z) \quad \mathbf{t}_m(x, z))^T, \end{aligned} \quad (17)$$

其中幅度 a_m 满足:

$$\partial a_m / \partial x = B_{mn} a_n. \quad (18)$$

实际数值计算中采用离散的差分形式, 将 (18) 式写成:

$$\begin{aligned} &(a_m(x_{j+1}) - a_m(x_j)) / (x_{j+1} - x_j) \\ &= B_{mn}(x_{j+1}, x_j) a_n(x_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

其中 $B_{mn}(x_{j+1}, x_j)$ 为考虑泄漏模态的耦合系数, 表达式见附录 C 中的 (C1) 式.

由此得到海洋环境随距离变化时, 弹性海底条件下的简正波耦合系数表达式, 用以计算该条件下的水中声压. 需要特别说明的是, (C1) 式的结果, 和参考文献 [24] 中的耦合系数表达式 (A1) 有所不同. 这个不同的结果, 使得 $k_n(x)$ 为复数时, 仍满足参考文献 [24] 中给出的能量守恒表达式 (27), 而文献 [24] 中的耦合系数表达式 (A1), 仅适用于实数 $k_n(x)$ 的情况, 而对复数 $k_n(x)$ 失效. 文献 [24] 中的结果不能用于复数本征值, 也就是相应的泄漏模态, 在利用耦合简正波方法计算声场的时候, 仅考虑实数本征值, 会带来较大的声压计算误差. 而本文提出的改进方法, 则能够将该耦合简正波方法推

广到包含复数本征值的情况,得到的声压更加接近较为成熟的弹性声场计算方法,如 RAMS 和有限元商用软件 COMSOL. 这些结果将会在仿真分析部分予以展示.

以上推导了包含泄漏模态时的弹性海底条件下的简正波归一化,修正了能量守恒,推导了耦合简正波表达式,得到了距离依赖弹性海底海洋环境下的声场模型. 接下来,将对这些模型进行仿真,与经典声场计算方法进行对比检验.

3 仿真分析

3.1 模型对标准检验问题的计算

3.1.1 弹性海底和液态海底的水中声压对比

分别用本文提出的简正波耦合方法(图2中标注为“耦合矩阵”,下同.下文简称为“本文方法”)、RAMS、有限元商用软件 COMSOL 计算弹性海底时的水中声场(本文方法和 RAMS 计算声场的水平步长均为 1 m,下同),用 Couple07, RAM 计算液态海底时的水中声场. z_s 和 z_r 分别表示声源和

接收深度, $z_s = z_r = 30$ m, 声波频率 $f = 50$ Hz, 海洋环境和所得声压如图2所示.

从图2(b)可见, Couple07 和 RAM 程序计算液态海底时的水中声压,结果基本一致,说明这两种方法所得液态海底时的水中声压正确.从图2(d)可见,本文方法和 RAMS 以及 COMSOL, 计算弹性海底时的水中声压基本一致,证明了本文方法计算弹性海底时的水中声压的正确性.此外,对比图2(b)和图2(d)可见,弹性和液态海底时的水中声压有较大差异,体现了弹性海底对水中声压的显著影响.后续计算中,如无特别说明, f 均为 50 Hz, z_s 和 z_r 均为 30 m, 声压计算距离均为 3400 m, 海洋环境均如图2(c)所示.

3.1.2 弹性海底标准检验问题的计算结果

考虑如图2(c)所示的弹性标准楔形海底条件下的海洋环境.分别采用本文方法、RAMS 以及 COMSOL, 计算水中声压, 所得结果如图3所示.

由图3(a)可知, 未经幅度相位修正的 $\langle u_m, u_n \rangle$ 归一化所得声压, 和 COMSOL 所得声压基本一致, 但是局部差异较大, 特别是 $x = 3100$ m 附近

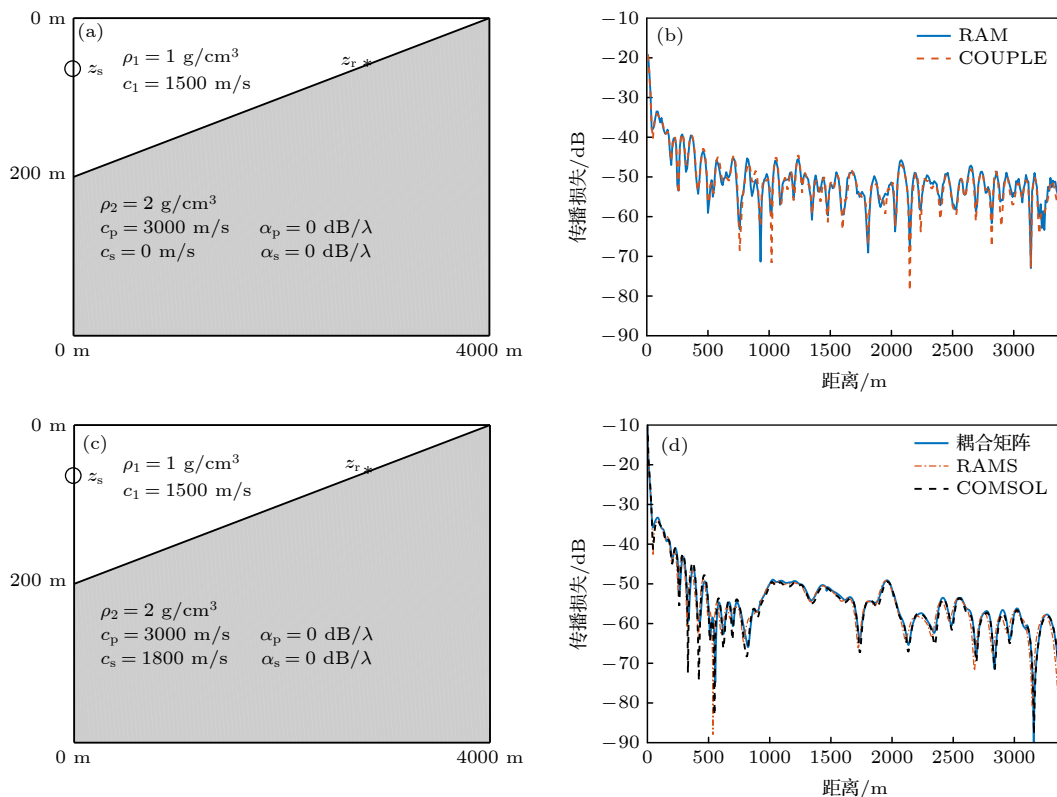


图2 (a) 液态海底海洋环境模型; (b) 液态海底时的水中声压; (c) 弹性海底海洋环境模型; (d) 弹性海底时的水中声压

Fig. 2. (a) Marine environment model with liquid seabed; (b) sound pressure in water with liquid seabed; (c) marine environment model with elastic seabed; (d) sound pressure in water with elastic seabed.

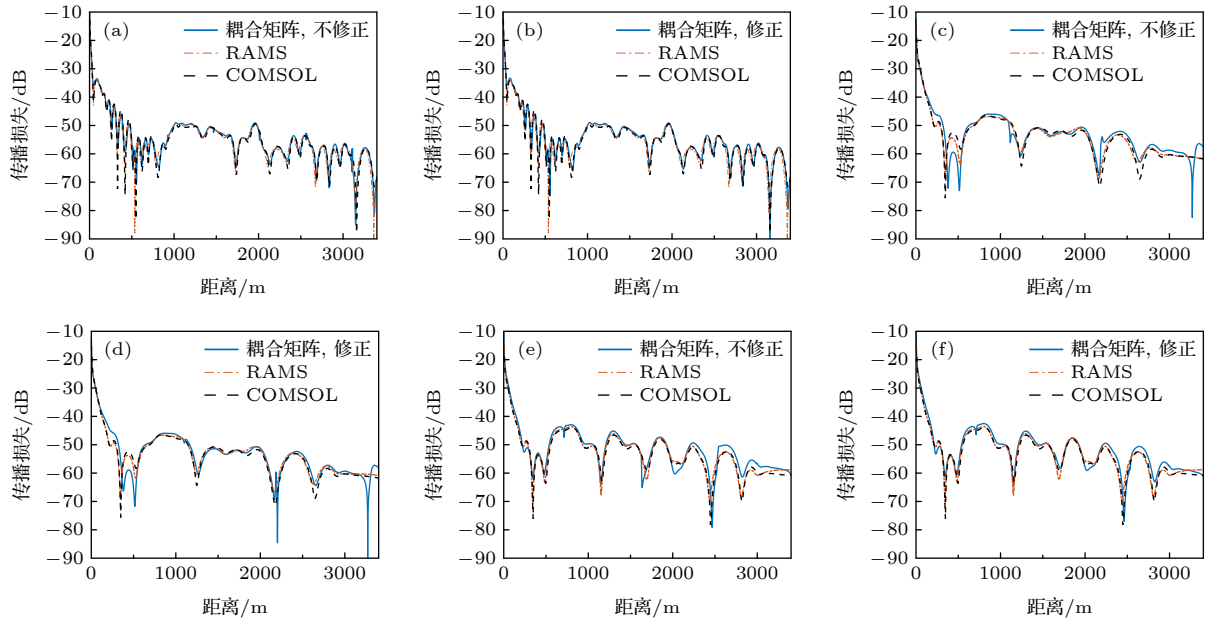


图 3 是否考虑幅度相位处理的 $\langle u_m, u_n \rangle$ 归一化时本文方法所得声压, 及其和 RAMS 以及 COMSOL 所得声压对比 (a) $f = 50$ Hz, 不考虑; (b) $f = 50$ Hz, 考虑; (c) $f = 25$ Hz 时, 不考虑; (d) $f = 25$ Hz, 考虑; (e) $f = 25$ Hz, $c_s = 2000$ m/s, 不考虑; (f) $f = 25$ Hz, $c_s = 2000$ m/s, 考虑

Fig. 3. Sound pressure obtained by the method in this paper when (a) $f = 50$ Hz, without, (b) $f = 50$ Hz, with, (c) $f = 25$ Hz, without, (d) $f = 25$ Hz, with, (e) $f = 25$ Hz, $c_s = 2000$ m/s, without, (f) $f = 25$ Hz, $c_s = 2000$ m/s, with considering the normalization of amplitude and phase processing, compared with the sound pressure obtained by RAMS and COMSOL.

出现了较大的不一致. 而修正后的声压, 如图 3 所示, 和 RAMS 以及 COMSOL 所得声压基本一致, 说明了幅度相位修正的必要性.

本文选择 $f = 50$ Hz, 是因为此时海深 $H = 200$ m 处算出多达 14 阶简正波, 单阶简正波的局部计算误差对声场的影响较小; 而常规的标准楔形海底算例采用 $f = 25$ Hz. 为进一步验证 COMSOL 计算结果的准确性, 计算 25 Hz 时的水中声压, 如图 3(c) 和图 3(d) 所示, 可看出该条件下, RAMS 和 COMSOL 所得声压基本一致, 从而验证了 COMSOL 所得声压的准确性, 可以用 COMSOL 来检验本文方法声压计算结果的准确性. 从图 3(c) 可见, 不考虑简正波幅度的相位处理时, 本文方法和 COMSOL 所得声压在 $x > 2.2$ km 时相差很大; 而从图 3(d) 可见, 考虑简正波幅度的相位处理后, 本文方法所得声压与 COMSOL 所得声压的接近程度在 $x > 2.2$ km 时大幅提升, 表明这样的处理能够得到更准确的声压. 此外, 从图 3(b) 和图 3(d) 可见, $f = 25$ Hz 时, 本文方法所得声压在一些位置处和 COMSOL 计算结果相差较大, 而 50 Hz 时则与 COMSOL 计算结果基本一致. 原因是, 本征

值接近割线位置 k_s 时计算不准确, 导致局部声压计算错误. 这样的错误出现在越低阶次的简正波, 对声压计算的影响越大, 而在本文的计算中, 25 Hz 时, 第 2 阶简正波本征值在 $x = 3271 - 3350$ m 处靠近 k_s 而计算出错, 而 50 Hz 时, 从第 3 阶简正波才开始出现 $x < 3400$ m 时的本征值计算错误, 造成的声压计算误差小得多. 而当 c_s 从 1800 m/s 增加到 2000 m/s 时, 图 3(f) 中的本文声压计算结果和 COMSOL 更符合, 其原因在于, 此时 k_s 变小, 低阶简正波本征值靠近 k_s 割线计算出错的距离增大, 对前 3400 m 距离的声压计算带来的误差变小, 由此导致了更为准确的声压计算结果. 因此, 本文方法在声波频率更高以及海底横波声速更大的情况下, 水中声压计算结果更准确. 下文所有计算中, 均考虑简正波幅度相位修正后的简正波正交归一化所得声压.

除了对比本文方法和 RAMS 以及 COMSOL 的声压计算精度, 还对比了三者的计算速度, 结果如表 1 所列.

从表 1 可见, 耦合矩阵法计算声场耗时和 RAMS 较为接近, 均比 COMSOL 耗时短得多.

表 1 图 2(c) 环境下声场计算的平均耗时
Table 1. Average time consumption for acoustic field computation under the environment shown in Fig. 2(c).

计算方法	耦合矩阵法	RAMS	COMSOL
平均耗时/s	7.66	5.37	27.33

3.2 泄漏模式对弹性耦合简正波的影响分析

3.2.1 泄漏模式对声压传播损失的影响分析

本文讨论的泄漏模式,指的是本征值 k_m 实部小于 k_s 的模式. 考虑和不考虑泄漏模式时本文方法所得声压,及其和 RAMS, COMSOL 的结果对比,如图 4 所示.

从图 4(a) 可见,不考虑泄漏模式时,本文方法所得水中声压和 RAMS, COMSOL 结果相差较大. 而从图 4(b) 可见,考虑泄漏模式时,本文方法所得声压和 RAMS, COMSOL 结果较为接近. 这说明,在计算标准楔形弹性海底时的水中声压时,必须考虑泄漏模式. 这个结论,也可以通过波数域声压来佐证.

对 RAMS 所得声压 $p(x, z_r)$ ($\Delta x = 1$ m) 进行频率-波数域滤波 (frequency-wavenumber filtering, FK) 变换,得到波数域声场

$$P_{FK}(k_x, z_r) = \int_0^{R_{\max}} p(x, z_r) e^{-ik_x x} dx \\ \approx \sum_{n=1}^{3400} p(n\Delta x, z_r) e^{-ik_x n\Delta x} \Delta x.$$

如图 4(c) 所示,在 $k_x < k_s$ 时声波幅度依然较强,不可忽略,因而泄漏模式对弹性海底条件下的水中声压的贡献不可忽略.

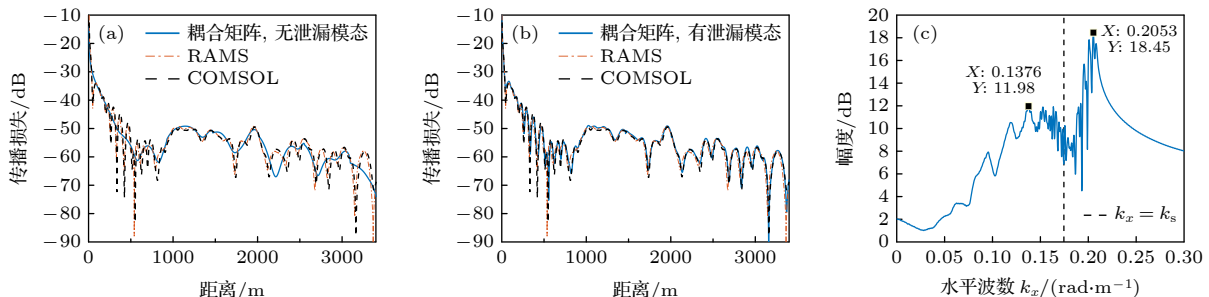


图 4 (a) 不考虑和 (b) 考虑泄漏模式时的耦合矩阵法所得声压,及其和 RAMS, COMSOL 程序所得声压的对比; (c) RAMS 所得声压的 FK 变换结果

Fig. 4. Sound pressure obtained by the coupling matrix method when the leaky mode is (a) not considered or (b) considered, compared with the sound pressure obtained by the RAMS and COMSOL program; (c) the FK transformation result of the sound pressure obtained by RAMS.

3.2.2 声源深度对声场的影响分析

改变声源深度,得到的声压见图 5. 从图 5 可见,考虑泄漏模式,在 $z_s = 50, 70$ 和 100 m 时,本文方法和 COMSOL 所得声压基本一致. 说明在改变 z_s 时,本文算法所得声压能够和 COMSOL 相符合. 而不考虑泄漏模式时,3 种不同 z_s 时,本文方法与 COMSOL 所得声压均有较大差异,说明在这些 z_s 条件下,泄漏模式能量较高,对声压的贡献不可忽略.

此外,观察到,不考虑泄漏模式时,声压起伏较小,声场干涉不太明显. 而当考虑泄漏模式时,声场干涉起伏明显增强. 为了解释这个现象,以 $x = 0$ m 处的耦合系数 B_{mn} 为例来说明:

耦合系数 (C1) 式中 $\exp\left(i \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) d\zeta\right)$ 本身就包含相位, $k_{mn}(\zeta)$ 为实数时, $\exp\left(i \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) d\zeta\right)$ 为振荡项,表示各阶简正波之间的干涉. 而当 $k_{mn}(\zeta)$ 为复数时, $\exp\left(i \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) d\zeta\right)$ 不仅有振荡,还有衰减,导致本征值为复数的高阶简正波对简正波耦合与干涉影响小.

为了分析局地简正波带来的耦合系数 B_{mn} 的附加相位,去掉简正波水平波数差带来的相位因子 $\exp\left(i \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) d\zeta\right)$,只考虑剩下的部分. 以 $x = 0$ m 处为例,共计算得到 14 阶简正波,其中前 8 阶为受限模式 (第一阶为界面波),后 6 阶为泄漏模式. 分别以界面波,某一受限模式 (第 5 阶) 和某一泄漏模式 (第 9 阶) 为例,画出这些阶和其他阶简正波之间的耦合系数,如图 5(d)–(f) 所示. 从图 5(d)–(f) 可见,界面波 (第 1 阶) 和其他受限

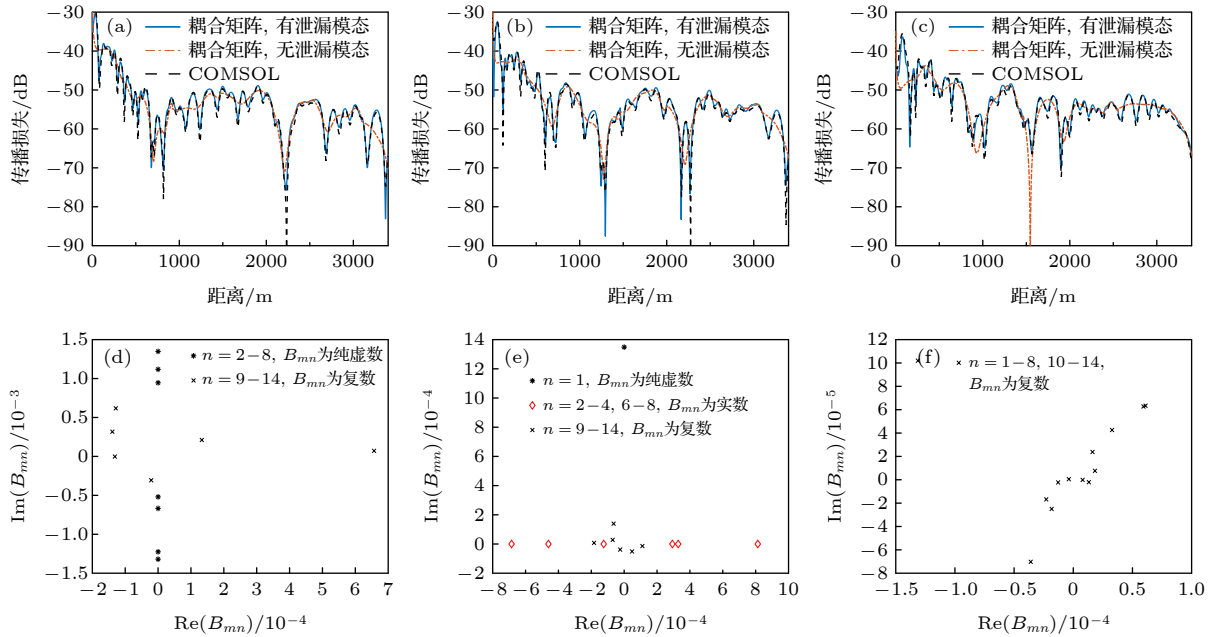


图 5 $z_r = 30$ m, $z_s =$ (a) 50, (b) 70 和 (c) 100 m 时的水中声压; $m =$ (d) 1, (e) 5 和 (f) 9 时, $x = 0$ m 处的耦合系数 B_{mn}

Fig. 5. Sound pressure in water when $z_r = 30$ m, $z_s =$ (a) 50, (b) 70, and (c) 100 m; the coupling coefficient B_{mn} at $x = 0$ m when $m =$ (d) 1, (e) 5 and (f) 9.

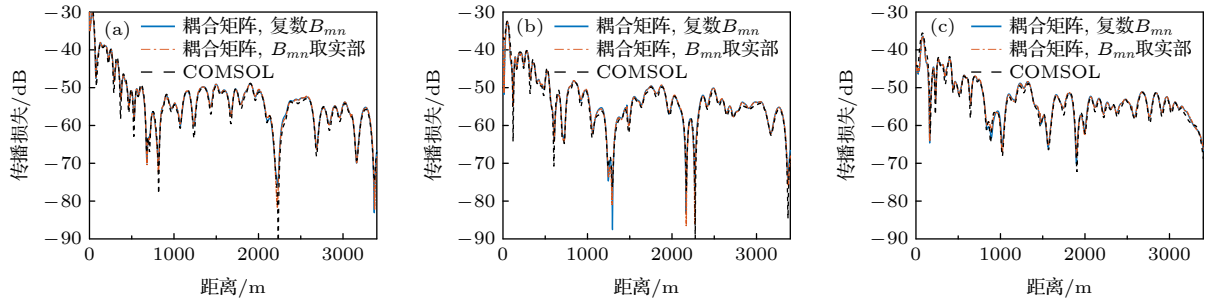


图 6 (a) $z_s = 50$, (b) 70 和 (c) 100 m 时, 不含波数差的耦合系数取实部和保持为复数时的声压对比

Fig. 6. Acoustic pressure when the real part of the coupling coefficient without wavenumber difference is taken when $z_s =$ (a) 50, (b) 70, (c) 100 m, compared with the sound pressure when the coupling coefficient is kept as a complex number.

模式 (第 2—8 阶) 之间的耦合系数 B_{mn} 是纯虚数, 而受限模式 (第 5 阶) 和其他受限模式 (第 2—4, 6—8 阶) 之间的耦合系数 B_{mn} 是实数, 这样的耦合只带来各阶简正波间的能量转移, 不会引入附加的相位变化. 而考虑泄漏模式时, 泄漏模式之间 (第 9 阶和第 10—14 阶之间), 以及泄漏模式 (第 9 阶) 和受限模式 (第 1—8 阶) 之间的耦合系数 B_{mn} 是复数 (实部和虚部均不为零), 不仅导致各阶简正波间的能量转移, 也带来附加相位变化, 导致泄漏模式之间, 以及泄漏模式和受限模式之间的干涉, 从而带来了比只考虑受限模式时更加复杂的声场干涉, 声场干涉起伏明显增强.

为了验证上述分析的正确性, 将不含波数差的

耦合系数 B_{mn} 取实部, 绘制声压传播损失, 且和 B_{mn} 保持为复数时的声传播损失进行对比, 如图 6 所示.

从图 6 可见, 3 个不同 z_s 情况下, 无论不含波数差的耦合系数 B_{mn} 取实部, 还是保持复数, 本文方法所得声压结果都基本一致, 仅在某些局部略有差别. 这说明, 复数耦合系数导致的相干耦合以及附加相移, 对声传播损失的影响较小, 并不是考虑泄漏模式后声场干涉结构变得复杂的主要原因.

为了分析泄漏模式导致声场干涉结构变得复杂的原因, 绘制各阶简正波本征值实部随着距离的变化, 如图 7(c) 所示. 从图 7(c) 可见, 第 9—14 阶简正波在 $x = 0$ m 处就是泄漏模式, 它们只对近场

声压有贡献,而对远场声压的贡献可以忽略.而第2—8阶简正波在 $x = 0$ m处是传播模态,传播过程中变为泄漏模态,它们变为泄漏模态的距离较远,从该位置处才开始指数衰减,指数衰减距离并不长,因而它们对声压的贡献不可忽略,与传播模态的干涉作用不可忽略,带来了比只考虑受限模态时更复杂的声场干涉.

3.2.3 耦合对简正波声压幅度 a_m 的幅度和相位的影响

根据(18)式,简正波耦合只影响各阶简正波的幅度 a_m ,而 a_m 是1个复数,因而分别分析耦合对复数 a_m 的幅度和相位的影响.绝热近似和考虑耦合时,各阶简正波 a_m 的模 $|a_m|$ 以及相位随距离的变化如图7(a)和图7(b)所示.

一般情况下,声源远离海底时,界面波(图中标注为第一阶,下同)的激发强度很弱,几乎无法被探测到.而从图7(a)可见, $z_s = 50$ m时,简正波耦合对界面波的幅度影响最为明显,将界面波的声压幅度 $|a_1|$ 提高了110 dB,使得其幅度达到和第5阶简正波近似的水平,使界面波有可能被探测到.而第5阶简正波的幅度 $|a_5|$ 受耦合的影响,仅次于界面波,最大起伏达到32.4 dB.其原因在于,在声源位置处, $z_s = 50$ m位于第5阶简正波的波节处附近,因而第5阶简正波激发强度较小,容易受到其他阶简正波的耦合影响而带来幅度的剧烈变化.而其他阶简正波的幅度起伏相对较小,均不超过5 dB,由此可见,耦合虽然改变了各阶简正波的幅度的模 $|a_m|$,但是大部分简正波幅度变化并不大.而从图7(b)可见,耦合改变了所有阶简正波 a_m 的相位,这种改变,不仅对泄漏模态有影响,对受限模态也不例外.其中,对界面波幅度 a_1 的相位变化最明显,呈现出相位的锯齿状类周期性变化,说明界面波的相位受到以相邻阶简正波为主的各阶简正波的强烈耦合影响.而第2—4阶简正波 a_m 的相位也呈现类周期性变化.此外,当简正波从受限模态逐步转变为泄漏模态后,其幅度 a_m 的相位随距离的变化逐渐变小,最终相位趋于稳定.其原因在于,转变为泄漏模态后,由于衰减系数的存在,耦合系数 B_{mn} 中的 $\exp\left(i \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) d\zeta\right)$ 随着距离而指数衰减, B_{mn} 随着距离而指数衰减,导致该阶简正波和其他简正波之间的耦合作用随着距离而指数衰减,因而其相位随距离的变化逐渐减慢,最

终趋于停滞, $|a_m|$ 的变化也存在类似规律.

为了进一步分析简正波耦合对各阶简正波的影响,对各阶简正波的声压做FK变换,得到图8.

从图8可见, $z_s = 50$ m时,相比绝热近似,耦合显著改变了界面波和第5阶简正波声压的幅度和相位分布,而对其他阶简正波影响不大.而 $z_s = 100$ m时,耦合显著改变了界面波和第3,5,7阶简正波声压的幅度和相位分布.其原因在于, $z_s = 100$ m时,声源深度位于局地全海深的一半,第3,5,7阶简正波的激发强度较小,容易受到其他阶简正波的耦合影响而改变幅度.

3.2.4 海底坡度对声场的影响

保持声源处海深为200 m不变,仅改变上坡海底的坡度,得到坡度为0.0125, 0.025, 0.05, 0.075时的上坡海底时的声压,如图9所示,计算结束的距离分别为3400, 3400, 3400和2267 m.

从图9(a)—(d)可见,考虑泄漏模态时,各个海底坡度下,本文方法和COMSOL所得声压基本一致;而不考虑泄漏模态时,海底坡度为0.0125时,在 $R < 1.2$ km时本文方法和COMSOL所得声压有较大差异,而 $R \geq 1.2$ km时,本文方法和COMSOL所得声压逐渐趋于一致,说明在该坡度下,泄漏模态对于近场有显著影响,而在远场逐步减弱,可以忽略.

而当坡度增加到0.025时,不考虑泄漏模态时,除了 $R < 1$ km时本文方法和COMSOL所得声压相差较大以外, $x = 2.9$ —3.3 km处,本文方法和COMSOL所得声压相差也较大,仅在 $x = 1$ —2.9 km段与COMSOL所得声压基本一致.坡度进一步增加到0.05和0.075时,不考虑泄漏模态条件下,本文方法和COMSOL所得声压在各个距离处都相差较大.其原因在于,以坡度为0.05为例,结合前文的分析,第9—14阶简正波在 $x = 0$ m处就是泄漏模态,只对近场声压有贡献.而第2—8阶简正波变为泄漏模态的距离较远,远场处指数衰减距离并不长,因而它们对远场声压的贡献不可忽略.

海底坡度对简正波耦合强度也有影响.对比这4种不同海底坡度下的声压发现,考虑泄漏模态时, $R < 500$ m时,4种坡度时所得声场基本一致;而当 $R > 500$ m时,随着海底坡度的增加,声压随着距离的起伏变得越来越剧烈.其原因在于,随着

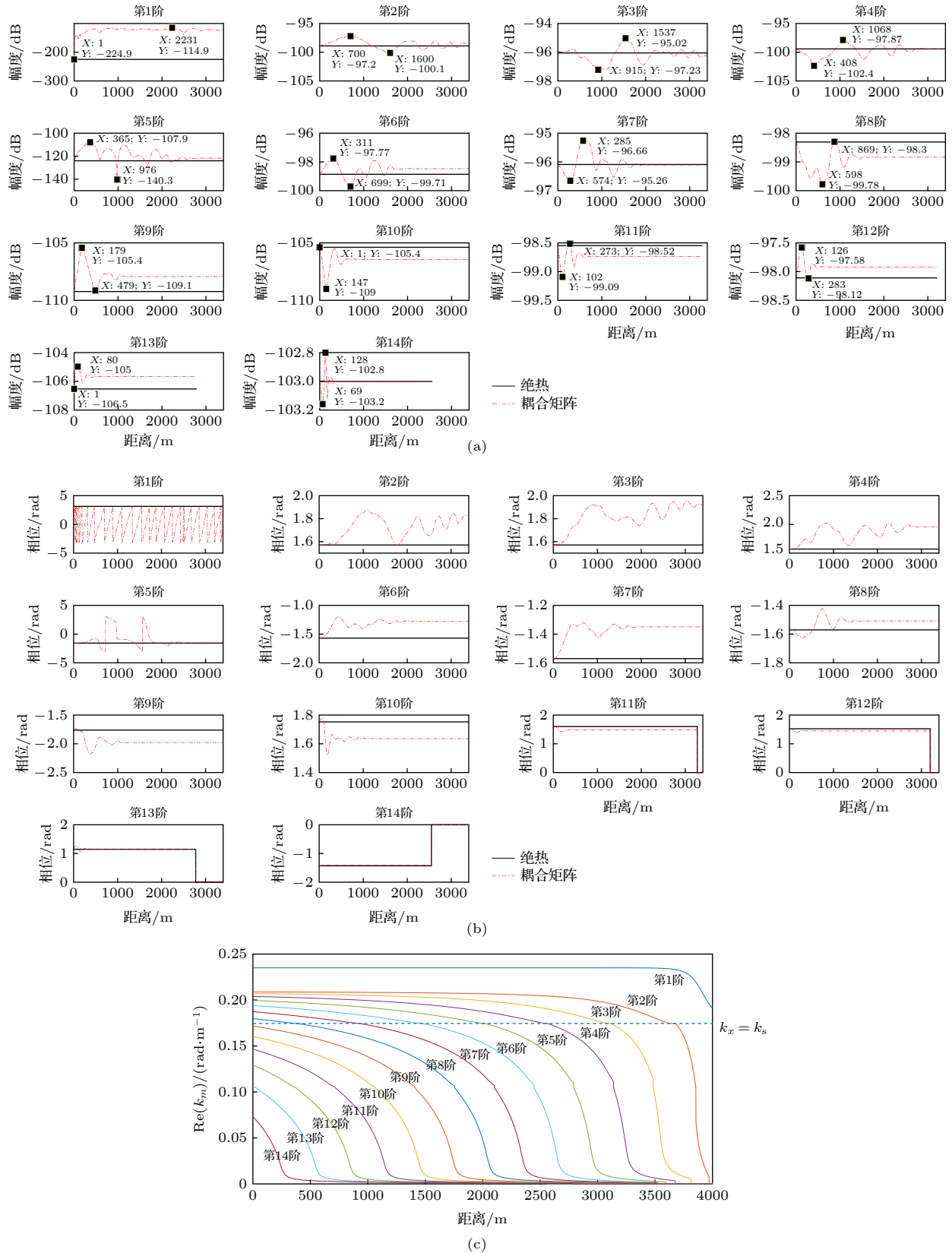
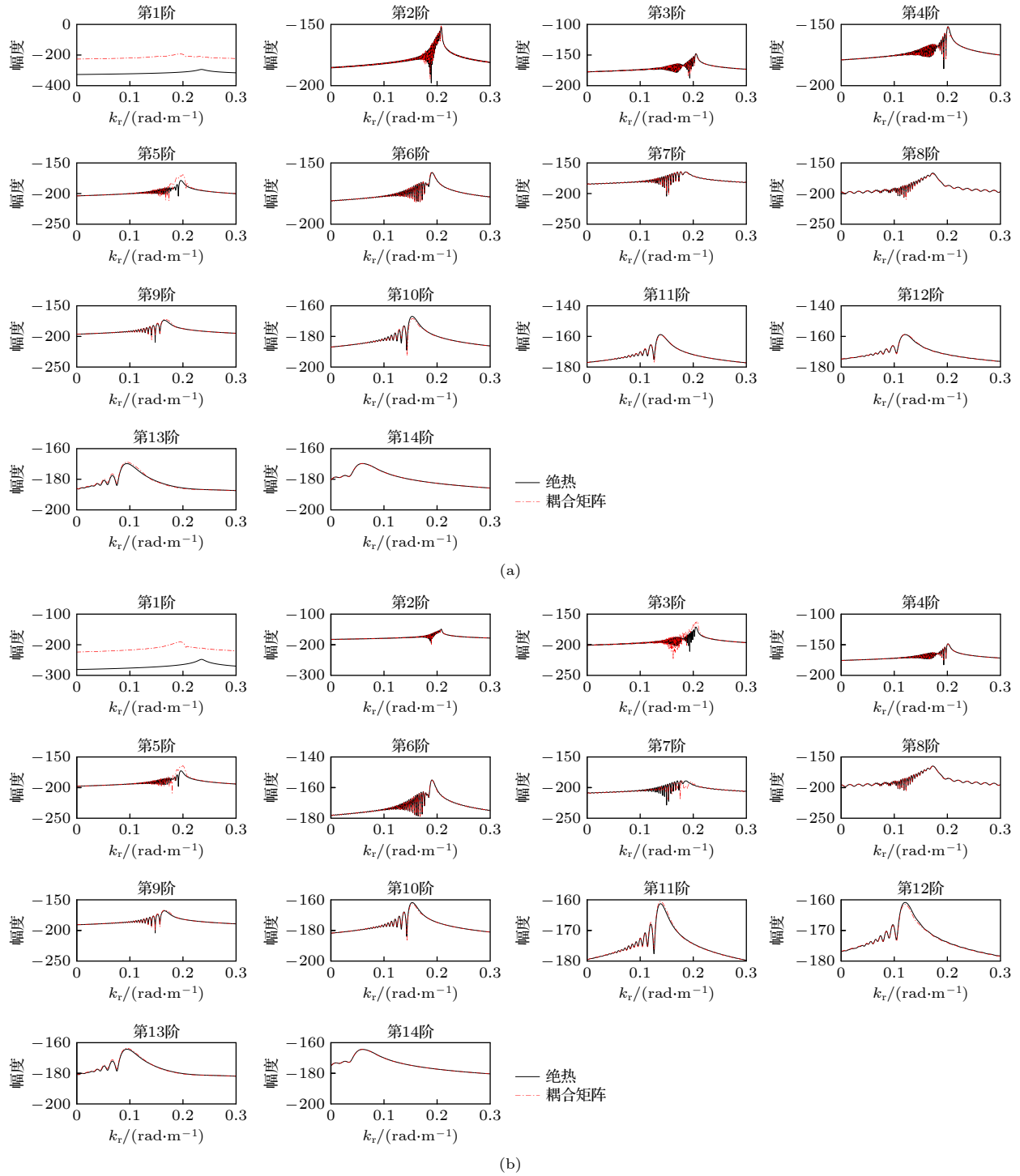


图 7 $z_s = 50$ m, 各阶简正波的 (a) $|a_m|$ 和 (b) a_m 的相位随距离的变化; (c) $f = 50$ Hz, 海洋环境如图 2(c) 时, 各阶简正波本征值的实部随距离的变化

Fig. 7. When $z_s = 50$ m, (a) $|a_m|$ and (b) the phases of a_m of each order of normal mode varying with distance. (c) When $f = 50$ Hz and the marine environment is shown in Fig. 2(c), the real part of the normal mode eigenvalues of each order varying with distance.

图 8 $z_s =$ (a) 50 和 (b) 100 m 时, 各阶简正波声压的 FK 变换结果图Fig. 8. FK transformation results of normal mode sound pressure of each order when $z_s =$ (a) 50 and (b) 100 m.

海底坡度的增加, 简正波耦合强度增强, 简正波耦合带来的能量转移的速度加快, 从而带来更为复杂的声起伏, 导致声起伏的速度加快, 表现为随着海底坡度的增加, 声压随着距离的起伏变得越来越剧烈. 从图 9(e) 和图 9(f) 可见, 海底坡度从 0.0125 增至 0.025, $x = 1$ km 处的简正波耦合强度峰值增加了

一倍, 证实了海底坡度对简正波耦合强度的影响.

3.2.5 海底地形对声场的影响

以往的标准楔形海底考虑上坡海底的声场, 从上坡海底改为坡度为 0.05 的下坡海底, 海洋环境如图 10(a) 所示, 画声压图时以声源位置为 $x =$

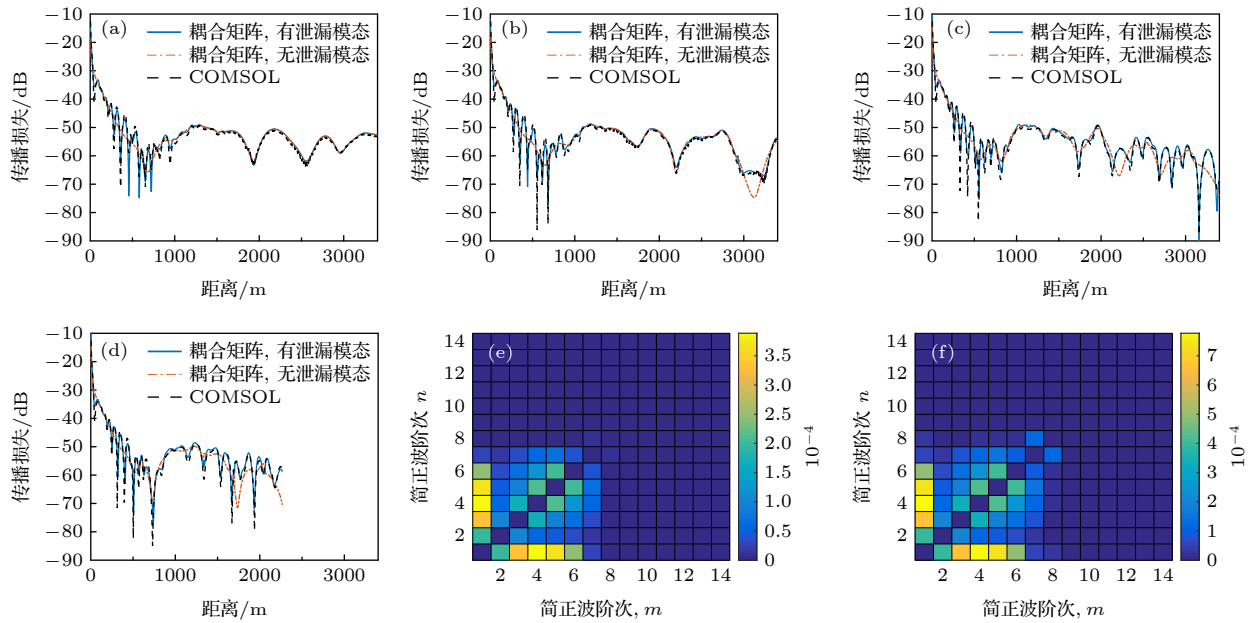


图 9 上坡弹性海底的坡度为 (a) 0.0125, (b) 0.025, (c) 0.05 和 (d) 0.075 时的水中声压; 考虑泄漏模式, 坡度为 (e) 0.0125 和 (f) 0.025, $x = 1$ km 时的 $|B_{mn}(x)|$

Fig. 9. Sound pressure in water when the seabed slope is (a) 0.0125, (b) 0.025, (c) 0.05 and (d) 0.075 on the upslope elastic seabed. The $|B_{mn}(x)|$ considering the leaky mode when $x = 1$ km when the slope is (e) 0.0125 and (f) 0.025.

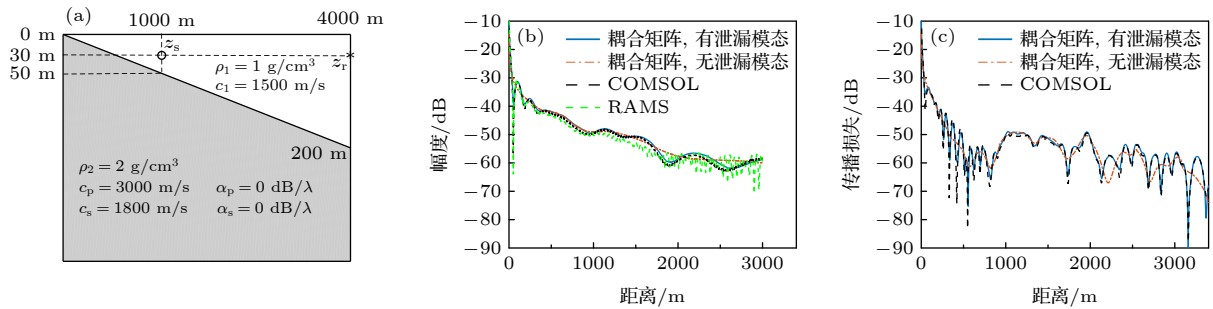


图 10 (a) 下坡海底海洋环境; (b) 下坡和 (c) 上坡的坡度为 0.05 时的弹性海底声场

Fig. 10. (a) Downslope seabed marine environment; sound field in water with (b) downslope and (c) upslope elastic seabed with a slope of 0.05.

0 m. 该条件下, 本文方法和 RAMS 以及 COMSOL 所得声场如图 10(b) 所示。

从图 10(b) 可见, 下坡海底条件下, 考虑泄漏模式时, 本文方法和 COMSOL 所得声压基本一致; 而不考虑泄漏模式时, 本文方法和 COMSOL 所得声压相差较大。从图 10(c) 也可以看到上坡海底时的相似结果, 显示了泄漏模式对水中声压不可忽略的贡献。而比较图 10(b) 和图 10(c) 可见, 上坡海底时泄漏模式对声场的贡献更为显著, 其原因在于, 下坡海底情况下, 声源位置处海深只有 50 m, 只激发起了 4 阶简正波, 而上坡海底时声源位置处海深 200 m, 激发起 14 阶简正波。虽然耦合对声场起到一定的影响, 但是下坡时的 4 阶简正波主导了

声场, 而这 4 阶简正波中并不包含泄漏模式, 只是在距离增加的过程中, 能量通过简正波耦合进入泄漏模式。而上坡海底时, 泄漏模式一开始就存在于 14 阶简正波中, 因而比下坡海底时对声场有更大的贡献。

此外, 对比图 10(b) 和图 10(c) 可见, 坡度绝对值都是 0.05 的情况下, 上坡情况下的声压传播损失随距离的变化起伏比下坡时更为剧烈。原因是, 上坡海底时激发起的简正波阶数远少于下坡海底时, 因而上坡海底时简正波之间的干涉比下坡时复杂得多, 声压传播损失随距离的起伏更为剧烈。同时也说明, 下坡海底时, 即便因为简正波耦合效应的存在, 而在海深随着距离变深的情况下激发起

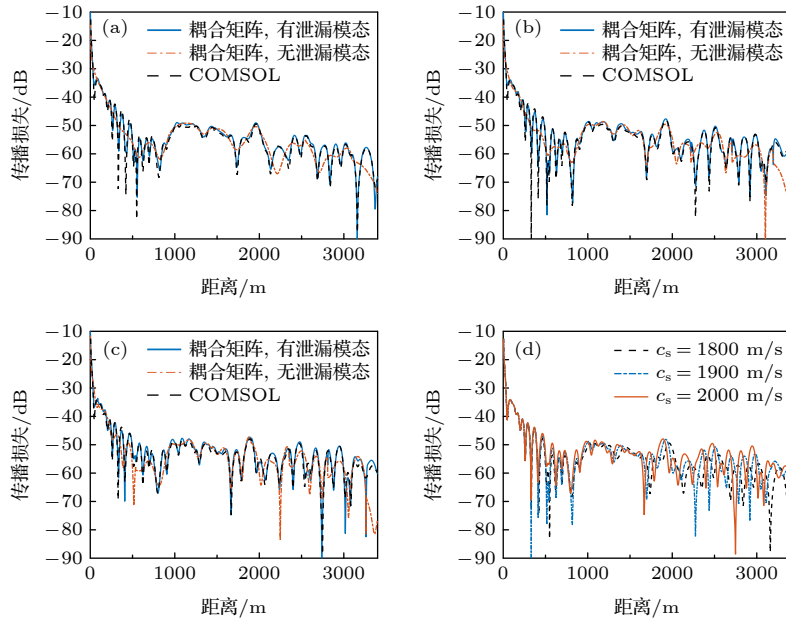


图 11 $c_s =$ (a) 1800, (b) 1900, (c) 2000 m/s 时的水中声压; (d) 考虑泄漏模态条件下, $c_s = 1800, 1900, 2000$ m/s 时采用耦合简正波法得到的声压对比

Fig. 11. Sound pressure in water when $c_s =$ (a) 1800, (b) 1900, (c) 2000 m/s; (d) sound pressure comparison obtained by mode coupling method while considering leaky modes when $c_s = 1800, 1900, 2000$ m/s.

了更多阶局地简正波, 这些受激发而产生的新简正波的强度, 也比原始的 4 阶简正波弱得多, 因而无法对声场的干涉起到主要贡献。

另外图 10(b) 特别画出了下坡海底时的 RAMS 声压计算结果. 其目的在于展示出, 下坡海底情况下, RAMS 的声压结果, 和 COMSOL 以及本文方法有较大差别, 说明此时 RAMS 的声压计算结果错误. 再结合表 1 可知, 本文提出的耦合矩阵法, 在 3 种方法中, 计算声压速度相对较快, 而且能在下坡海底情况下, RAMS 计算声压出错时, 依然得到较为准确的水中声压, 表明了提出本文方法的必要性。

3.2.6 海底横波声速对声场的影响

改变 c_s , 计算水中声压, 所得结果如图 11 所示. 从图 11(a)—(c) 可见, 考虑泄漏模态时, 本文方法所得声压, 在 3 种不同海底横波声速的情况下, 均与 COMSOL 计算结果基本一致, 表明了结果的准确性. 而不考虑泄漏模态时, 本文方法所得声压在 3 种海底横波声速时均与 COMSOL 计算结果产生了较大差异, 从而显示了泄漏模态对声压的显著贡献. 此外, 对比可见, $c_s = 2000$ m/s 时, 泄漏模态对声场的影响最小. 其原因在于, 在海底横波声速大于水中声速的前提下, 海底横波声速

c_s 越大, 一部分高阶模态因为 c_s 变大而从泄漏模态变为受限模态, 泄漏模态的阶数减少, 因而泄漏模态对声场的影响随着海底横波声速的增大而减小。

而从图 11(d) 可见, 在最初的 500 m 距离, 3 种横波声速情况下的水中声压基本一致, 而后续的声压呈现出相似的起伏特性. 然而, 对比可见, 对于这些相似的起伏, $c_s = 2000$ m/s 时声压随距离的起伏最快 (峰值最先出现), 而 $c_s = 1800$ m/s 时则是起伏最慢, 声压随距离的速度随着横波声速的变小而变慢. 此外, 声压传播损失随着海底横波声速的增加而减小. 其原因在于, 上文提到, 一部分高阶模态因为 c_s 变大而从泄漏模态变为受限模态, 能量增强, 表现为声压传播损失减小; 而这部分变为受限模态的高阶简正波, 对声场干涉的影响增强, 而高阶模态之间的干涉的空间周期比低阶模态之间的干涉空间周期短, 呈现出声压随着距离的快速起伏。

当海底横波声速小于水中声速时, 考虑典型的弹性海底环境参数, 取 $c_p = 1700$ m/s, $c_s = 600, 100, 800$ m/s, 其余环境参数如图 2(c) 所示, $z_s = z_r = 30$ m, 计算 $f = 50$ Hz 时的水中声场, 如图 12 所示. 此时, 由于 c_s 较小, k_s 较大, 界面波之外都是泄漏模态, 只考虑所有模态而不再去掉泄漏模态,

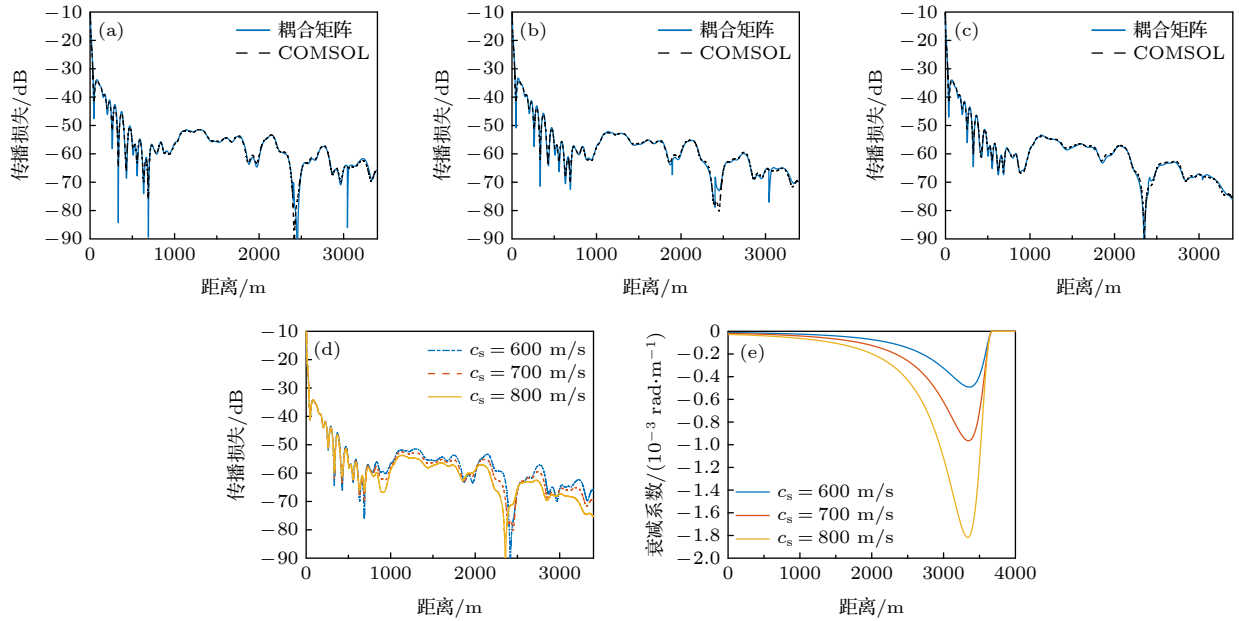


图 12 $c_p = 1700$ m/s, $c_s =$ (a) 600, (b) 700 和 (c) 800 m/s 时的水中声压; (d) $c_s = 600, 700, 800$ m/s 时, 考虑泄漏模式情况下, 采用耦合简正波方法所得声压对比; (e) $c_s = 600, 700, 800$ m/s 时第 2 阶简正波衰减系数随距离的变化

Fig. 12. Sound pressure in water when $c_s =$ (a) 600, (b) 700, (c) 800 m/s; (d) sound pressure obtained by mode coupling method considering leaky modes and when $c_s = 600, 700, 800$ m/s; (e) the attenuation coefficient of the 2nd normal mode varying with range when $c_s = 600, 700, 800$ m/s.

只对比不同算法得到的声压, 以及不同 c_s 对声压的影响。

从图 12(a)–(c) 可见, 当海底横波声速小于水中声速时, 耦合矩阵法所得声压与 COMSOL 计算结果基本一致, 在局部出现了一定的误差。而从图 12(d) 可见, 随着 c_s 的增大, 声起伏随距离的变化加快, 其原因是和 c_s 大于水中声速时的原因一致。有所不同的是, 声传播损失却随着 c_s 的增大而变大, 与 c_s 大于水中声速时的情况相反。其原因在于, 在 c_s 小于水中声速时, 随着 c_s 的增大, 计算得到的各阶简正波本征值的衰减系数变大: 以第 2 阶简正波为例, 3 种 c_s 情况下, 第 2 阶简正波的衰减系数如图 12(e) 所示, 图中可见, 随着 c_s 的增大, 第 2 阶简正波的衰减系数变大, 其余各阶简正波也存在此规律, 此处不再画图显示。

此外, 我们注意到, 图 12(a) 中, 大约在 $r = 3050$ m 处, 模型结果出现奇异值, 其原因在于, $c_p = 1700$ m/s, $f = 50$ Hz 时, 海底纵波波数 $k_p \approx 0.1847996$ rad/m, 而本文模型计算得到的第 3 阶简正波局地本征值在该点的值 $k_3 (r = 3050 \text{ m}) \approx (0.1847996 - 0.013628 i)$ rad/m, 它的实部十分接近 k_p , 这样的情况下, 模型的本征值计算结果出现了微小的误差, 但是这个微小的误差, 导致特征方

程在本征值靠近 k_p 时产生巨大误差, 从而导致了声场计算结果奇异值的产生。图 12(b) 中存在类似的问题, 声场奇异值处对应的也是第 3 阶简正波本征值实部接近 k_p 的情况, 目前该问题尚未得到解决。

4 结 论

采用 RAMS, COMSOL 和简正波耦合模型, 本文分析了等声速弹性倾斜海底条件下, 声场中的简正波耦合以及由此带来的能量转移, 发现, 本文模型所得声压计算结果和抛物方程所得结果基本一致; 标准楔形海底算声压, 必须考虑泄漏模式, 否则会带来较大的误差; 海底横波声速会通过影响泄漏模式的阶数, 影响了声压的起伏, 以及传播损失的大小; 泄漏模式导致耦合系数变为复数, 使得简正波耦合不仅包含能量转移, 还包含相位变化, 影响了简正波声压的相位和幅度变化规律, 从而导致了复杂的声场干涉; 同等坡度情况下, 泄漏模式在上坡海底比下坡海底时对水中声压的贡献更显著。

此外, Pekeris 割线附近的本征值求解问题, 本文的解仍存在一定的误差。本文算法所得声压传播

损失和 COMSOL 方法相比仍有一定的误差, 需要解决. 这些问题, 将会在今后的研究中进行解决.

感谢 COMSOL 公司对本文中的声场计算提供的技术支持.

附录A 弹性系数矩阵

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{ji} = (\mathbf{C}_{ij})^T, \quad \mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{C}_{ij} - \mathbf{C}_{i1}\mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{1j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

矩阵算子 $\mathbf{A}$ 中各个参数含义:

$$\mathbf{C}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{11}^{-1}\mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{31}\mathbf{C}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda/(\lambda + 2\mu) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \\ 0 & E & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & D \end{bmatrix},$$

$$A = \frac{1}{\lambda + 2\mu}, \quad B = \frac{1}{\mu}, \quad C = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad D = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu},$$

$$E = \mu, \quad F = 2\mu\lambda/(\lambda + 2\mu), \quad \lambda = \rho(c_p^2 - 2c_s^2), \quad \mu = \rho c_s^2.$$

附录B 复数本征值正交性推导

根据 (13) 式和 (14) 式, 得到标量积 $\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{A}\mathbf{u}_n \rangle$ 表达式:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{A}\mathbf{u}_n \rangle = & \int_0^\infty \left\{ \mathbf{w}_m^* \left[-\rho\omega^2 \mathbf{w}_n - \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{Q}_{33} \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{t}_n) \right] \right. \\ & \left. - \mathbf{t}_m^* \left(-\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13} \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} + \mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{t}_n \right) \right\} dz. \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

采用分部积分处理 (B1) 式, 得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{A}\mathbf{u}_n \rangle = & \int_0^\infty \left[-\mathbf{w}_m^* \rho \omega^2 \mathbf{w}_n + \frac{\partial \mathbf{w}_m^*}{\partial z} \left(\mathbf{Q}_{33} \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathbf{w}_m^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{t}_n) \right. \\ & \left. + \mathbf{t}_m^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13}) \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} - \mathbf{t}_m^* \mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{t}_n \right] dz + \int_0^\infty \left\{ \mathbf{w}_m^* \left[\mathbf{Q}_{33} \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} - (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1}) \mathbf{t}_n \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

采用和 (B1) 式与 (B2) 式相同的处理方法, 得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = & \mathrm{i} \int_0^\infty \left[\mathbf{w}_m^* \rho \omega^2 \mathbf{w}_n - \frac{\partial \mathbf{w}_m^*}{\partial z} \mathbf{Q}_{33} \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}_m^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{t}_n) \right. \\ & \left. - \mathbf{t}_m^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13}) \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} + \mathbf{t}_m^* \mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{t}_n \right] \mathrm{d}z - \mathrm{i} \sum_n \left[\left(\frac{\partial \mathbf{w}_m^*}{\partial z} \mathbf{Q}_{33} + \mathbf{t}_m^* (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1}) \right) \mathbf{w}_n \right]. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

将 (B2) 式和 (B3) 式叠加, 得到

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{A} \mathbf{u}_n \rangle + \langle \mathbf{A} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = & \mathrm{i} \sum_n \left[\mathbf{w}_m^* \left(\mathbf{Q}_{33} \frac{\partial \mathbf{w}_n}{\partial z} - (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1}) \mathbf{t}_n \right) \right] \\ & - \mathrm{i} \sum_n \left[\left(\frac{\partial \mathbf{w}_m^*}{\partial z} \mathbf{Q}_{33} + \mathbf{t}_m^* (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1}) \right) \mathbf{w}_n \right] = \mathrm{i} \sum_n [\mathbf{w}_m^* \mathbf{t}_{3,n}] - \mathrm{i} \sum_n [\mathbf{t}_{3,m}^* \mathbf{w}_n]. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

根据边界条件 (11) 式可知, $[\mathbf{w}_n] = [\mathbf{t}_{3,n}] = 0$, 可知 (B4) 式右侧为零, 得到

$$\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{A} \mathbf{u}_n \rangle + \langle \mathbf{A} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = 0. \quad (\text{B5})$$

再结合 (13) 式, 由 (B5) 式得到适用于复本征值 $k_n(x)$ 的正交性表达式:

$$\langle \mathbf{u}_m, \mathbf{A} \mathbf{u}_n \rangle + \langle \mathbf{A} \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = \mathrm{i} (k_m^* - k_n) \langle \mathbf{u}_m, \mathbf{u}_n \rangle = 0. \quad (\text{B6})$$

附录C 耦合系数推导与计算

1) 耦合系数的推导

$$B_{mn}(x_{j+1}, x_j) = \langle \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle \exp \left(\mathrm{i} \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right), \quad k_{mn}(\zeta) = k_m(\zeta) - k_n(\zeta),$$

其中,

$$\langle \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle = \mathrm{i} \int_0^\infty \mathbf{w}_{m,j+1}^*(x_j, z) \mathbf{t}_{n,j}(x_j, z) - \mathbf{t}_{m,j+1}^*(x_j, z) \mathbf{w}_{n,j}(x_j, z) \mathrm{d}z,$$

所以

$$\begin{aligned} B_{mn}(x_{j+1}, x_j) &= \langle \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle \exp \left(\mathrm{i} \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right) \\ &= \mathrm{i} \int_0^\infty \mathbf{w}_{m,j+1}^*(x_j, z) \mathbf{t}_{n,j}(x_j, z) - \mathbf{t}_{m,j+1}^*(x_j, z) \mathbf{w}_{n,j}(x_j, z) \mathrm{d}z \exp \left(\mathrm{i} \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right) \\ &= \mathrm{i} \int_0^\infty (\mathbf{w}_{x,m,j+1}^* \mathbf{t}_{11,n,j} + \mathbf{w}_{z,m,j+1}^* \mathbf{t}_{13,n,j} - \mathbf{w}_{x,n,j} \mathbf{t}_{11,m,j+1}^* - \mathbf{w}_{z,n,j} \mathbf{t}_{13,m,j+1}^*) (x_j, z) \mathrm{d}z \exp \left(\mathrm{i} \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) \mathrm{d}\zeta \right), \end{aligned}$$

其中位移和应力局地简正波本征函数表达式通过经典的简正波方法^[35]求得.

2) 能量守恒条件的推导

对于能量守恒条件^[21]

$$\begin{pmatrix} w_x t_{11} \\ w_z t_{13} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} w_x t_{11} \\ w_z t_{13} \end{pmatrix}_t,$$

得到, 在垂直边界 $x = x_j$ 处,

$$\begin{pmatrix} w_{x,j}(x_j, z) t_{11,j}(x_j, z) \\ w_{z,j}(x_j, z) t_{13,j}(x_j, z) \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} w_{x,j+1}(x_j, z) t_{11,j+1}(x_j, z) \\ w_{z,j+1}(x_j, z) t_{13,j+1}(x_j, z) \end{pmatrix}_t,$$

其中

$$\begin{aligned}
 w_{x,j}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) w_{x,m,j}(x_j, z), \\
 w_{x,j+1}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j+1}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) w_{x,m,j+1}(x_j, z), \\
 w_{z,j}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) w_{z,m,j}(x_j, z), \\
 w_{z,j+1}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j+1}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) w_{z,m,j+1}(x_j, z), \\
 t_{11,j}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) t_{11,m,j}(x_j, z), \\
 t_{11,j+1}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j+1}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) t_{11,m,j+1}(x_j, z), \\
 t_{13,j}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) t_{13,m,j}(x_j, z), \\
 t_{13,j+1}(x_j, z) &= \sum_m c_{m,j+1}(x_j) \exp\left(-i \int_0^{x_j} k_m(\zeta) d\zeta\right) t_{13,m,j+1}(x_j, z),
 \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M c_{n,j}(x_j) c_{m,j}^*(x_j) w_{x,n,j}(x_j, z) t_{11,m,j}^*(x_j, z) \exp\left[i \int_0^{x_j} (k_m^*(\zeta) - k_n(\zeta)) d\zeta\right] \\
 &= \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M c_{n,j+1}(x_j) c_{m,j+1}^*(x_j) w_{x,n,j+1}(x_j, z) t_{11,m,j+1}^*(x_j, z) \exp\left[i \int_0^{x_j} (k_m^*(\zeta) - k_n(\zeta)) d\zeta\right], \\
 & \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M c_{n,j}(x_j) c_{m,j}^*(x_j) w_{z,n,j}(x_j, z) t_{13,m,j}^*(x_j, z) \exp\left[i \int_0^{x_j} (k_m^*(\zeta) - k_n(\zeta)) d\zeta\right] \\
 &= \sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M c_{n,j+1}(x_j) c_{m,j+1}^*(x_j) w_{z,n,j+1}(x_j, z) t_{13,m,j+1}^*(x_j, z) \exp\left[i \int_0^{x_j} (k_m^*(\zeta) - k_n(\zeta)) d\zeta\right].
 \end{aligned}$$

3) 耦合系数的简化计算

$$\begin{aligned}
 & \langle \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{A} \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{m,j+1}(x_j, z) \\ \mathbf{t}_{m,j+1}(x_j, z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(C_{11}^{-1} C_{13})_j \frac{\partial}{\partial z} & (C_{11}^{-1})_j \\ -\rho_j \omega^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left((Q_{33})_j \frac{\partial}{\partial z} \right) & -\frac{\partial}{\partial z} (C_{31} C_{11}^{-1})_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{n,j}(x_j, z) \\ \mathbf{t}_{n,j}(x_j, z) \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{m,j+1}(x_j, z) \\ \mathbf{t}_{m,j+1}(x_j, z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(C_{11}^{-1} C_{13})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}(x_j, z)}{\partial z} + (C_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j}(x_j, z) \\ \left(-\rho_j \omega^2 - \frac{\partial}{\partial z} \left((Q_{33})_j \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \mathbf{w}_{n,j}(x_j, z) - \frac{\partial}{\partial z} \left((C_{31} C_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j}(x_j, z) \right) \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= i \int_0^\infty -\rho_j \omega^2 \mathbf{w}_{m,j+1}^* \mathbf{w}_{n,j} - \mathbf{w}_{m,j+1}^* (Q_{33})_j \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} \right) - \mathbf{w}_{m,j+1}^* \frac{\partial}{\partial z} \left((C_{31} C_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right) \\
 & \quad + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (C_{11}^{-1} C_{13})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} - \mathbf{t}_{m,j+1}^* (C_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} dz.
 \end{aligned}$$

根据分部积分得到

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{A}\mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle \\ &= \mathrm{i} \int_0^\infty \left[-\rho_j \omega^2 \mathbf{w}_{m,j+1}^* \mathbf{w}_{n,j} + \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} - \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} \right] \mathrm{d}z - \mathrm{i} \left(\mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} + \mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right)_0^\infty. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{A}\mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle \\ &= \mathrm{i} \int_0^\infty \left[\rho_{j+1} \omega^2 \mathbf{w}_{m,j+1}^* \mathbf{w}_{n,j} - \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_{j+1} \mathbf{t}_{n,j} + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1})_{j+1} \mathbf{t}_{n,j} \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} \right] \mathrm{d}z + \mathrm{i} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} \right)_0^\infty. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{A}\mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle + \langle \mathbf{A}\mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle \\ &= \mathrm{i} \int_0^\infty \left(\rho_{j+1} \omega^2 \mathbf{w}_{m,j+1}^* \mathbf{w}_{n,j} - \rho_j \omega^2 \mathbf{w}_{m,j+1}^* \mathbf{w}_{n,j} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} \right) \\ & \quad + \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} - \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_{j+1} \mathbf{t}_{n,j} \right) \\ & \quad + \left(\mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} - \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} \right) + \left(\mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1})_{j+1} \mathbf{t}_{n,j} - \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right) \mathrm{d}z \\ & \quad + \mathrm{i} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} - \mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} - \mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right)_0^\infty, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} & \mathrm{i} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} - \mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} - \mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right)_0^\infty \\ &= \mathrm{i} \left(\left[\mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} + \mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right]_{z=H_j} \right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} \right]_{z=H_{j+1}} \right). \end{aligned}$$

这里 $[\cdot]$ 表示括号内值在界面处的跃变, 从底部到顶部. 由此得到

$$\begin{aligned}
 & B_{mn}(x_{j+1}, x_j) \\
 &= \frac{1}{i(k_{m,j+1}^* - k_{n,j})} (\langle \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{A} \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle + \langle \mathbf{A} \mathbf{u}_{m,j+1}(x_j, z), \mathbf{u}_{n,j}(x_j, z) \rangle) \exp\left(i \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) d\zeta\right) \\
 &= \frac{1}{k_{m,j+1}^* - k_{n,j}} \left\{ \int_0^\infty \omega^2 (\rho_{j+1} \mathbf{w}_{m,j+1}^* \mathbf{w}_{n,j} - \rho_j \mathbf{w}_{m,j+1}^* \mathbf{w}_{n,j}) + \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} \right) \right. \\
 &\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} - \frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_{j+1} \mathbf{t}_{n,j} \right) \\
 &\quad + \left(\mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} - \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} \right) + \left(\mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1})_{j+1} \mathbf{t}_{n,j} - \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right) dz \\
 &\quad + \left(\left[\mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{Q}_{33})_j \frac{\partial \mathbf{w}_{n,j}}{\partial z} + \mathbf{w}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{31} \mathbf{C}_{11}^{-1})_j \mathbf{t}_{n,j} \right]_{z=H_j} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left[\frac{\partial \mathbf{w}_{m,j+1}^*}{\partial z} (\mathbf{Q}_{33})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} + \mathbf{t}_{m,j+1}^* (\mathbf{C}_{11}^{-1} \mathbf{C}_{13})_{j+1} \mathbf{w}_{n,j} \right]_{z=H_{j+1}} \right) \right\} \exp\left(i \int_0^{x_j} k_{mn}(\zeta) d\zeta\right), \quad m \neq n, \quad (C1)
 \end{aligned}$$

$m = n$ 时, $B_{nn}(x_{j+1}, x_j) = 0$.

附录D 复数本征值对应的各阶简正波的位移和应力

$$\begin{aligned}
 u_{1,n} &= \partial \varphi_{1,n} / \partial x = -ik_n A_n \sin(k_{z,1} z), \quad 0 \leq z \leq H, \\
 u_{2,n} &= \partial \varphi_{2,n} / \partial x - \partial \psi_n / \partial z = -ik_n D_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_p^2} z} + \sqrt{k_n^2 - k_s^2} E_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_s^2} z}, \quad z > H, \\
 w_{1,n} &= \partial \varphi_{1,n} / \partial z = k_{z,1} A_n \cos(k_{z,1} z), \quad 0 \leq z \leq H, \\
 w_{2,n} &= \partial \varphi_{2,n} / \partial z + \partial \psi_n / \partial x = -\sqrt{k_n^2 - k_p^2} D_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_p^2} z} - ik_n E_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_s^2} z}, \quad z > H, \\
 \tau_{zz,1,n} &= \lambda_1 (\partial^2 \varphi_{1,n} / \partial x^2 + \partial^2 \varphi_{1,n} / \partial z^2) = -\lambda_1 k_1^2 A_n \sin(k_{z,1} z), \quad 0 \leq z \leq H, \\
 \tau_{zx,1,n} &= \mu_1 (\partial u_{1,n} / \partial z + \partial w_{1,n} / \partial x) = 0, \quad 0 \leq z \leq H, \\
 \tau_{zz,2,n} &= \lambda_2 (\partial^2 \varphi_{2,n} / \partial x^2 + \partial^2 \varphi_{2,n} / \partial z^2) + 2\mu_2 (\partial^2 \varphi_{2,n} / \partial z^2 + \partial^2 \psi_n / \partial x \partial z) \\
 &= -\lambda_2 k_2^2 D_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_p^2} z} + 2\mu_2 \left[(k_n^2 - k_p^2) D_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_p^2} z} + ik_n \sqrt{k_n^2 - k_s^2} E_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_s^2} z} \right], \quad z > H, \\
 \tau_{zx,2,n} &= \mu_2 (2\partial^2 \varphi_{2,n} / \partial x \partial z + \partial^2 \psi_n / \partial x^2 - \partial^2 \psi_n / \partial z^2) \\
 &= \mu_2 \left\{ 2ik_n \sqrt{k_n^2 - k_p^2} D_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_p^2} z} + [-k_n^2 - (k_n^2 - k_s^2)] E_n e^{-\sqrt{k_n^2 - k_s^2} z} \right\}, \quad z > H,
 \end{aligned}$$

其中下角标 1 和 2 分别表示水中和海底的参量;
 u 和 w 表示水平和垂直位移; τ_{zz} 表示正应力, τ_{zx}
 表示剪应力; 系数 A_n , D_n 和 E_n 根据经典的简正波
 理论^[35]求得.

参考文献

- [1] Pekeris C L 1948 *Mem. Geol. Soc. Amer.* **27** 48
- [2] Press F, Ewing M 1950 *Geophysics* **15** 426
- [3] Porter M B, Reiss E L 1985 *J. Acoust. Soc. Am.* **77** 1760
- [4] Ainslie M A 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **97** 954
- [5] Schneiderwind J D, Collis J M, Simpson H J 2012 *J. Acoust. Soc. Am.* **132** EL182
- [6] Pierce A D 1965 *J. Acoust. Soc. Am.* **37** 19
- [7] Chwioroth F S, Nagl A, Uberall H, Zarur G L 1978 *J. Acoust. Soc. Am.* **64** 1105
- [8] Williams A O 1980 *J. Acoust. Soc. Am.* **67** 177
- [9] Rutherford S R, Hawker K E 1981 *J. Acoust. Soc. Am.* **70** 554
- [10] McDaniel S T 1982 *J. Acoust. Soc. Am.* **72** 916
- [11] Evans R B 1983 *J. Acoust. Soc. Am.* **74** 188
- [12] Porter M B, Jensen F B, Ferla C M 1991 *J. Acoust. Soc. Am.*

89 1058

- [13] Abawi A T, Kuperman W A 1997 *J. Acoust. Soc. Am.* **102** 233
- [14] Knobles D P, Stotts S A, Koch R A 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 781
- [15] Mo Y X, Piao S C, Zhang H G, Li L 2016 *Acta Acustica* **41** 154 (in Chinese) [莫亚泉, 朴胜春, 张海刚, 李丽 2016 声学学报 **41** 154]
- [16] Kennett B L N 1984 *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **79** 235
- [17] Odom R I 1986 *Geophys. J. R. Astron. Soc.* **86** 425
- [18] Hall M 1986 *J. Acoust. Soc. Am.* **79** 332
- [19] Maupin V 1988 *Geophys. J.* **93** 173
- [20] Collins M D 1993 *J. Acoust. Soc. Am.* **94** 975
- [21] Collins M D, Siegmund W L 1999 *J. Acoust. Soc. Am.* **105** 687
- [22] Jeroen T 1994 *Geophys. J. Int.* **117** 153
- [23] Abawi A T, Porter M B P 2008 <https://apps.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a541636.pdf>
- [24] Odom R I, Park M, Mercer J A, Crosson R S, Paik P 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 2079
- [25] Abawi A T, Porter M B 2007 *J. Acoust. Soc. Am.* **121** 1374
- [26] Xie Z, Matzen Rene, Cristini P, Komatitsch D, Martin R 2016 *J. Acoust. Soc. Am.* **140** 165
- [27] Luo W Y, Yu X L, Zhang R H 2016 *Acta Acustica* **41** 321 (in Chinese) [骆文于, 于晓林, 张仁和 2016 声学学报 **41** 321]
- [28] Mo Y X, Piao S C, Zhang H G, Li L 2014 *Acta Acustica* **39** 428 (in Chinese) [莫亚泉, 朴胜春, 张海刚, 李丽 2014 声学学报 **39** 428]
- [29] Chapman D M F, Ward P D, Ellis D D 1989 *J. Acoust. Soc. Am.* **85** 648
- [30] McCollom B A, Collis J M 2014 *J. Acoust. Soc. Am.* **136** 1036
- [31] Zhang Z Y, Tindle C T 1993 *J. Acoust. Soc. Am.* **93** 205
- [32] Stickler D C 1975 *J. Acoust. Soc. Am.* **57** 856
- [33] Westwood E K, Koch R A 1999 *J. Acoust. Soc. Am.* **106** 2513
- [34] Westwood E K, Tindle C T, Chapman N R 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 3631
- [35] Yang S E 1994 *Principle of Underwater Acoustic Propagation* (Harbin: Haerbin Engineering University Press) p16 (in Chinese) [杨士莪 1994 水声传播原理 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社) 第16页]

Coherent mode coupling in shallow water overlaying sloping elastic ocean bottom^{*}

Zhang Shi-Zhao³⁾ Piao Sheng-Chun^{1)2)3)†}

1) (*Acoustic Science and Technology Laboratory, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

2) (*Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security, Ministry of Industry and Information Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

3) (*College of Underwater Acoustic Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(Received 28 May 2021; revised manuscript received 22 June 2021)

Abstract

In this paper, a sound field model of elastically coupled normal mode suitable for complex eigenvalues is established. The normalization and coupling coefficient expression of elastic normal mode are given when the leaky mode is included. The coupling coefficients satisfy the conservation of sound energy flow. This model is used to analyze the coherent coupling characteristics of the normal mode of the sound field under the condition of the inclined elastic seabed. It is found that when the leaky mode is considered, the normal mode coupling will not only cause the amplitude of the normal mode to change, but also bring additional phase shift. The simulation calculation shows that under the condition of inclined elastic seabed, the acoustic propagation loss obtained by considering the effect of the additional phase shift of the leaky mode coupling is closer to the calculation result obtained by using the finite element commercial software, and that the mode coupling greatly enhances the amplitude of interface wave. In addition, this paper also analyzes the influence of changes in marine environmental parameters on sound transmission loss.

Keywords: elastic coupling mode model, leaky mode, phase shift

PACS: 43.30.+m

DOI: 10.7498/aps.70.20211013

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11474073) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 3514497).

[†] Corresponding author. E-mail: piaoshengchun@hrbeu.edu.cn