



量子中继过程中纠缠态的选择

石韬 吕丽花 李有泉

Selection of entanglement state in quantum repeater process

Shi Tao Lü Li-Hua Li You-Quan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 230303 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20211211

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211211>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

量子中继过程中纠缠态的选择*

石韬[†] 吕丽花 李有泉

(浙江大学物理系, 杭州 310027)

(2021年6月29日收到; 2021年7月30日收到修改稿)

实现量子中继的关键是克服量子存储器中纠缠态的退相干问题. 目前, 人们常用半导体量子点中的电子自旋来构建纠缠态从而实现量子中继过程. 在该过程中, 两个半导体量子点之间相距很远, 可以认为它们之间没有相互作用. 因此, 量子点内电子自旋与它周围的核自旋之间的超精细相互作用被认为是导致系统退相干的最重要原因之一. 在以前的相关工作中, 人们通常将核自旋对电子自旋的超精细相互作用视为一个大小和方向都是随机的并且满足高斯分布的等效磁场. 本文在考虑核自旋的等效磁场以及外加磁场的情况下, 研究了两个量子点中继系统的退相干问题. 首先利用数值方法分别计算了4组 Bell 基随时间的演化规律, 发现当外加磁场增大到一定值时, 4组 Bell 基被分为两类. 体系不可能通过时间演化从一类 Bell 基跃迁到另一类 Bell 基, 而只能在同类的两个 Bell 基之间相互跃迁. 这有效提高了系统的保真度, 并且抑制了核自旋对体系纠缠态的影响, 从而抑制退相干. 其次, 对于给定的较大外加磁场, 采用解析方法研究了核自旋涨落对纠缠态的影响, 给出了初态保真度及退相干时间的解析形式. 发现对于相同的核自旋涨落, 4组 Bell 基的退相干时间相同, 但是两类 Bell 基随时间演化的规律不同, 其中一类的保真度在指数衰减的同时伴随快速周期性振荡, 不便于操控. 期望本文的研究能对量子中继过程中纠缠态的选择问题提供理论支持和建议.

关键词: 量子远程传输, 量子中继, 纠缠态退相干, 保真度**PACS:** 03.67.-a, 03.67.Hk, 42.50.Dv, 42.50.Ex**DOI:** 10.7498/aps.70.20211211

1 引言

在量子信息传输过程中, 最重要的是在通信线路的两个节点上成功发送一对纠缠态. 每一对纠缠态可以作为一个量子传输通道, 进行量子信息的远程传输^[1,2]. 目前光子纠缠态是量子通信中唯一可以远距离飞行的纠缠态^[3-6], 然而单个光子在商用光纤中光强和极化都以 0.2 dB/km^[7,8] 的速率衰减, 这意味着商用光纤有效传输长度仅有 80—120 km^[7,8]. 因此, 为了增加量子传输通道距离, 一种方法是将量子传输通道分为好多节, 每一节长度在 120 km 内, 同时在两个节点之间放置一个包含两个量子存储器^[9]的量子中继器^[10], 如图 1(a) 所示. 在量子中

继器中, 量子存储器将光子的纠缠态储存为电子自旋的纠缠态^[11-13].

通常有 3 种利用光子干涉和探测将光子纠缠态交换到电子自旋纠缠态的方案, 分别为 EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) 方案^[8]、Hybrid 方案^[14]和 DLCZ (Duan-Lukin-Cirac-Zoller) 方案^[15]. DLCZ 方案由段路明等^[15]提出, 根据探测光子数不同, 该方案可以分为单光子探测方案和双光子探测方案. 与其他两个方案相比, DLCZ 方案最大的优点是不需要制备复杂的纠缠源, 只需要制备符合要求的量子存储器, 因而成为量子中继的主流之一. 在每个节点的量子中继器上, 利用纠缠态交换 (quantum swapping) 技术^[14-17], 可以逐步建立 Alice 与 Bob 之间的量子远程传输通道^[1,18], 如图 1(b) 和图 1(c)

* 国家重点研发计划 (批准号: 2017YFA0304304) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 21536032@zju.edu.cn

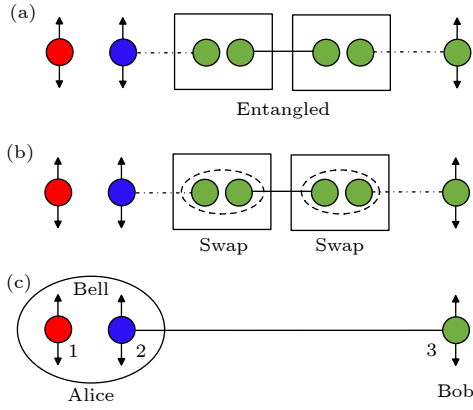


图 1 量子中继步骤 (a) 在每一段量子传输线路上分发纠缠态; (b) 在量子中继器中进行纠缠态的转移操作; (c) Alice 做 Bell 基测量, 量子比特 1 的信息通过量子比特 2 和 3 组成的纠缠态量子信息传输通道远程传到 Bob 处

Fig. 1. The process of quantum repeater: (a) Distributing entanglement states in every segment of quantum channel; (b) quantum swapping in quantum repeaters; (c) quantum teleportation. After Alice taking Bell state measurement, the information of qubit 1 is transferred to Bob via entanglement state of qubit 2 and 3.

所示. 能够作为量子存储器的系统, 其储存的纠缠态要有较长的退相干时间. 目前许多系统, 例如原子系综 [8,15]、半导体量子点 [12,19,20]、超导电路 [21,22] 等, 都可以用来做量子存储器. 以 GaAs 或者 Si 半导体量子点为例, 它们通过两个量子点中电子自旋的纠缠态来储存量子信息 [19,23]. 众所周知, 对于两个电子自旋系统, 可以选用 4 个最大纠缠态 (即 4 个 Bell 基) 为一组正交完备基矢来描述体系的状态 [17]. 如果体系在初始时刻处于某一个 Bell 基上, 由于核自旋对电子自旋的超精细相互作用, 随着时间的演化, 体系会有一定概率从初始时刻所处的 Bell 基跃迁到其他 Bell 基上, 从而导致了纠缠态的退相干 [13,19,24–26]. 为研究核自旋引起的纠缠态的退相干问题, 有文献将核自旋对电子自旋的超精细相互作用等效为一个大小和方向都是随机的等效磁场. 该磁场满足高斯分布 [24,25,27], 被命名为 Overhauser 场 [19,24,25,28]. 本文同时考虑核自旋及外加磁场对电子自旋的相互作用, 研究了系统纠缠态的退相干问题. 通过数值和解析方法, 分别计算了体系状态随时间的演化, 发现较大的外加磁场可以抑制电子自旋向上和自旋向下状态间的反转, 从而抑制了某些 Bell 基间的相互跃迁. 据此将 4 个 Bell 基分为两类, 每一类中包含两个 Bell 基. 只有在同类的两个 Bell 基之间存在相互跃迁, 而不同类 Bell 基之间不能相互跃迁, 这在一定程度上抑

制了系统纠缠态的退相干. 对于给定的外加磁场, 研究了核自旋涨落对纠缠态的退相干的影响. 发现对于相同的核自旋涨落, 两类 Bell 基的退相干时间相同, 但是两类 Bell 基随时间的演化规律不同, 其中一类 Bell 基的保真度在指数衰减的同时伴随快速周期性振荡, 不便于操控, 因此在量子中继过程中不建议选择.

2 等效磁场与理论模型

2.1 超精细相互作用和等效磁场

在半导体量子点, 如 GaAs 中, 电子自旋与它周围核自旋的超精细相互作用可以写成 [25]

$$H_{\text{hf}} = \sum_j A^j |\psi(\mathbf{R}_j)|^2 \hat{I}^j \cdot \mathbf{S},$$

$$A^j = \left(\frac{8\pi\nu_0\mu_0\mu_j}{3I^j} \right) |u_c(\mathbf{R}_j)|^2, \quad (1)$$

其中 $\psi(\mathbf{R}_j)$ 是第 j 个核自旋附近电子的包络波函数, 求和是对晶格中所有核自旋求和; ν_0 是晶胞的体积; \mathbf{S} 是电子自旋算符; μ_0 是玻尔磁子; μ_j , I^j , \mathbf{R}_j 分别对应核子磁矩、核自旋和第 j 个核自旋的位置, $u_c(\mathbf{R}_j)$ 是第 j 个核自旋附近电子的 Bloch 波函数. 将哈密顿量 (1) 关于核子的系综进行平均, 得到等效哈密顿量如下:

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{S}_1, \quad (2)$$

其中 $\mathbf{B}_N = \left\langle \sum_j A^j |\psi(\mathbf{R}_j)|^2 \hat{I}^j \right\rangle_I$ 为一等效磁场, 称为 Overhauser 场.

以 GaAs 量子点为例, 实验所施加外加磁场通常 0.2 T 左右 [19,24,28]. 核自旋的 Zeeman 能量 ω_n 对应的温度大约在 mK 量级 [28], 核自旋对电子自旋的相互作用对应的温度在 nK 量级 [19,28], 而系统所处温度在 K 量级 [18,28], 因此可以认为热涨落使体系中所有核自旋杂乱无序. 这样等效磁场 \mathbf{B}_N 各向同性, 在任意一个方向, 比如 z 方向, 其磁场大小可以用高斯分布来表示 [25]:

$$W(B_{Nz}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta_B} \exp\left(-\frac{B_{Nz}^2}{\Delta_B^2}\right), \quad (3)$$

式中

$$\Delta_B^2 = \frac{2}{3} \sum_j I^j (I^j + 1) a_j^2, \quad (4)$$

$$a_j \propto |u_c(\mathbf{R}_j)|^2 |\psi(\mathbf{R}_j)|^2, \quad (5)$$

其中 Δ_B^2 是等效磁场 B_{Nz} 的涨落 [18], B_{Nz} 的平均值为零 [19], 它们的实验值为 [19,28]

$$\Delta_B = 10 \text{ mT} \sim 10^8 \text{ Hz}, \quad (6)$$

$$B_{N_z} = 0. \quad (7)$$

同理,可以得到另外两个方向上等效磁场的高斯分布形式^[25]:

$$W(B_{N_x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta_B} \exp\left(-\frac{B_{N_x}^2}{\Delta_B^2}\right), \quad (8)$$

$$W(B_{N_y}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta_B} \exp\left(-\frac{B_{N_y}^2}{\Delta_B^2}\right). \quad (9)$$

2.2 理论模型

在量子中继中,组成最大纠缠态(4个Bell基)的两个电子自旋分别储存在相距80 km的两个GaAs量子存储器中,如图2所示.由于两个量子存储器相距很远,它们之间的相互作用可以忽略,因此电子自旋只感受到外加磁场及周围核自旋产生的等效磁场的相互作用,系统的哈密顿量如下:

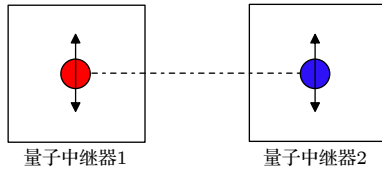


图2 两个相互纠缠的量子中继器,纠缠态为两个电子自旋组成的4个Bell基.

Fig. 2. Entanglement of the two separated quantum repeaters. Entangled states are the four Bell states constructed by two electron spins.

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_0(B_{1z} + B_{2z}) & -\mu_0(B_{1x} + B_{2x}) & i\mu_0(B_{1y} - B_{2y}) \\ -\mu_0(B_{1z} + B_{2z}) & 0 & -i\mu_0(B_{1y} + B_{2y}) & \mu_0(B_{1x} - B_{2x}) \\ -\mu_0(B_{1x} + B_{2x}) & i\mu_0(B_{1y} + B_{2y}) & 0 & -\mu_0(B_{1z} - B_{2z}) \\ -i\mu_0(B_{1y} - B_{2y}) & \mu_0(B_{1x} - B_{2x}) & -\mu_0(B_{1z} - B_{2z}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

B_{1z} 和 B_{2z} 的大小满足高斯分布且相互独立,两个相互独立的高斯分布相加或者相减也是高斯分布^[27].

既然 \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 在3个方向上的磁场大小相同,满足相同的高斯分布,因此可以将 \mathbf{H}_1 化简为

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_0 B_+ & -\mu_0 B_+ & i\mu_0 B_- \\ -\mu_0 B_+ & 0 & -i\mu_0 B_+ & \mu_0 B_- \\ -\mu_0 B_+ & i\mu_0 B_+ & 0 & -\mu_0 B_- \\ -i\mu_0 B_- & \mu_0 B_- & -\mu_0 B_- & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中 $B_+ = B_{1x(yz)} + B_{2x(yz)}$, $B_- = B_{1x(yz)} - B_{2x(yz)}$,

$$\widehat{\mathbf{H}} = \widehat{\mathbf{H}}_0 + \widehat{\mathbf{H}}_1,$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_0 = -\mu_0 \boldsymbol{\sigma}_{1z} \cdot \mathbf{B}_0 - \mu_0 \boldsymbol{\sigma}_{2z} \cdot \mathbf{B}_0,$$

$$\widehat{\mathbf{H}}_1 = -\mu_0 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{B}_1 - \mu_0 \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{B}_2, \quad (10)$$

其中, $\widehat{\mathbf{H}}_0$ 为外加磁场对电子自旋的相互作用,而 $\widehat{\mathbf{H}}_1$ 为核自旋等效磁场对电子自旋的相互作用; μ_0 表示玻尔磁子, $\boldsymbol{\sigma}$ 表示泡利矩阵, \mathbf{B}_0 表示 z 方向的外加磁场, \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 分别表示两个GaAs量子存储器中的等效磁场(Overhauser field). \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 的表示形式如(3)式,(8)式和(9)式所示.

两个电子自旋组成的4个Bell基为

$$|\phi_{12}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle),$$

$$|\phi_{12}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle),$$

$$|\psi_{12}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle),$$

$$|\psi_{12}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (11)$$

以4个Bell基为基矢,哈密顿量 $\widehat{\mathbf{H}}_0$ 和 $\widehat{\mathbf{H}}_1$ 的具体表达式可以写为

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -2\mu_0 B_0 & 0 & 0 \\ -2\mu_0 B_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

并且

B_+ 和 B_- 也满足高斯分布,即

$$W(B_+) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta_B} \exp\left(-\frac{B_+^2}{2\Delta_B^2}\right), \quad (15)$$

$$W(B_-) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta_B} \exp\left(-\frac{B_-^2}{2\Delta_B^2}\right). \quad (16)$$

3 数值结果与分析

上文给出了系统的哈密顿量,接下来将利用数值方法求解体系满足的薛定谔方程,分别求得3种

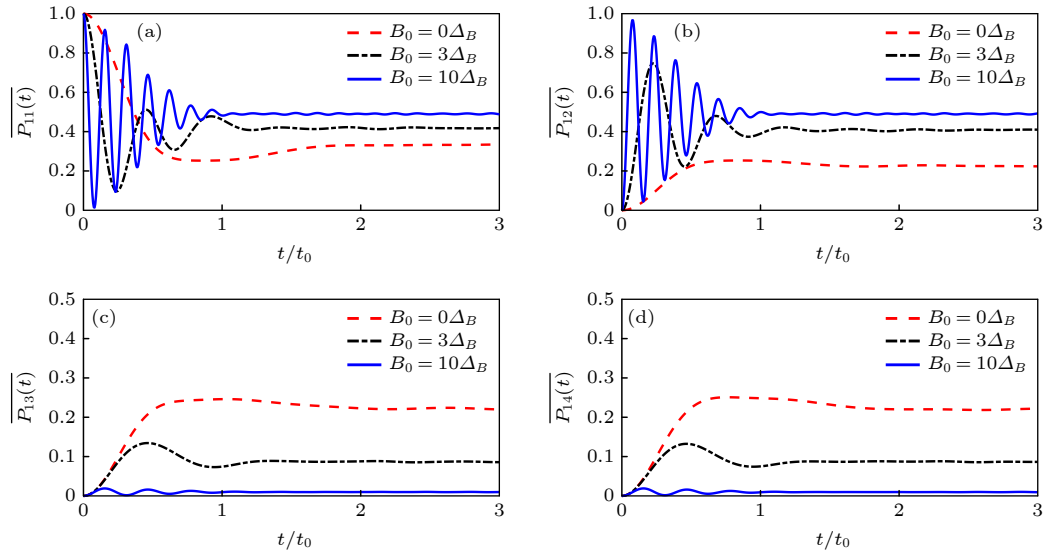


图3 3种不同大小的外加磁场下,体系处于4个不同Bell基上的几率随时间的演化规律 (a), (b), (c), (d) 分别对应系统处于 $|\phi_{12}^+\rangle$, $|\phi_{12}^-\rangle$, $|\psi_{12}^+\rangle$, $|\psi_{12}^-\rangle$ 的平均几率. 体系初态为 $|\phi_{12}^+\rangle$, 外加磁场参数为 $B_0 = 0$ (红色虚线), $B_0 = 3\Delta_B$ (黑色点划线), $B_0 = 10\Delta_B$ (蓝色实线). 时间以 $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$ 为单位

Fig. 3. Time evolution of mean probability in four Bell states: (a) $|\phi_{12}^+\rangle$, (b) $|\phi_{12}^-\rangle$, (c) $|\psi_{12}^+\rangle$, (d) $|\psi_{12}^-\rangle$ for different applied magnetic fields. The initial state is $|\phi_{12}^+\rangle$, and the parameters are $B_0 = 0$ (red dash line), $B_0 = 3\Delta_B$ (black dash dot line), $B_0 = 10\Delta_B$ (blue solid line). Time is in the unit of $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$.

不同磁场参数下4组Bell基之间的平均跃迁几率, 主要结果如图3和图4所示. 计算过程中, 所选外加磁场参数分别为 $B_0 = 0$, $B_0 = 3\Delta_B$, $B_0 = 10\Delta_B$, $\hbar = 1$, 时间以 $t_0 = 1/\mu_0\Delta_B$ 为单位. 根据方程(6)给出了 Δ_B 的大小, t_0 的大小为 10^{-8} s. 从图3可以看出, 初态为 $|\phi_{12}^+\rangle$, 外磁场 $B_0 = 0$ 时, Δ_B 使 $|\phi_{12}^+\rangle$ 的平均几率从1降低到0.34, 系统处在其他三个态上的几率从0增加到0.22; 当外磁场 B_0 从0增加到 $10\Delta_B$ 时, $|\phi_{12}^+\rangle$ 跃迁到 $|\psi_{12}^+\rangle$ 的几率从0.22减小到0.01, 而处在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 的几率在1/2附近, 若继续增加外磁场 B_0 , 则 $|\phi_{12}^+\rangle$ 跃迁到 $|\psi_{12}^+\rangle$ 的几率趋近于0, 系统只在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 之间振荡, 平均几率为1/2. 由此可见, 核自旋的存在能够使系统从初始所处的Bell基跃迁到另外Bell基, 从而导致了纠缠态的退相干, 而外加磁场的存在会抑制这种退相干, 使得系统的初态保真度增大. 特别是当外加磁场大到某一数值时, $|\phi_{12}^+\rangle$ 到 $|\psi_{12}^+\rangle$ 之间的跃迁被完全抑制, 系统只在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 之间振荡. 对于初态为 $|\phi_{12}^-\rangle$ 的情况, 得到与 $|\phi_{12}^+\rangle$ 相似的结论. 即随着外磁场的增大, 系统只在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 之间振荡, 而 $|\phi_{12}^-\rangle$ 跃迁到 $|\psi_{12}^+\rangle$ 的几率趋近于0.

从图4可以看出, 初态为 $|\psi_{12}^-\rangle$, 外磁场 $B_0 = 0$

时, Δ_B 使 $|\psi_{12}^-\rangle$ 的平均几率从1降低到0.34, 系统处在其他3个态上的几率从0增加到0.22; 当外磁场 B_0 从0增加到 $10\Delta_B$ 时, $|\psi_{12}^-\rangle$ 跃迁到 $|\phi_{12}^+\rangle$ 的几率从0.22减小到0.01, 而处在 $|\psi_{12}^-\rangle$ 和 $|\psi_{12}^+\rangle$ 的几率在1/2附近, 若继续增加外磁场 B_0 , 则 $|\psi_{12}^-\rangle$ 跃迁到 $|\phi_{12}^+\rangle$ 的几率趋近于0, 系统只在 $|\psi_{12}^-\rangle$ 和 $|\psi_{12}^+\rangle$ 之间振荡, 平均几率为1/2. 对于初态为 $|\psi_{12}^+\rangle$ 的情况, 得到与 $|\psi_{12}^-\rangle$ 相同的结论, 随着外磁场的增大, 系统只在 $|\psi_{12}^-\rangle$ 和 $|\psi_{12}^+\rangle$ 之间振荡, 平均几率为1/2; $|\psi_{12}^+\rangle$ 跃迁到 $|\phi_{12}^+\rangle$ 的几率趋近于0. 综合初态分别为4个不同Bell基的计算结果可以得知, 对于任何初态, 核自旋的存在能够使系统从初始所处的Bell基跃迁到另外Bell基, 从而导致了纠缠态的退相干, 而外加磁场的存在会抑制这种退相干, 使得系统的初态保真度增大. 特别是当外加磁场大到某一数值时, $|\phi_{12}^+\rangle$ 与 $|\psi_{12}^+\rangle$ 之间的跃迁被完全抑制, 系统只在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 之间或 $|\psi_{12}^-\rangle$ 和 $|\psi_{12}^+\rangle$ 之间相互跃迁, 从而使初态的保真度达到1/2. 因此, 对于外加磁场强度较大时, 4个Bell基被划分为两类, 即 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 为一类, 而 $|\psi_{12}^-\rangle$ 和 $|\psi_{12}^+\rangle$ 为另一类. 不同类的Bell基之间不存在相互跃迁, 所以在解析研究系统纠缠态的退相干问题时, 可以将系统由四维约化为两个二维问题处理.

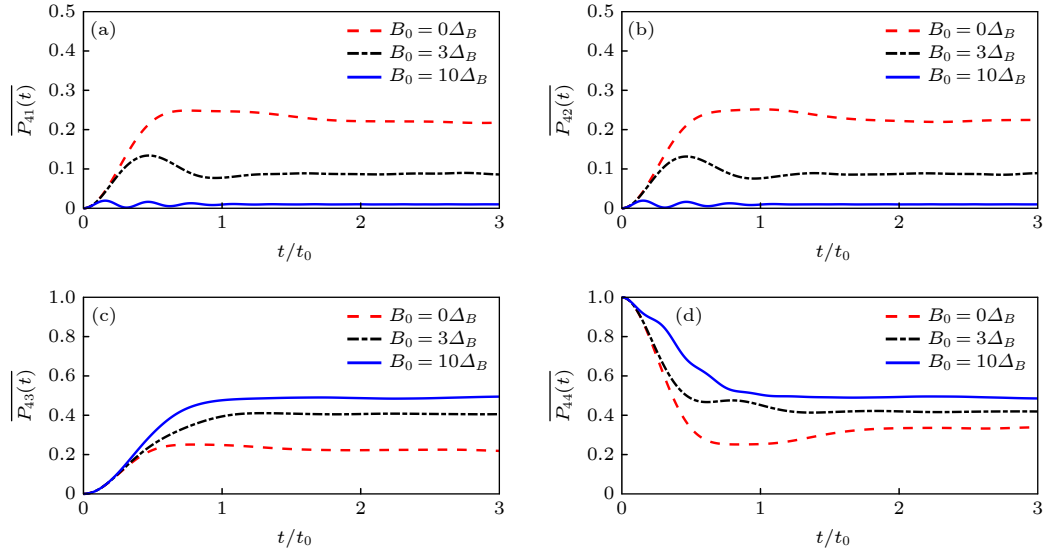


图 4 3 种不同大小的外加磁场下, 体系处于 4 个不同 Bell 基上的几率随时间的演化规律 (a), (b), (c), (d) 分别对应系统处于 $|\phi_{12}^+\rangle$, $|\phi_{12}^-\rangle$, $|\psi_{12}^+\rangle$, $|\psi_{12}^-\rangle$ 的平均几率. 体系的初态为 $|\psi_{12}^+\rangle$, 外加磁场参数为 $B_0 = 0$ (红色虚线), $B_0 = 3\Delta_B$ (黑色点划线), $B_0 = 10\Delta_B$ (蓝色实线). 时间以 $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$ 为单位

Fig. 4. Time evolution of mean probability in four Bell states: (a) $|\phi_{12}^+\rangle$, (b) $|\phi_{12}^-\rangle$, (c) $|\psi_{12}^+\rangle$, (d) $|\psi_{12}^-\rangle$ for different applied magnetic fields. The initial state is $|\psi_{12}^+\rangle$, and the parameters are $B_0 = 0$ (red dash line), $B_0 = 3\Delta_B$ (black dash dot line), $B_0 = 10\Delta_B$ (blue solid line). Time is in the unit of $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$.

4 解析结果与分析

第 3 节中通过数值方法研究了量子中继中系统纠缠态的退相干问题. 本节将通过解析方法, 进一步探究纠缠态的退相干规律, 给出减小退相干的理论建议. 当外加磁场 B_0 的数值大于等效磁场 B_+ 和 B_- 两个数量级^[19] 时, 忽略 B_+ 和 B_- 在 x 轴和 y 轴方向的分量, 仅考虑 z 方向的磁场, 这意味着电子自旋向上和自旋向下之间的反转被禁止. 因此, 系统只能在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 之间或 $|\psi_{12}^+\rangle$ 和 $|\psi_{12}^-\rangle$ 之间相互跃迁, 而 $|\phi_{12}^+\rangle$ 与 $|\psi_{12}^+\rangle$ 之间不能相互跃迁, 第 3 节的数值计算结果也表明了这一假设的有效性. 基于此, 包含两个电子自旋的四维系统的含时演化问题可以化为两个独立的二维系统去处理. 其中这两个二维希尔伯特空间的基矢分别为 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$, 以及 $|\psi_{12}^+\rangle$ 和 $|\psi_{12}^-\rangle$. 首先研究以 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 为基矢的情况, 其相应的 2×2 维哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -2\mu_0 B_0 - \mu_0 B_+ \\ -2\mu_0 B_0 - \mu_0 B_+ & 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

以上哈密顿量的本征值和本征态为

$$E_1^\pm = \pm \mu_0 (2B_0 + B_+), \quad (18)$$

$$|E_1^\pm\rangle = (1/\sqrt{2}) (|\phi_{12}^+\rangle \mp |\phi_{12}^-\rangle). \quad (19)$$

如果系统的初态为 $\varphi(0) = |\phi_{12}^+\rangle$, 那么经过时间 t 的演化后, 系统的所处的态为

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{-iHt} \varphi(0) \\ &= \cos(E_1^+ t) |\phi_{12}^+\rangle + i \sin(E_1^+ t) |\phi_{12}^-\rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

因此, 可以得到系统经过时间 t 的演化后仍然处在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 上的平均几率 $\overline{P_{11}(t)}$ 为

$$\begin{aligned} \overline{P_{11}(t)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_B}} \int \langle \phi_{12}^+ | \varphi(t) \rangle^2 \exp\left(-\frac{B_+^2}{2\Delta_B^2}\right) dB_+ \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + e^{-2\mu_0^2 \Delta_B^2 t^2} \cos(4\mu_0 B_0 t) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

而系统处在 $|\phi_{12}^-\rangle$ 上的平均几率 $\overline{P_{12}(t)}$ 为

$$\begin{aligned} \overline{P_{12}(t)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_B}} \int \langle \phi_{12}^- | \varphi(t) \rangle^2 \exp\left(-\frac{B_+^2}{2\Delta_B^2}\right) dB_+ \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - e^{-2\mu_0^2 \Delta_B^2 t^2} \cos(4\mu_0 B_0 t) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

将 $\overline{P_{11}(t)}$ 和 $\overline{P_{12}(t)}$ 随时间的演化关系画在图 5 中. 从图 5(a) 可以发现, $\overline{P_{11}(t)}$ 随着时间周期性振荡, 并且振幅随着时间指数衰减, 最终其值稳定为 1/2. 这里 $\overline{P_{11}(t)}$ 反映了系统初态的保真度, 所以 $|\phi_{12}^+\rangle$ 的最终保真度为 1/2, 相应的退相干时间约为 $1/(\mu_0\Delta_B)$. 对于系统初态为 $|\phi_{12}^-\rangle$ 的情况, 结果与 $|\phi_{12}^+\rangle$ 类同. $|\phi_{12}^-\rangle$ 的最终保真度也为 1/2, 相应的退相干时间同样约为 $1/(\mu_0\Delta_B)$.

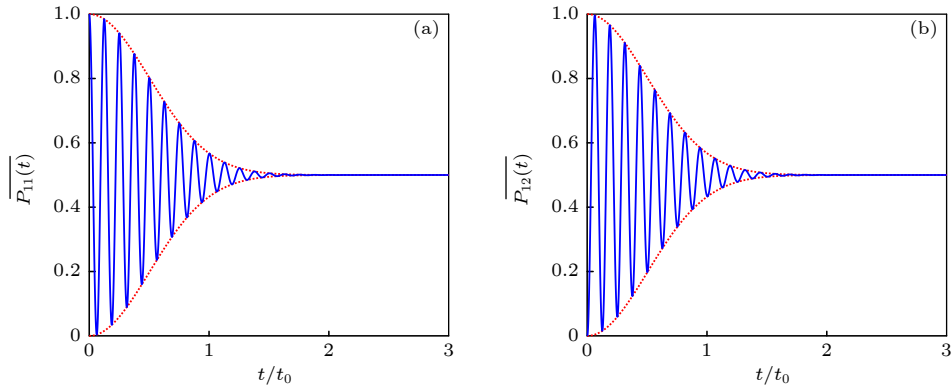


图 5 (a) 系统仍然处在 $|\phi_{12}^+\rangle$ 上的平均几率随时间的演化; (b) 系统跃迁到 $|\phi_{12}^-\rangle$ 的平均几率随时间的演化. 系统初态为 $|\phi_{12}^+\rangle$, 时间以 $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$ 为单位

Fig. 5. (a) Time evolution of the mean probability in $|\phi_{12}^+\rangle$, (b) that in $|\phi_{12}^-\rangle$. The initial state is $|\phi_{12}^+\rangle$, and the time is in the unit of $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$.

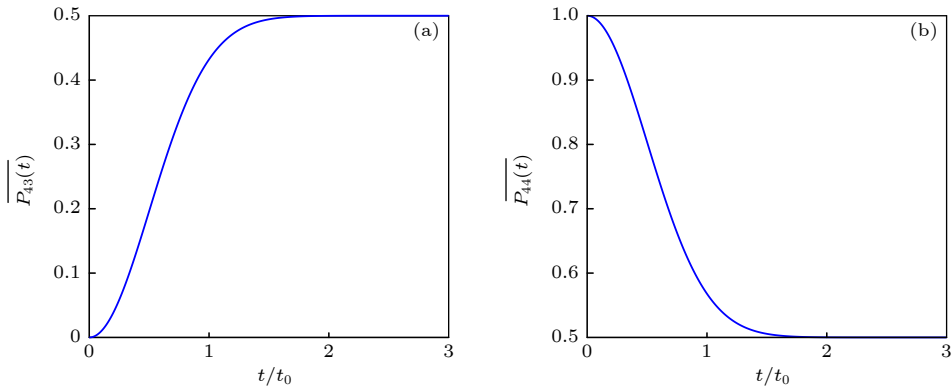


图 6 (a) 系统仍然处在 $|\psi_{12}^+\rangle$ 上的平均几率随时间的演化; (b) 系统跃迁到 $|\psi_{12}^-\rangle$ 的平均几率随时间的演化. 系统初态为 $|\psi_{12}^+\rangle$, 时间以 $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$ 为单位

Fig. 6. (a) Time evolution of the mean probability in $|\psi_{12}^+\rangle$, (b) that in $|\psi_{12}^-\rangle$. The initial state is $|\psi_{12}^+\rangle$, and the time is in the unit of $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$.

同样, 以 $|\psi_{12}^+\rangle$ 和 $|\psi_{12}^-\rangle$ 为基矢, 其相应的 2×2 维哈密顿量为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_0 B_- \\ -\mu_0 B_- & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

方程 (23) 的本征值和本征态为

$$E_2^\pm = \pm\mu_0 B_-, \quad (24)$$

$$|E_2^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_{12}^+\rangle \mp |\psi_{12}^-\rangle). \quad (25)$$

假定系统的初态为 $\varphi(0) = |\psi_{12}^-\rangle$, 那么经过时间 t 的演化后系统的末态为

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= e^{iHt} \varphi(0) \\ &= \cos(E_2^+ t) |\psi_{12}^-\rangle + i \sin(E_2^+ t) |\psi_{12}^+\rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

因此, 可以给出 t 时刻系统仍然处在 $|\psi_{12}^-\rangle$ 上的平均几率 $\overline{P_{44}}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \overline{P_{44}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_B} \int \langle \psi_{12}^- | \varphi(t) \rangle^2 \exp\left(-\frac{B_-^2}{2\Delta_B^2}\right) dB_- \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + e^{-2\mu_0^2 \Delta_B^2 t^2}\right), \end{aligned} \quad (27)$$

而跃迁到 $|\psi_{12}^+\rangle$ 上的平均几率 $\overline{P_{43}}(t)$ 为

$$\begin{aligned} \overline{P_{43}}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_B} \int \langle \psi_{12}^+ | \varphi(t) \rangle^2 \exp\left(-\frac{B_-^2}{2\Delta_B^2}\right) dB_- \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - e^{-2\mu_0^2 \Delta_B^2 t^2}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

同样, 如果系统初始时刻处于 $|\psi_{12}^+\rangle$ 上, 也可以求出 t 时刻系统仍然处于 $|\psi_{12}^+\rangle$ 上的平均几率以及跃迁到 $|\psi_{12}^-\rangle$ 上的几率, 表现出来的规律与初态为 $|\psi_{12}^+\rangle$ 的情况类似. 图 6 给出了 $\overline{P_{44}}(t)$ 和 $\overline{P_{43}}(t)$ 的含时演化图像. 可以看出, 对于系统的初态为 $|\psi_{12}^+\rangle$ 和 $|\psi_{12}^-\rangle$ 这一类 Bell 基, 随着时间的演化, 系统处在初态上的平均几率随着指数衰减, 但不存在振荡现

象, 这一点与初态为 $|\phi_{12}^+\rangle$ 和 $|\phi_{12}^-\rangle$ 这一类 Bell 基的情况不同. 当系统达到稳定时, 初态的保真度同样为 $1/2$, 退相干时间同样约为 $1/(\mu_0\Delta_B)$, 这与初态为 $|\phi_{12}^+\rangle$ 或 $|\phi_{12}^-\rangle$ 的情况相同.

5 结论与讨论

本文通过数值和解析两种方式研究了量子中继过程中两个半导体量子点的纠缠态的退相干规律. 数值结果表明, 外磁场为零时, 不管体系的初态为 4 个 Bell 基中的哪一个态, 由于核自旋的影响, 体系最终仍处于初态的平均几率即初态保真度约为 0.34, 而跃迁到另外 3 个 Bell 基态的平均几率约为 0.22. 当有外加磁场存在时, $|\psi_{12}^+\rangle$ 与 $|\phi_{12}^+\rangle$ 间的跃迁被外磁场压制, 并且当外磁场增大到一定值时, $|\psi_{12}^+\rangle$ 与 $|\phi_{12}^+\rangle$ 间的跃迁被完全禁止. 结果表明, 由于外加磁场抑制了 $|\psi_{12}^+\rangle$ 与 $|\phi_{12}^+\rangle$ 间的跃迁, 从而提高系统初态的保真度.

值得一提的是, Merkulov^[25]发现在单个量子点中, 随着外加磁场的逐渐增大, 自旋取向与外磁场方向一致, 因此核自旋仅会导致相位噪声而不会导致自旋翻转错误, 我们的理论研究也再次印证了这一结果. 并且与单个自旋不同的是, 在双量子点纠缠态中, 研究了外加磁场及核自旋对 4 个 Bell 基演化的影响. 在较大外磁场时, $|\psi_{12}^+\rangle$ 与 $|\phi_{12}^+\rangle$ 间不能相互跃迁, 所以我们将两个自旋构成的四维量子系统约化为两个独立的二维系统, 分别采用解析方法研究其量子态随时间的演化规律. 解析计算结果表明, 核自旋涨落是影响系统退相干的主要因素, 退相干时间及最终保真度不受体系初态的影响, 即 4 组 Bell 基的退相干时间均为 t_0 , 最终保真度均为 $1/2$. 但是我们也发现, 在 t_0 时间以内 ($t < t_0$), Bell 基 $|\psi_{12}^+\rangle$ 与 $|\phi_{12}^+\rangle$ 表现出很大的差异. 如果系统初态为 $|\psi_{12}^+\rangle$, 在含时演化过程中, $|\psi_{12}^+\rangle$ 对 z 方向磁场不敏感, 因而系统仍处于 $|\psi_{12}^+\rangle$ 的平均几率只是随时间呈指数衰减, 没有周期性振荡. 当系统初态为 $|\phi_{12}^+\rangle$, 在含时演化过程中, 系统仍处于 $|\phi_{12}^+\rangle$ 的平均几率在指数衰减的同时还伴随着频率为 $4\mu_0 B_0$ 的周期性振荡. z 方向微小的磁场变化可引起 $|\phi_{12}^+\rangle$ 很大的几率波动, 因而在量子中继过程中, 很难对其进行量子操控. 从这方面而言, 在量子中继中选 $|\psi_{12}^+\rangle$ 比 $|\phi_{12}^+\rangle$ 更易于操控.

既然研究结果表明, 系统的退相干时间主要受核自旋涨落的影响, 即 $t_0 = 1/(\mu_0\Delta_B)$, 所以要延长退相干时间必须减小核自旋等效磁场的涨落. 这要求将量子点中的电子囚禁在更小的范围内. 当电子在更小的范围内运动时, 电子自旋与更少数目的核自旋相互作用, 因此电子自旋和核自旋相互作用常数 a_j 将更小, 从而延长 t_0 . 有两种方式可以实现以上目的, 第一是降低量子点温度, 低温条件可以抑制电子热运动; 第二是选择电子波函数更紧致的硅半导体量子点来替代 GaAs 量子点. 期望本文的研究结果可以帮助更加深入地了解纠缠态的退相干机制, 进而利用半导体量子点的特性延长纠缠态的退相干时间. 进一步期望该结果能为实际量子中继过程中, 纠缠态选择问题提供理论支持和参考, 从而提高实验中的量子中继效率.

参考文献

- [1] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wotter W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [2] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, Eibl M, Weinfurter H, Zeilinger A 1997 *Nature* **390** 575
- [3] Ma X S, Herbst T, Scheidl, Wang D, Kropatschek S, Naylor W, Wittmann A, Mech J, Korfler E, Anisimova, Makarov V, Jennewein T, Ursin R, Zeilinger A 2012 *Nature* **489** 269
- [4] Vallone G, Bacco D, Dequal D, Gaiarin S, Luceri V, Bianco G, Villoresi P 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 040502
- [5] Yin J, Cao Y, Li Y H, Ren J G, Liao S K, Zhang L, Cai W Q, Liu W Y, Li B, Dai H, Li M, Huang Y M, Deng L, Li L, Zhang Q, Liu L N, Chen Y A, Lu C Y, Shu R, Peng C Z, Wang J Y, Pan J W 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 200501
- [6] Yin J, Cao Y, Li Y H, Liao S K, Zhang L, Ren J G, Cai W Q, Liu W Y, Li B, Dai H, Li G B, Lu Q M, Gong Y H, Xu Y, Li S L, Li F Z, Yin Y Y, Jiang Z Q, Li M, Jia J J, Ren G, He D, Zhou Y L, Zhang X X, Wang N, Chang X, Zhu Z C, Liu N L, Chen Y A, Lu C Y, Shu R, Peng C Z, Wang J Y, Pan J W 2017 *Science* **356** 1140
- [7] Dür W, Briegel H J, Cirac J I, Zoller P 1999 *Phys. Rev. A* **59** 169
- [8] Pfister A D, Salz M, Hettrich M, Poschinger U G, Schmidt-Kaler F 2016 *Appl. Phys. B* **122** 1
- [9] Greve K D 2013 *Towards Solid-State Quantum Repeaters: Ultrafast, Coherent Optical Control and Spin-photon Entanglement in Charged InAs Quantum Dots* (Heidelberg: Springer) pp21–39
- [10] Briegel H J, Dür W, Cirac J I, Zoller P 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5932
- [11] Freer S, Simmons S, Laucht A, Muhonen J T, Dehollain J P, Kalra R, Mohiyaddin F A, Hudson F E, Itoh K M, McCallum J C, Jamieson D N, Dzurak A S, Morello A 2017 *Quantum Sci. Technol.* **2** 015009
- [12] Kawakami E, Scarlino P, Ward D R, Braakman F R, Savage D E, Lagally M G, Friesen M, Coppersmith S N, Eriksson M A, Vandersypen L M K 2014 *Nat. Nanotechnol.* **9** 666
- [13] Specht H P, Nölleke C, Reiserer A, Uphoff M, Figueroa E,

- Ritter S, Rempe G 2011 *Nature*. **473** 190
- [14] Looock van P, Ladd T D, Sanaka K, Yamaguchi F, Nemoto K, Munro W J, Yamamoto Y 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 240501
- [15] Duan L M, Lukin M, Cirac J I 2001 *Nature* **414** 413
- [16] Pan J W, Bouwmeester D, Weinfurter H, Zeilinger A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3891
- [17] Lloyd S, Shahriar M S, Shapiro J H, Hemmer P R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 167903
- [18] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [19] Malinowski F K, Martins F, Cywiński L, Rudner M S, Nissen P D, Fallahi S, Gardner G C, Manfra M J, Marcus C M, Kuemmeth F 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 177702
- [20] Liu R B, Yao W, Sham L 2007 *New J. Phys.* **9** 226
- [21] Saito S, Zhu X B, Amstiss R, Matsuzaki Y, Kakuyanagi K, Shimo-Oka T, Mizuochi N, Nemoto K, Munro W J, Semba K 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 107008
- [22] Xiang Z L, Ashhab S, You J Q, Nori F 2013 *Rev. Mod. Phys.* **85** 623
- [23] Maune B M, Borselli M G, Huang B, Ladd T D, Deelman P W, Holabird K S, Kiselev A A, Alvarado-Rodriguez I, Ross R S, Schmitz A E 2012 *Nature* **481** 344
- [24] Yao W, Liu R B, Sham L J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 077602
- [25] Merkulov I A 2002 *Phys. Rev. B* **65** 205309
- [26] Assali L V C, Petrilli H M, Capaz R B, Koiller B, Hu X D, Sarma S D 2011 *Phys. Rev. B* **83** 165301
- [27] Eisenberg B, Sullivan R 2008 *Math. Mag.* **81** 362
- [28] Reilly D J, Taylor J M, Laird E A, Petta J R, Marcus C M, Hanson M P, Gossard A C 2007 *Phys. Rev. Lett.* **101** 236803

Selection of entanglement state in quantum repeater process*

Shi Tao[†] Lü Li-Hua Li You-Quan

(Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(Received 29 June 2021; revised manuscript received 30 July 2021)

Abstract

The decoherence of entanglement states stored in quantum memory is a major obstacle when implementing a quantum repeater. So far, the electron spins in quantum dots are usually utilized to construct entangled states in quantum repeater. In the quantum repeater process, the distance between quantum dots is large, so the interaction between them can be neglected. Thus the hyperfine interaction between the electron spin and its neighbor nuclear spins in the quantum dot is considered to be the main reason for the decoherence of the system. In early researches, the hyperfine interaction between the electron spin and its neighbor nuclear spins was considered as an effective magnetic field whose magnitude and direction are random and the magnitude follows the Gaussian distribution. In this paper, we simultaneously consider an applied magnetic field and the interaction between the electron spin and its neighbor nuclear spins, and investigate the decoherence of the quantum repeater of two quantum dots. We first solve the time evolution of the system by the numerical method, and the result shows that when the applied magnetic field is increased to a certain value, the four Bell states can be divided into two kinds, each with two Bell states. The system cannot transit from the Bell state in one kind to that in the other kind, but can transit between two Bell states with in the same kind. This effectively improves the fidelity of the initial state and suppresses the decoherence of the system. For a given applied magnetic field with large magnitude, we theoretically study the effect of the fluctuation of nuclear spin on the entangled state, and give an analytical expression for each of the fidelity and the decoherence time of the initial state. We show that the decoherence times of the four Bell states are the same, but the time evolutions of the Bell states belonging to different kinds are different obviously. The fidelity of two Bell states not only decays exponentially but also oscillates rapidly, so such two Bell states are difficult to be manipulated and not suggested in quantum repeater process. The results in this paper are expected to provide theoretical suggestions for selecting the entangled states in quantum repeater.

Keywords: quantum teleportation, quantum repeater, decoherence of entanglement state, quantum fidelity

PACS: 03.67.-a, 03.67.Hk, 42.50.Dv, 42.50.Ex

DOI: 10.7498/aps.70.20211211

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2017YFA0304304).

[†] Corresponding author. E-mail: 21536032@zju.edu.cn