

量子弱测量中纠缠对参数估计精度的影响

张晓东 於亚飞 张智明

Influence of entanglement on precision of parameter estimation in quantum weak measurement

Zhang Xiao-Dong Yu Ya-Fei Zhang Zhi-Ming

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 240302 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210796

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210796>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

量子弱测量中纠缠对参数估计精度的影响*

张晓东¹⁾ 於亚飞^{1)†} 张智明^{2)‡}

1) (华南师范大学信息光电子科技学院, 广东省微纳米光子功能材料与器件重点实验室, 广州 510006)

2) (华南师范大学, 广东省量子调控工程与材料重点实验室, 广州 510006)

(2021年4月25日收到; 2021年8月4日收到修改稿)

量子弱测量过程中适当的弱值可用于放大微弱物理参数并提高参数评估的精度, 这种参数评估精度的提高可能来源于体系中的纠缠. 本文借助 Fisher 信息研究了系统中的纠缠和系统与探针间的纠缠对弱测量过程中系统与探针间耦合参数的评估精度的影响. 分析了系统初态分别为类 GHZ 态的纠缠纯态和受退极化噪声影响的纠缠混态的纠缠, 以及系统和探针间的纠缠对参数评估的影响. 研究表明, 当系统初态为类 GHZ 态的纠缠纯态和受退极化噪声影响的纠缠混态时, Fisher 信息随系统初态纠缠度的增大而增大, 且系统初末态均为最大纠缠态时, Fisher 信息和后选择概率均达到最大; 但系统与探针的纠缠越弱, 测量能获得的 Fisher 信息越多, 参量估计的精度越高. 此研究结果表明系统中的纠缠会提高参数评估精度, 而系统与探针间的纠缠则会降低参数评估的精度.

关键词: 弱测量, 弱值, 纠缠, Fisher 信息

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ud, 06.20.-f

DOI: 10.7498/aps.70.20210796

1 引言

在量子物理中量子测量必然会对系统造成扰动, 根据对系统扰动的大小可以把量子测量分为强测量和弱测量, 其中对系统扰动较大的量子测量被称为强测量, 反之称为弱测量. 强测量后系统状态会被不可逆地投影到测量基上, 而且测得观察量的平均值会介于观察量算符最小本征值和最大本征值之间. 而弱测量是由 Aharonov^[1] 于 1988 年提出的概念, 其测量过程通常分为 3 个步骤: 系统和探针初态的制备、系统和探针的相互作用、对系统的后选择. 在系统和探针相互作用过程中系统和探针之间的耦合通常很弱, 因此对系统的扰动很小. 并且在后选择过程中会抛弃大量的数据, 仅保留少量的数据, 但是几乎所有待评估参数的信息都集中在这些少量数据中. 例如, 测量小的光束偏转时, 仅

收集 1% 的光子就可以获得 99% 的 Fisher 信息^[2]. 而且后选择之后, 会有一个有趣的现象, 此时测得的“观察量”, 即观察量算符在系统初末态之间的平均值, 往往是超出特征值范围的复数, 这个复数被称为弱值, 这种测量过程又被称为弱值放大^[3,4].

到目前为止, 弱值放大技术应用于精密测量领域的诸多方面. 如利用弱值能远远超出观察量本征值范围这一特性, 弱值放大能被应用于放大小的物理量, 如对光束的横向偏移^[5,6]、激光的频率^[7]、角旋转^[8]、纵向速度^[9]、温度^[10,11] 以及系统和探针之间耦合参数的测量^[12–17]. 测量这些小的物理量时人们通常关注于对这些小物理量的放大倍数、灵敏度、精度和信噪比. 如在文献^[15] 中白光也能用于测量纵向相移, 并且灵敏度是阿秒量级. 在文献^[16] 测量纵向相移过程中, 在系统探针相互作用之前引入一个预耦合, 会使得测量灵敏度高于文献^[15] 所得灵敏度两个量级. 在文献^[17] 中非幺正演化相较

* 国家自然科学基金 (批准号: 61941501, 61775062, 62075129) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yuyafei@m.scnu.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: zhangzhiming@m.scnu.edu.cn

于么正演化有更高的参数评估精度和信噪比. 虽然弱值放大能够放大很多小参数, 但几乎正交的系统初末态会导致较低的后选择概率, 目前有多种方案来解决这个问题. 如文献 [18] 在 Sagnac 干涉仪中利用弱值放大技术测量光束的横向偏移, 通过在亮端口放置一个部分反射的功率镜, 可以将亮端口丢弃的数据反射, 再经过一个空间滤波镜片将光的横向轮廓刷新后回到弱值放大过程中, 此方案在提高后选择概率的同时也能提高信噪比, 并且在实验上实现了功率循环的弱值放大 [19]. 另一种方法是利用纠缠系统态来提高后选择概率 [20,21].

文献 [20, 21] 表明, 增大系统维度能够有效地增大后选择概率, 本文详细研究了在弱测量中系统纠缠以及系统探针之间的纠缠对参数评估精度的影响. 首先把系统初态选择为纠缠态, 探针初态选择为高斯态, 两者在弱相互作用后对系统进行后选择, 通过分析系统初态的纠缠度和后选择后耦合参数总的 Fisher 信息来讨论系统纠缠对参数评估的影响. 其次在弱测量过程中, 系统和探针要进行弱相互作用, 弱相互作用会使得系统和探针纠缠起来, 这里把系统选择为单个比特, 进而度量系统与探针之间的纠缠来分析系统与探针的纠缠对耦合参数 Fisher 信息的影响.

在分析系统纠缠对参数评估精度的影响时, 我们的研究表明耦合参数的 Fisher 信息随着系统纠缠度的增大而增大. 而在分析系统和探针间的纠缠对参数评估精度的影响时发现, 随着系统和探针之间的耦合参数 g 的增大, 系统和探针间的纠缠度越大, 能获得的耦合参数的 Fisher 信息反而越小. 换句话说, 系统中的纠缠有助于提高耦合参数的 Fisher 信息, 而系统与探针之间的纠缠会抑制耦合参数 Fisher 信息的获得.

本文的结构如下: 第 2 节简洁地介绍弱测量的理论框架; 第 3 节讨论在弱测量中系统纠缠对参数评估精度的影响, 其中 3.1 节讨论系统初态为类 GHZ 态的纠缠纯态时的情况, 3.2 节讨论系统初态为受退化噪声影响的纠缠混态时的情况, 3.3 节对直积系统初态和纠缠系统初态做了对比分析; 第 4 节讨论系统和探针之间的纠缠对参数评估精度的影响; 第 5 节给出了本文的结论.

2 弱值放大的理论框架

首先简洁地介绍弱值放大基本原理. 如图 1 所示, 初始态被制备成 $|S_i\rangle \otimes |T\rangle$, $|S_i\rangle$ 是系统初态,

$|T\rangle = \int T(p) |p\rangle dp$ 是探针初态, 在动量空间中探针初始的动量分布可以写成 $P(p) = |T(p)|^2$ 的形式. 探针初态中的 $T(p) = (\sqrt{2\pi}\delta)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{p^2}{4\delta^2}\right)$, 其中 p 和 δ 分别是探针的动量及动量的方差. 初始态制备之后系统和探针会通过弱相互作用耦合起来. 总的哈密顿量为 $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{int}}$, 其中 \hat{H}_0 是系统和探针的自由哈密顿量, $\hat{H}_{\text{int}} = g(t)\hat{A} \otimes \hat{p}$ ($\hbar = 1$) 是系统探针的相互作用哈密顿量. 在相互作用绘景中演化算符可写成 $\hat{U} = \exp(-ig\hat{A} \otimes \hat{p})$ ($g = \int g(t)dt$), 这里 $\hat{A} = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_z^i$, 其中 $\hat{\sigma}_z^i = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ 是第 i 个系统比特观察量算符. 因此系统和探针弱耦合之后的联合态可以写成:

$$|\Psi\rangle = \hat{U}(|S_i\rangle \otimes |T\rangle). \quad (1)$$

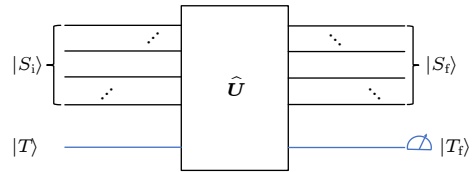


图 1 n 量子比特系统弱测量的原理图. 系统初始态为 $|S_i\rangle$, 探针初始态为 $|T\rangle$. 系统和探针之间的演化算符为 \hat{U} . 演化后对系统做 $|S_f\rangle$ 的后选择. 探针末态为 $|T_f\rangle$

Fig. 1. Schematic diagram of the weak measurement of the n qubit system. The initial state of the system is $|S_i\rangle$, and the initial state of the pointer is $|T\rangle$. The evolution operator is \hat{U} between the system and the pointer. After the evolution, the system is selected to $|S_f\rangle$. The final state of the pointer is $|T_f\rangle$.

对相互作用后的系统进行后选择, 后选择到态 $|S_f\rangle$. 根据测量理论, 把投影算子 $\hat{\Pi}_f = |S_f\rangle\langle S_f|$ 作用到 (1) 式可以得到归一化的探针末态

$$|T_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_d}} \langle S_f | \hat{U} (|S_i\rangle \otimes |T\rangle), \quad (2)$$

其中 $P_d = \langle \Psi | \hat{\Pi}_f | \Psi \rangle$ 是成功投影到后选择态 $|S_f\rangle$ 的概率. 对后选择之后的探针态在动量空间进行测量可以得到以下形式:

$$T_f(p) = \frac{1}{\sqrt{P_d}} \langle p | \langle S_f | \exp(-ig\hat{A} \otimes \hat{p}) (|S_i\rangle \otimes |T\rangle). \quad (3)$$

在弱相互作用条件 $g|A_w|\delta \ll 1$ 下, (3) 式可以重新写成:

$$T_f(p) \approx \frac{1}{\sqrt{P_d}} \langle S_f | S_i \rangle \exp(-igA_w p) T(p), \quad (4)$$

其中 $A_w = \langle S_f | \hat{A} | S_i \rangle / \langle S_f | S_i \rangle$ 是算符 \hat{A} 的弱值. 当预

选择态和后选择态几乎正交时, 弱值会很大, 但随之而来的是较低的后选择概率。

3 在弱测量中系统纠缠对参数评估的影响

下面分两部分研究系统纠缠对参数评估的影响, 3.1 节研究系统初态为类 GHZ 态的纠缠纯态时对参数评估的影响, 3.2 节研究系统初态为受退极化噪声影响的纠缠混态时对参数评估的影响, 3.3 节对比分析直积系统初态与最大纠缠系统初态对耦合参数 Fisher 信息的影响。

3.1 系统初态为纠缠纯态

首先讨论系统初态为类 GHZ 态的纠缠纯态的情况, 设定系统初态为 n 体的类 GHZ 态的纠缠纯态 $|S_i\rangle = \cos\theta|0\rangle^{\otimes n} + \sin\theta|1\rangle^{\otimes n}$, 探针为动量空间的高斯态 $|T\rangle = \int T(p) |p\rangle dp$, 两者通过弱相互作用 $\hat{U} = \exp(-ig\hat{A} \otimes \hat{p})$ 耦合起来. 耦合后的联合态可以写成以下形式:

$$|\Phi\rangle = \int (\cos\theta e^{-ingp}|0\rangle^{\otimes n} + \sin\theta e^{ingp}|1\rangle^{\otimes n}) T(p) |p\rangle dp. \quad (5)$$

接着对系统进行后选择 $|S_f\rangle = \cos\varphi|0\rangle^{\otimes n} - \sin\varphi e^{-i\varepsilon}|1\rangle^{\otimes n}$. 成功后选择到态 $|S_f\rangle$ 的概率为

$$P_d = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta \cos 2\varphi - e^{-2g^2 n^2 \delta^2} \sin 2\theta \sin 2\varphi \cos \varepsilon). \quad (6)$$

后选择之后的探针末态可以写成:

$$T_f(p) = \frac{1}{\sqrt{P_d}} \langle p | \langle S_f | \hat{U} (|S_i\rangle |T\rangle) = \frac{1}{\sqrt{P_d}} [\cos\theta \cos\varphi e^{-ingp} - \sin\theta \sin\varphi e^{i(ngp+\varepsilon)}] T(p). \quad (7)$$

接着对后选择之后的探针在动量空间探测, 在探测器上能得到归一化的分布为

$$P(g, p) = \frac{1}{2P_d} [1 + \cos 2\theta \cos 2\varphi - \cos(2gnp + \varepsilon) \sin 2\theta \sin 2\varphi] P(p). \quad (8)$$

信息论中对 g 的最优估计由 CR 边界 (Cramer-Rao bound) $\Delta g \geq 1/\sqrt{NF_{\text{tot}}}$ 给出, 这里 N 是独立实验的次数, F_{tot} 是总的 Fisher 信息. 总的 Fisher 信息包含两部分 [22], 其中一部分为后选择概率中

g 的 Fisher 信息 $F_{P_d} = \frac{1}{P_d} \left(\frac{\partial P_d}{\partial g} \right)^2$, 另一部分是动量分布 $P(g, p)$ 中 g 的 Fisher 信息

$$F_1 = P_d \int \frac{1}{P(g, p)} \left(\frac{\partial P(g, p)}{\partial g} \right)^2 dp.$$

由 (6) 式和 (8) 式可知, 后选择概率以及后选择后探针分布中均含有 g 的 Fisher 信息, 因此可以求得总的 Fisher 信息 F_{tot} . 这里分析后选择概率 P_d 和总的 Fisher 信息 F_{tot} 随 θ 和 φ 的变化情况。

从图 2(a) 可以得知, 后选择概率在 $\theta + \varphi = \pi/2$ 附近时, 预选择态和后选择态几乎正交, 此时的后选择概率最小; 在 $\theta = \varphi = 0$ 或 $\theta = \varphi = \pi/2$ 时, 系统初末态均为 $|0\rangle^{\otimes n}$ 或 $|1\rangle^{\otimes n}$, 此时的后选择概率最大. 而从图 2(b) 可以看出, 在 $\theta + \varphi = \pi/2$ 时, 能获得参数 g 的 Fisher 信息最大; 在 $\theta = \varphi = 0$ 或 $\theta = \varphi = \pi/2$ 时几乎不能得到任何信息. 从以上结果可以得知弱测量以牺牲后选择概率为代价来获得更多参数 g 的 Fisher 信息。

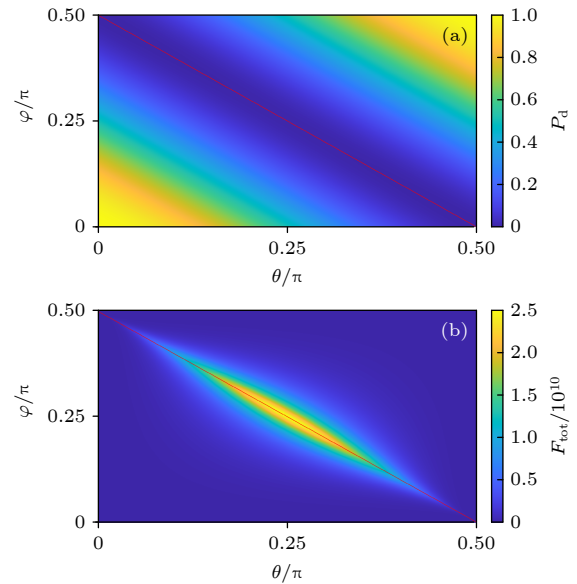


图 2 (a) 后选择概率 P_d 随 θ 和 φ 的变化趋势; (b) 总的 Fisher 信息 F_{tot} 随 θ 和 φ 的变化趋势. 图中红色的线表示 $\theta + \varphi = \pi/2$. 参数选取为 $n = 2$, $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$, $g = 0.88 \mu\text{m}$

Fig. 2. (a) Post-selection probability P_d as a function of θ and φ ; (b) total Fisher information F_{tot} as a function of θ and φ . The red line represent $\theta + \varphi = \pi/2$. Parameters selection: $n = 2$, $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$, $g = 0.88 \mu\text{m}$.

为了对参数 g 进行最优评估, 选取 $\varphi = \pi/2 - \theta$ 进行分析, 此时系统末态为 $|S'_f\rangle = \sin\theta|0\rangle^{\otimes n} - \cos\theta e^{-i\varepsilon}|1\rangle^{\otimes n}$, (6) 式和 (8) 式改写成以下形式:

$$P_d = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) (1 - e^{-2g^2 n^2 \delta^2} \cos \varepsilon),$$

$$P(g, p) = \frac{\sin^2(2\theta)}{P_d} \sin^2 \left(n g p + \frac{\varepsilon}{2} \right) P(p). \quad (9)$$

在弱相互作用条件 $n g \delta \cot \varepsilon \ll 1$ 下, 又可以把 (9) 式中的 $P(g, p)$ 重写成以下形式:

$$P(g, p) \approx \frac{\sin^2(2\theta)}{P_d} \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} P \left(p - 2n g \delta^2 \cot \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (10)$$

初始探针分布 $P(p)$ 中 p 的平均值 $\bar{p} = 0$. 由 (10) 式可以得到平均值偏移量 $\Delta \bar{p} = 2g\delta^2 |A_w|$, 与弱值 $A_w = i n \cot(\varepsilon/2)$ 的虚部成正比. 测量 $P(g, p)$ 下 p 的平均值 $\langle p \rangle$ 可以用来估计 g , 而参数的估计精度可以用 Fisher 信息来衡量. 通过 (9) 式可以求得后选择概率和探针末态中的 Fisher 信息分别为

$$F_{P_d} = \frac{8 \sin^2(2\theta) n^4 g^2 \delta^4 \cos^2 \varepsilon}{e^{4n^2 g^2 \delta^2} - e^{2n^2 g^2 \delta^2} \cos \varepsilon},$$

$$F_1 = 2 \sin^2(2\theta) n^2 \delta^2$$

$$\times \left[1 + \left(e^{-2n^2 g^2 \delta^2} - \frac{4n^2 g^2 \delta^2}{e^{2n^2 g^2 \delta^2} - \cos \varepsilon} \right) \cos \varepsilon \right], \quad (11)$$

参数 g 总的 Fisher 信息为

$$F_{\text{tot}} = 2 \sin^2(2\theta) n^2 \delta^2 [1 + e^{-2n^2 g^2 \delta^2} (1 - 4n^2 g^2 \delta^2) \cos \varepsilon]. \quad (12)$$

由 CR 边界可知, Fisher 信息越大, 理论上能获得 g 的精度越高. 为了研究系统初态的纠缠度对参数评估精度的影响, 首先需要度量系统初态的纠缠度. 这里运用对数负纠缠来度量系统初态的纠缠度 [23]:

$$E_s^{(p)} = \log_2(1 + \sin 2\theta), \quad (13)$$

其中下标“s”表示系统, 上标“p”表示纯态. 这里需要强调的是系统末态也具有相同的纠缠度. 接下来分析系统初态的纠缠度随参数 θ 的变化, 如图 (3) 所示.

从图 3 可以看出, 系统初态的纠缠度随 θ 角先增大后减小, 当参数 $\theta = \pi/4$ 时系统初态的纠缠度最大, 此时系统的初态 $|S_1^m\rangle = (|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})/\sqrt{2}$ 为最大纠缠态.

为了进一步分析后选择概率和耦合参数 g 的 Fisher 信息与系统初态纠缠度的关系, 绘制了 $n = 2$ 时后选择概率和 Fisher 信息随纠缠度 $E_s^{(p)}$ 的变化曲线.

从图 4 可看出, 后选择概率和参数 g 的 Fisher 信息随系统初末态纠缠度的增大而增大. 当系统初

态纠缠度为零时, 系统的初态为直积态 $|S_0\rangle = |0\rangle^{\otimes n}$ 或 $|S_1\rangle = |1\rangle^{\otimes n}$, 此时得不到参数 g 的 Fisher 信息. 然而当系统的纠缠度最大时, 系统初态 $|S_1^m\rangle = (|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})/\sqrt{2}$ 和系统的末态 $|S_1^m\rangle = (|0\rangle^{\otimes n} - e^{-i\varepsilon}|1\rangle^{\otimes n})/\sqrt{2}$ 均为最大纠缠态, 此时的 Fisher 信息和后选择概率均达到最大, 即在弱测量中, 增大系统内的纠缠度对参数 g 的评估精度有很好的增益.

从以上的分析可知, 系统初末态均为最大纠缠态时后选择概率和 Fisher 信息均达到最大. 然而在实验上制备最大纠缠态时难免会受到噪声的干扰, 因此接下来选定系统末态为 $|S_1^m\rangle$ 来讨论系统初态为纠缠混态时, 系统初态的纠缠度对参数评估的影响.

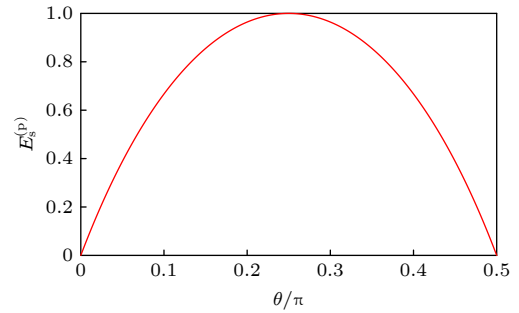


图 3 类 GHZ 态的纠缠纯态的纠缠度 $E_s^{(p)}$ 随参数 θ 的变化曲线, 绘制了 $\theta = \{0, \pi/2\}$ 的范围

Fig. 3. Entanglement $E_s^{(p)}$ of the entangled pure states of GHZ-like states as a function of the parameter θ . we have plotted the range of $\theta = \{0, \pi/2\}$.

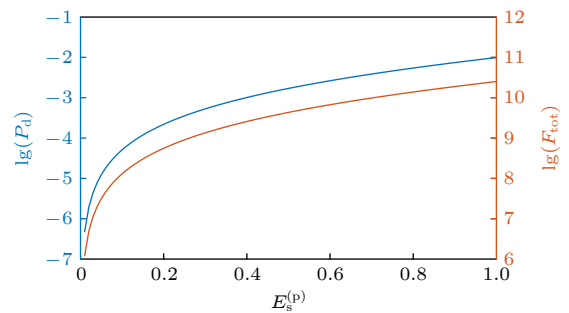


图 4 蓝色曲线表示后选择概率随纠缠度 $E_s^{(p)}$ 的变化曲线, 橙色曲线表示耦合参数 g 的 Fisher 信息随纠缠度 $E_s^{(p)}$ 的变化曲线. 参数选取: $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$, $g = 0.88 \text{ } \mu\text{m}$, $n = 2$.

Fig. 4. Blue curve represents the post-selection probability as a function of entanglement $E_s^{(p)}$, and the orange curve represents the Fisher information of the coupling parameter g as a function of entanglement $E_s^{(p)}$. Parameter selection: $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$, $g = 0.88 \text{ } \mu\text{m}$, $n = 2$.

3.2 系统初态为纠缠混态

在制备最大纠缠的系统初态时,会受到噪声的影响,这里仅考虑退极化噪声的影响.此时的系统初态为混合态 $\hat{\rho}_{\text{pre}}^n = \frac{Q}{2^n} \hat{I} + (1-Q) |S_1^m\rangle \langle S_1^m|$, 这里的 Q 是纯度参数. 同时把探针初态写成密度矩阵的形式 $\hat{\sigma} = |T\rangle \langle T|$, 因此总的初态为

$$\hat{\rho}_{\text{pre}}^n \otimes \hat{\sigma} = \left[\frac{Q}{2^n} \hat{I} + (1-Q) |S_1^m\rangle \langle S_1^m| \right] \otimes |T\rangle \langle T|. \quad (14)$$

系统和探针经过弱相互作用后的态可以写成以下形式

$$\hat{\rho}_U^n = \hat{U} (\hat{\rho}_{\text{pre}}^n \otimes \hat{\sigma}) \hat{U}^\dagger = \hat{U} \left\{ \left[\frac{Q}{2^n} \hat{I} + (1-Q) |S_1^m\rangle \langle S_1^m| \right] \otimes |T\rangle \langle T| \right\} \hat{U}^\dagger. \quad (15)$$

对演化后的系统做后选择 $|S_1^m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle^{\otimes n} - e^{-i\varepsilon} |1\rangle^{\otimes n})$, 成功后选择的概率为

$$P_d = \text{tr}(\hat{\Pi}_f^+ \hat{\Pi}_f \hat{\rho}_U^n) = (1-Q) \left(1 - e^{-2g^2 n^2 \delta^2} \cos \varepsilon \right) + 2^{-n} Q. \quad (16)$$

后选择之后,对探针末态测量可以得到一个在动量空间的概率分布:

$$P(g, p) = \frac{1}{P_d} \left[\frac{Q}{2^n} + 2(1-Q) \sin^2 \left(n g p + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] P(p). \quad (17)$$

根据 (16) 式和 (17) 式能够得到总的 Fisher 信息. 而对于系统初态为纠缠混态 $\hat{\rho}_{\text{pre}}^n$ 的情况, 同样使用对数负纠缠来度量其纠缠度^[23], 得到的纠缠度为

$$E_s^{(m)} = \log_2 \left(2 - \frac{2^{n-1} + 1}{2^{n-1}} Q \right), \quad (18)$$

其中下标“s”表示系统, 上标“m”表示混态. 图 5 给出了 $n=2$ 时系统初态的纠缠度随纯度参数 Q 的变化曲线.

图 5 表明纠缠度随着纯度参数的增大而减小, 当 $Q \leq 2/3$ 时, 系统初态是纠缠态, 当 $Q > 2/3$, 系统初态已不再纠缠.

接下来分析系统初态的纠缠度对参数评估精度的影响, 并画了 $n=2, 4, 6$ 时后选择概率以及 Fisher 信息随系统初态纠缠度的变化曲线.

从图 6 可以看出, 当系统初态为受退极化噪声影响的纠缠混态时, 参数的 Fisher 信息随初态纠缠度的增大而增大. 当初态的纠缠度达到 1 时, 参数 g 的 Fisher 信息能够达到最大. 而且可以看出

系统中纠缠的比特数越大, 参数 g 的 Fisher 信息越大. 后选择概率在 $n=2$ 和 $n=4$ 时随着纠缠度 $E_s^{(m)}$ 的增大而减小, 而在 $n=6$ 时反而随着纠缠度的增

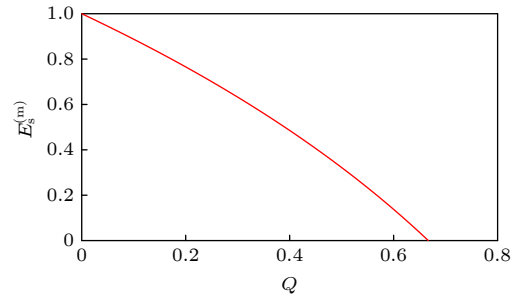


图 5 $n=2$ 时, 系统初态的纠缠度 $E_s^{(m)}$ 随纯度参数 Q 的变化曲线

Fig. 5. Entanglement $E_s^{(m)}$ of the initial state of the system as a function of the purity parameter Q . Parameter selection: $n=2$.

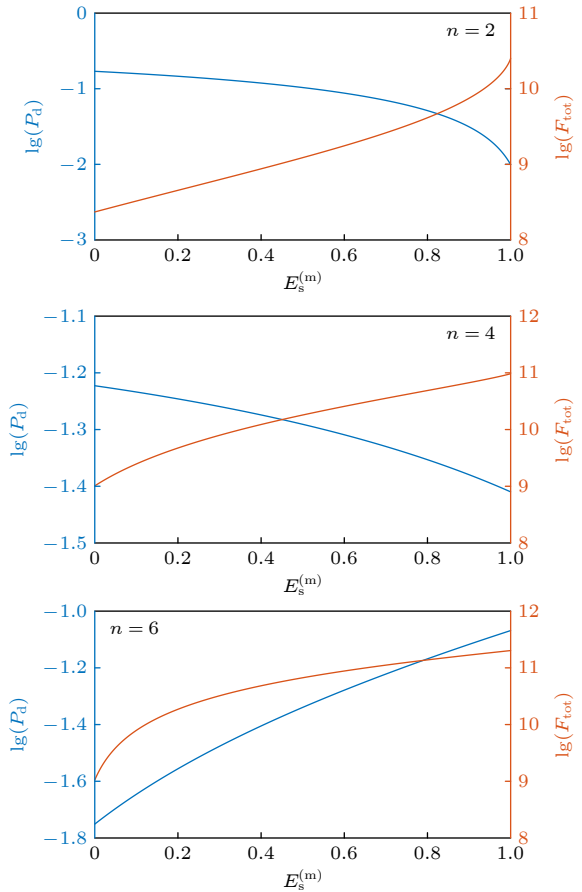


图 6 蓝色曲线表示后选择概率随纠缠度 $E_s^{(m)}$ 的变化曲线, 橙色曲线表示参数 g 的 Fisher 信息随纠缠度 $E_s^{(m)}$ 的变化曲线. 参数选取: $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$, $g = 0.88 \text{ } \mu\text{m}$

Fig. 6. Blue curve represents the post-selection probability as a function of entanglement $E_s^{(m)}$, and the orange curve represents the Fisher information of the parameter g as a function of entanglement $E_s^{(m)}$. Parameter selection: $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$, $g = 0.88 \text{ } \mu\text{m}$.

表 1 两种方案后选择概率和后选择后指针分布的比较

Table 1. Comparison of the post-selection probability and the post-selection pointer distribution of the two schemes.

系统初态	后选择概率	后选择后指针分布
$ S_1^m\rangle$	$P_d = \frac{1}{2} (1 - e^{-2g^2 n^2 \delta^2} \cos \varepsilon)$	$\frac{1}{P_d} \sin^2 \left(n g p + \frac{\varepsilon}{2} \right) P(p)$
$ S_1^{(P)}\rangle$	$P_d' = 2^{-n} (1 - e^{-2g^2 n^2 \delta^2} \cos \varepsilon)$	$\frac{1}{2^{n-1} P_d'} \sin^2 \left(n g p + \frac{\varepsilon}{2} \right) P(p)$

大而增大,这是由于当比特数小时,后选择的概率主要是由极化噪声导致的,而纠缠度与纯度参数 Q 是呈负相关的,因而后选择概率随着纠缠度的增大而减小.随着比特数的增大,系统比特对后选择概率的影响要比极化噪声的大,因而后选择概率随着纠缠度的增大而增大.

3.3 系统初态为直积态与最大纠缠态对参数评估影响的比较

本节对最大纠缠初态方案和直积初态方案在参数评估方面做了对比分析,这里最大纠缠态选为 $|S_1^m\rangle = (|0\rangle^{\otimes n} + |1\rangle^{\otimes n})/\sqrt{2}$, 直积态选为 $|S_1^{(P)}\rangle = |s_i\rangle^{\otimes n}$, 这里的 $|s_i\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. 为了突出纠缠系统初态的优势,在系统和指针演化之后,对系统做后选择,后选择到同一个态 $|S_f^m\rangle = (|0\rangle^{\otimes n} - e^{-i\varepsilon}|1\rangle^{\otimes n})/\sqrt{2}$ 上.两种方案的后选择概率和后选择后指针分布总结如表 1 所列.

当 $n \geq 2$ 时,纠缠系统初态方案的后选择概率要大于直积系统初态方案.但后选择后指针具有相

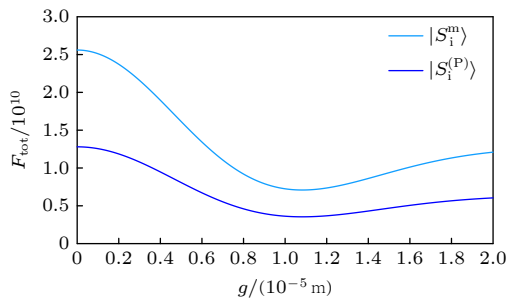


图 7 浅蓝色曲线表示初态为纠缠态时参数 g 的 Fisher 信息随耦合参数 g 的变化曲线,深蓝色曲线表示初态为直积态时参数 g 的 Fisher 信息随耦合参数 g 的变化曲线.参数选取: $n = 2$, $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$

Fig. 7. Light blue curve represents Fisher information of the parameter g as a function of the coupling parameter g when the initial state is entangled, and dark blue curve represents Fisher information of the parameter g as a function of the coupling parameter g when the initial state is product state. Parameter selection: $n = 2$, $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$.

同的分布形式.与此同时我们又比较了两种方案在 $n = 2$ 时的 Fisher 信息.

从图 7 可以看出,当系统初态为最大纠缠态时参数 g 的 Fisher 信息要大于系统初态为直积态时参数 g 的 Fisher 信息.综上可以得出结论,在参数评估精度及后选择概率方面纠缠系统初态的方案要优于直积系统初态方案.

4 量子弱测量中系统和探针之间的纠缠对参数评估的影响

弱测量中弱相互作用会使得系统和探针纠缠起来,但不同的相互作用强度会导致系统和探针之间的纠缠度不同,进而导致加载到探针上关于参数 g 的 Fisher 信息也会有所不同.因此本节研究系统和探针之间的纠缠对耦合参数 g 评估精度的影响.首先把系统初态选为 $|s_i\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, 探针初态选为 $\hat{\sigma} = |T\rangle\langle T|$.系统和探针的联合态经过弱相互作用 \hat{U} 可以写成以下形式:

$$\hat{\rho}_U = \hat{U}(|s_i\rangle\langle s_i| \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^+ = \frac{1}{2} \iint T(p)T(p')(\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d})dpdp', \quad (19)$$

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ 分别为

$$\begin{aligned} \hat{a} &= e^{-ign(p-p')} |a_1\rangle\langle a_1| \otimes |p\rangle\langle p'|, \\ \hat{b} &= e^{-ign(p+p')} |a_1\rangle\langle a_2| \otimes |p\rangle\langle p'|, \\ \hat{c} &= e^{ign(p+p')} |a_2\rangle\langle a_1| \otimes |p\rangle\langle p'|, \\ \hat{d} &= e^{ign(p-p')} |a_2\rangle\langle a_2| \otimes |p\rangle\langle p'|, \end{aligned} \quad (20)$$

这里的 $|a_1\rangle = |0\rangle$ 和 $|a_2\rangle = |1\rangle$ 是 $\hat{\sigma}_z$ 的本征基矢.且后选择到 $|s_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - e^{-i\varepsilon}|1\rangle)$ 后的概率分布为

$$P(g, p) = \frac{1}{P_d} \sin \left(gp + \frac{\varepsilon}{2} \right) P(p), \quad (21)$$

这里的 $P_d = \frac{1}{2} (1 - e^{-2g^2 \delta^2} \cos \varepsilon)$ 为后选择概率.通过后选择概率及后选择后探针的概率分布可以求得总的 Fisher 信息为

$$F_{\text{tot}} = 2\delta^2[1 + e^{-2g^2\delta^2}(1 - 4g^2\delta^2)\cos\varepsilon]. \quad (22)$$

这里仍然使用对数负纠缠来度量系统和探针之间的纠缠度,并画了系统探针间的纠缠度 E_{st} 随参数 g 的变化曲线以及参数 g 的 Fisher 信息随 E_{st} 的变化曲线,如图 8 所示.

从图 8(a) 可以看出,纠缠度 E_{st} 随着耦合参数 g 的增大而增大,也就是说系统和探针的耦合越强,系统和探针之间的纠缠度越大.而从图 8(b) 可以看出,参数总的 Fisher 信息随纠缠度 E_{st} 的增大先减小后增大,下降部分在弱相互作用域,上升部分为强相互作用域.而且在弱测量过程中,系统和探针之间的耦合很弱,由图 8(a) 可知此时系统和探针之间的纠缠也很弱.由下降的这一段可以看出,随着系统与探针间纠缠度的增大,参数 g 的 Fisher 信息反而减小,即系统与探针之间的纠缠对参数评估精度是具有抑制作用的.虽然文献 [16] 通过系统和探针预耦合可以提高灵敏度,但是系统和探针之间的预耦合会使得系统和探针先纠缠起来,然后再经过弱相互作用,这样会使得系统和探针之间的纠缠更大,能够获得参数 g 的 Fisher 信息会更小,不利于提高参数的评估精度.

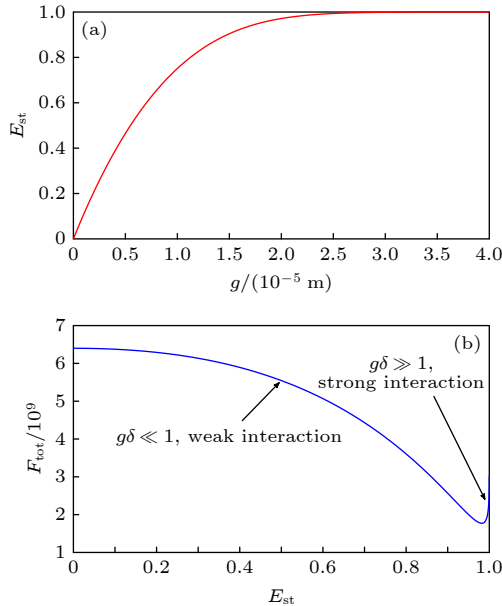


图 8 (a) 系统探针之间的纠缠度 E_{st} 随耦合参数 g 的变化曲线; (b) 参数 g 的 Fisher 信息随系统探针之间的纠缠度 E_{st} 的变化曲线. 参数选取为 $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$

Fig. 8. (a) Entanglement E_{st} between system and pointers as a function of the coupling parameter g ; (b) the Fisher information of the parameter g as a function of the entanglement E_{st} between system and pointers. Parameter selection: $\delta = 4 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon = 0.01$.

5 结论

本文在弱值放大过程利用 Fisher 信息研究了系统中的纠缠以及系统与探针间的纠缠对耦合参数评估精度的影响. 在研究系统的纠缠对耦合参数评估的影响时,把系统的初态分为类 GHZ 态的纠缠纯态和受退极化噪声影响的纠缠混态两种情况. 结果表明,耦合参量的 Fisher 信息随着系统初态纠缠度的增大而增大;当系统初末态处于最大纠缠态时,后选择概率和耦合参数的 Fisher 信息能够达到最大. 此结果说明,系统中的纠缠有助于提高耦合参数评估的精度. 在研究系统和探针的纠缠时却发现,随着系统与探针之间的纠缠度的增大,耦合参数评估的 Fisher 信息反而减小. 结合文献 [16] 中关于系统与探针间的预纠缠有助于提高参数评估的灵敏度,得到如下结论:虽然系统与探针间的纠缠能够增大探针偏移量提高耦合参数评估的灵敏度,但系统与探针间的纠缠不利于提高耦合参数的评估精度. 本文研究选取的参数均在合理的范围内 [24], 可以应用于光学系统,分别用动量空间的高斯态和路径自由度作为探针和系统,路径自由度可以把系统初末态编码为最大纠缠态 [21]. 最后我们希望系统纠缠的弱测量方案能在离子阱中有所应用.

参考文献

- [1] Aharonov Y, Albert D Z, Vaidman L 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1351
- [2] Viza G I, Martínez-Rincón J, Alves G B, Jordan A N, Howell J C 2015 *Phys. Rev. A* **92** 032127
- [3] Jozsa R 2007 *Phys. Rev. A* **76** 044103
- [4] Dressel J 2015 *Phys. Rev. A* **91** 032116
- [5] Dixon P B, Starling D J, Jordan A N, Howell J C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 173601
- [6] Zhou L, Turek Y, Sun C P, Nori F 2013 *Phys. Rev. A* **88** 053815
- [7] Starling D J, Dixon P B, Jordan A N, Howell J C 2010 *Phys. Rev. A* **82** 063822
- [8] Magaña-Loaiza O S, Mirhosseini M, Rodenburg B, Boyd R W 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 200401
- [9] Viza G I, Martínez-Rincón J, Howland G A, Frostig H, Shomroni I, Dayan B, Howell J C 2013 *Opt. Lett.* **38** 2949
- [10] Egan P, Stone J A 2012 *Opt. Lett.* **37** 4991
- [11] Pati A K, Mukhopadhyay C, Chakraborty S, Ghosh S 2020 *Phys. Rev. A* **102** 012204
- [12] Starling D J, Dixon P B, Williams N S, Jordan A N, Howell J C 2010 *Phys. Rev. A* **82** 011802(R)
- [13] Brunner N, Simon C 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 010405
- [14] Strübi G, Bruder C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 083605
- [15] Xu X Y, Kedem Y, Sun K, Vaidman L, Li C F, Guo G C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 033604

- [16] Zhang Z H, Chen G, Xu X Y, Tang J S, Zhang W H, Han Y J, Li C F, Guo G C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 053843
- [17] Liu W T, Martínez-Rincón J, Howell J C 2019 *Phys. Rev. A* **100** 012125
- [18] Lyons K, Dressel J, Jordan A N, Howell J C, Kwiat P G 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 170801
- [19] Wang Y T, Tang J S, Hu G, Wang J, Yu S, Zhou Z Q, Cheng Z D, Xu J S, Fang S Z, Wu Q L, Li C F, Guo G C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 230801
- [20] Pang S S, Dressel J, Brun T A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 030401
- [21] Chen G S, Liu B H, Hu M J, Hu X M, Li C F, Guo G C, Zhang Y S 2019 *Phys. Rev. A* **99** 032120
- [22] Zhang L J, Datta A, Walmsley L A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 210801
- [23] Plenio M B 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 090503
- [24] Luo L, He Y, Liu X, Li Z X, Duan P, Zhang Z Y 2020 *Opt. Express* **28** 6408

Influence of entanglement on precision of parameter estimation in quantum weak measurement*

Zhang Xiao-Dong¹⁾ Yu Ya-Fei^{1)†} Zhang Zhi-Ming^{2)‡}

1) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices, School of Information and Optoelectronic Science and Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

2) (*Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Engineering and Quantum Materials, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*)

(Received 25 April 2021; revised manuscript received 4 August 2021)

Abstract

An appropriate weak value can be used to amplify weak physical parameters and improve the precision of parameter estimation in the process of quantum weak measurement. The increase of the precision of such a parameter estimation may originate from the entanglement in the system. This paper uses Fisher information to study the influence of the entanglement in the system and the entanglement between the system and the pointer on the estimation precision of the coupling parameters between the system and the pointer in the process of weak measurement. The entanglement of the entangled pure state of the GHZ-like state and the entangled mixed state affected by the depolarization noise and the influence of the entanglement between the system and the pointer on the parameter estimation are analyzed. The results show that the Fisher information quantity increases with the increase of the initial state entanglement degree of the system when the initial state of the system is an entangled pure state or an entangled mixed state affected by depolarization noise, and both the Fisher information quantity and the post-selection probability reach their maximum values when the initial and final state of the system are both the maximum entangled states; but the weaker the entanglement between the system and the pointer, the more the Fisher information obtained in the measurement will be and the higher the accuracy of parameter estimation. These research results show that the entanglement in the system will improve the precision of parameter estimation, while the entanglement between the system and the pointer will reduce the precision of parameter estimation.

Keywords: weak measurement, weak value, entanglement, Fisher information

PACS: 03.65.Ta, 03.65.Ud, 06.20.-f

DOI: 10.7498/aps.70.20210796

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61941501, 61775062, 62075129).

† Corresponding author. E-mail: yuyafei@m.scnu.edu.cn

‡ Corresponding author. E-mail: zhangzhiming@m.scnu.edu.cn