



三量子比特Dicke模型中的两体和三体纠缠动力学

毛丽君 张云波

The dynamics of the bipartite and tripartite entanglement in the three-qubit Dicke model

Mao Li-Jun Zhang Yun-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 040301 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201602

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201602>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

磁-腔量子电动力学系统中压缩驱动导致的两体与三体纠缠

Bipartite and tripartite entanglement caused by squeezed drive in magnetic-cavity quantum electrodynamics system

物理学报. 2020, 69(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200838>

与热库耦合的光学腔内三原子间的纠缠动力学

Entanglement dynamics of three atoms in optical cavity coupled to reservoir

物理学报. 2018, 67(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172546>

带有三体相互作用的S=1自旋链中的保真率和纠缠熵

Fidelity susceptibility and entanglement entropy in S=1 quantum spin chain with three-site interactions

物理学报. 2018, 67(2): 020302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172087>

具有次近邻相互作用的五量子比特XXZ海森伯自旋链的热纠缠

Thermal entanglement in a five-qubit XXZ Heisenberg spin chain with the next nearest neighboring interaction

物理学报. 2018, 67(2): 020301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171641>

一个基于三粒子部分纠缠态的量子广播多重盲签名协议

Quantum broadcasting multiple blind signature protocol based on three-particle partial entanglement

物理学报. 2019, 68(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182044>

基于领域相似度的复杂网络节点重要度评估算法

Node importance measurement based on neighborhood similarity in complex network

物理学报. 2017, 66(3): 038902 <https://doi.org/10.7498/aps.66.038902>

三量子比特 Dicke 模型中的两体 和 三体纠缠动力学*

毛丽君¹⁾ 张云波^{2)†}

1) (太原师范学院物理系, 晋中 030619)

2) (浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

(2020 年 9 月 27 日收到; 2020 年 10 月 13 日收到修改稿)

本文利用绝热近似方法和精确对角化方法研究三量子比特 Dicke 模型中的纠缠动力学. 处于两种典型的纠缠态 GHZ 态和 W 态上的量子比特在时间演化过程中与辐射光场发生强耦合作用, 在各种子系统间产生纠缠, 通过分析这些纠缠的演化特性发现初始 GHZ 态的三体纠缠鲁棒性比 W 态强, 这与旋波近似结论一致. 与旋波近似下结果不同的是, 两种态中任意一对量子比特间的纠缠都随时间演化到几乎为零, 而三体纠缠随时间周期演化, 且纠缠程度相对较强, 说明系统中的强耦合作用通过抑制量子比特中的对纠缠来支持三体纠缠.

关键词: 三量子比特 Dicke 模型, 对纠缠, 三体纠缠, 鲁棒性

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Pq

DOI: 10.7498/aps.70.20201602

1 引言

腔中原子和电磁场的耦合对光与物质相互作用的理解是至关重要的, 也是许多量子技术的核心. 在最近几年, 人们感兴趣的光和物质的相互作用不再是传统的弱耦合区域^[1], 在许多实验中电子、分子、激子与微腔中光子的相互作用已达到了超强耦合区域^[2]. 此外, 在电路量子电动力学领域中, 通过人造原子实现了光与物质耦合的类似模型, 即超导两能级系统与微波光子的耦合. 在这种情况下, 通过高阻抗谐振器或电流耦合机制超越了原有的界限, 进入到了深强耦合区域^[3–6]. 在强耦合条件下, 相互作用中的非旋波项不能忽略, 人们便开始着手研究非旋波近似下光与物质的耦合系统.

在非旋波近似下, 最简单的系统是单个二能级系统 (称为量子比特) 和光场相互作用的 Rabi 模

型^[7], 人们详尽地探讨了 this 模型^[8–15], 并将其推广到多个量子比特和单模量子化光场相互作用的 Dicke 模型^[16], 发现许多非常有趣的现象^[17–22]. 文献^[23]系统地研究了各向异性量子 Rabi 模型的量子相变问题, 在这样一个有限自由度系统的相变中建立了普适性概念, 还进一步将结论推广到任意原子数的 Dicke 模型中, 并与热力学极限下的传统普适性概念等价起来^[23]. 量子纠缠在量子相变中扮演着非常重要的角色, 是量子信息科学的核心. 目前, 人们对 Dicke 模型中不同子系统间的纠缠演化进行了广泛的研究^[24–30]. 我们利用绝热近似方法严格求解了三量子比特 Dicke 模型的本征解, 并在此基础上讨论了三量子比特和光场的纠缠以及量子比特 1 和 23 的两体纠缠随时间的演化特性^[31]. 除这两类纠缠以外, 光场和量子比特间的相互作用也会导致其余不同子系统间产生纠缠, 例如, 任意两个量子比特间的对纠缠、量子比特和光场结合的

* 国家自然科学基金 (批准号: 11847111, 11674201, 12074340) 和山西省高等学校科技创新项目 (批准号: 2019L0822) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: ybzhang@zstu.edu.cn

子系统与其余量子比特的两体纠缠, 即合作纠缠等等. 量子态随时间演化时, 不同子系统间的纠缠相互竞争, 那么该模型中相互作用到底支持哪一类纠缠, 这个问题有待进一步讨论. 另外, 三量子比特内部的两体纠缠是把三体系统分解成 1 和 23 两个子系统, 无法区分是 1 和 2 的纠缠, 还是 1 和 3 的纠缠, 抑或是 1, 2, 3 之间的纠缠^[32-35], 即三体纠缠, 决定系统动力学演化的关键信息. 基于此, 本文将利用纠缠并发度和负值度对这些纠缠动力学特性进行深入研究.

2 三量子比特 Dicke 模型的本征解

本文主要讨论三个全同的量子比特同辐射场耦合时, 不同子系统之间的纠缠行为, 哈密顿量可以写为

$$H_D = \omega_c a^\dagger a - \omega J_x + 2g(a^\dagger + a)J_z, \quad (1)$$

这里, a^\dagger (a) 代表频率为 ω_c 的单模辐射场的产生 (湮灭) 算符, ω 为三个量子比特的跃迁频率, 它们与辐射场的耦合强度都为 g , $\mathbf{J} = J_x \mathbf{e}_x + J_y \mathbf{e}_y + J_z \mathbf{e}_z$, $J_\alpha = \sum_{i=1}^3 \sigma_i^\alpha / 2$ ($\alpha = x, y, z$) 表示三量子比特的总自旋算符, 与哈密顿量对易 $[J^2, H_D] = 0$. 系统希尔伯特空间可分解为^[36]

$$H_D = H_D^{3/2} \oplus H_D^{1/2} \oplus H_D^{1/2}. \quad (2)$$

本文主要研究全对称子空间 $H_D^{3/2}$ 中的纠缠动力学行为, 由于三量子比特的全同性, 不同子系统间的纠缠可分为以下几类: (i) $f \otimes (123)$, (ii) $(f1) \otimes (23)$, (iii) $(f12) \otimes (3)$, (iv) $1 \otimes 23$, (v) $1 \otimes 2$, (vi) $f \otimes 12$, (vii) $f \otimes 1$, (viii) $f1 \otimes 2$, 其中 f 代表单模辐射场, 1, 2, 3 分别表示三个量子比特, 前三类纠缠为纯态纠缠, 其余为混合态纠缠. 目前并没有很好的物理量能够用来表征高维度系统的混合态纠缠 (vi, vii 和 viii) 特性, 这里重点分析比较前五类纠缠特性, 主要考虑系统中量子比特的初态制备为最大三体纠缠态 (GHZ 态) 或最大两体纠缠态 (W 态), 单模辐射场为与经典场最接近的相干态情况下, 利用 I tangle 和 Negativity 研究几类纠缠随时间的演化及量子比特三体纠缠动力学, 进而分析系统到底支持哪一类纠缠.

下面简单介绍一下系统的本征解, 选择总自旋和光场的结合态 $|3/2, m\rangle |n\rangle_{A_m}$ 为基矢, $|n\rangle_{A_m}$ 代表平移 Fock 态, $|j, m\rangle$ 是总自旋算符 J^2 和 J_z 的共同

本征态. 当量子比特的跃迁频率与单模辐射场频率满足关系式 $\omega \ll \omega_c$ 时, 可以利用绝热近似方法将哈密顿量 $H_D^{3/2}$ 简化为对角块的形式^[31], 即 $H_D^{3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus H_n$,

$$H_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_{3/2}^n & \sqrt{3}\Omega_n & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\Omega_n & \varepsilon_{1/2}^n & 2\Omega_n & 0 \\ 0 & 2\Omega_n & \varepsilon_{-1/2}^n & \sqrt{3}\Omega_n \\ 0 & 0 & \sqrt{3}\Omega_n & \varepsilon_{-3/2}^n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

计算可得 H_n 中的各个元素为 $\varepsilon_m^n = \omega_c(n - \beta_m^2)$, $\beta_m = m\gamma$, $\gamma = \frac{2g}{\omega_c}$, $\Omega_n = -\frac{\omega}{2} A_{1/2} \langle n|n\rangle_{A_{3/2}}$ 表示平移 Fock 态的内积, 将其展开可得

$$\Omega_n = -\frac{\omega}{2} e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \sum_{l=0}^n \frac{(-1)^{n-l} n!}{l! [(n-l)!]^2} \gamma^{2(n-l)}. \quad (4)$$

依据宇称对称性可得出 H_n 的本征能量,

$$E_n^{\kappa\pm} = n\omega_c + \xi\Omega_n - 5g^2/\omega_c \pm \theta_n^\kappa, \quad (5)$$

其中 $\theta_n^\kappa = \sqrt{(\xi\Omega_n + 4g^2/\omega_c)^2 + 3\Omega_n^2}$, $\xi = \kappa(-1)^n$, $\kappa = -1, 1$ 分别代表奇宇称和偶宇称. 相应的本征态可以表示为

$$|\psi_n^{\kappa\pm}\rangle = d_n^{\kappa\pm} (c_n^{\kappa\pm}, 1, \xi, \xi c_n^{\kappa\pm})^T, \quad (6)$$

其中 $c_n^{\kappa\pm} = \sqrt{3}\Omega_n / (\xi\Omega_n + 4g^2/\omega_c \pm \theta_n^\kappa)$, $d_n^{\kappa\pm} = 1/\sqrt{2(|c_n^{\kappa\pm}|^2 + 1)}$. 限定参数范围为 $|\Omega_n| \gg \frac{4g^2}{\omega_c}$, $g \leq 0.08\omega_c$, 则 $\delta = \frac{4g^2}{\Omega_n\omega_c}$ 可看作小量, 且 Ω_n 的表达式 (4) 式中已含有耦合常数 g , 这样就可以忽略与 Ω_n 相乘的因子中含 δ 的项, 即保留了辐射场与量子比特间的强耦合, 同时还可以得到更简洁的本征解

$$E_n^{\kappa\pm} = n\omega_c + \Omega_n (\xi \mp 2), \quad (7)$$

$$|\psi_n^{\kappa\pm}\rangle = \sqrt{\frac{2 \mp \xi}{8}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\xi \mp 2}, 1, \xi, \frac{\xi\sqrt{3}}{\xi \mp 2} \right)^T. \quad (8)$$

3 纠缠动力学

3.1 GHZ 初态

假设辐射场为相干态 $|z\rangle$, 其中参数 z 决定平均光子数 (也就是它的模平方), 三量子比特初始处于 GHZ 态 $(|111\rangle + |000\rangle)/\sqrt{2}$. 其中任意一个比特与剩余所有比特之间具有最大的纠缠, 从这个意义上通常认为它是一个最大多方纠缠态. 约化掉任意一个量子比特后, 剩余两量子比特为非纠缠的混合

态. 在总自旋表象下, 初态可以表示为

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|3/2, 3/2\rangle + |3/2, -3/2\rangle) |z\rangle.$$

当耦合强度 g 相对较小时, 初态可按平移 Fock 态展开为

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \frac{e^{-|z|/2} z^n}{\sqrt{n!}} \left(|3/2, 3/2\rangle |n\rangle_{A_{3/2}} + |3/2, -3/2\rangle |n\rangle_{A_{-3/2}} \right). \quad (9)$$

利用薛定谔方程得出系统随时间演化的密度算符

$$\begin{aligned} \rho(t) &= |\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{nn'} \frac{e^{-|z|/2} z^n}{\sqrt{n!}} \frac{e^{-|z|/2} z^{n'}}{\sqrt{n'!}} \sum_{\kappa\kappa'\tau\tau'} d_n^{\kappa\tau} c_n^{\kappa\tau} d_{n'}^{\kappa'\tau'} c_{n'}^{\kappa'\tau'} \\ &\quad \times (1+\xi)(1+\xi') |\psi_n^{\kappa\tau}\rangle \langle \psi_{n'}^{\kappa'\tau'}| e^{-i(E_n^{\kappa\tau} - E_{n'}^{\kappa'\tau'})t}. \end{aligned}$$

将本征解 (7) 式和 (8) 式代入密度算符中, 对光场取迹可得三量子比特约化密度矩阵 $\rho_Q^G(t)$, 其在 J_x 表象下的最简化形式为

$$\rho_Q^G(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3}S(t, 2\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}S^*(t, 2\omega) & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中矩阵元 $S(t, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k(t, \omega)$ ^[37], 振荡函数 $S_k(t, \omega) = h_k \exp(\Phi_{\text{Re}} + i\Phi_{\text{Im}})$, 其特征参数为复原高度 $h_k = (1 + \pi^2 k^2 f^2)^{-1/4}$, 包络因子 $\Phi_{\text{Re}} = -h_k^4 (\mu - \mu_k)^2 f \gamma^2 / 2$ 及快速振荡条件 $\Phi_{\text{Im}} = \tan^{-1}(\pi k f) / 2 + \mu(1-f) + 2\pi k |z|^2$, 其中 $f = |\gamma z|^2$, $\mu = \omega t e^{-\gamma^2/2}$, $\mu_k = \pi k (f+2) / \gamma^2$.

下面分别研究各类纠缠. 对于 A 和 B 组成的 $d_1 \times d_2$ 维两体纯态系统 $|\psi_{AB}\rangle$, 可以利用纠缠两体纯态 I concurrence 的平方 I tangle^[38]

$$\tau_{AB}(t) = 2 [1 - \text{tr}(\rho_A^2)] \quad (10)$$

来描述该系统的纠缠程度, 这里的 ρ_A 是子系统 A 的约化密度矩阵. 依据 $\rho_Q^G(t)$, 可得 (i) 类纠缠的 I tangle^[38]

$$\tau_{(i)}^G(t) = \frac{3 - 3|S(t, 2\omega)|^2}{4}. \quad (11)$$

对量子比特 1 取迹后的约化密度矩阵 $\rho_{Q_{23}}^G = \text{Tr}_1(\rho_Q^G)$ 是量子比特 2 和 3 子空间中的算符,

$$\rho_{Q_{23}}^G(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & S(t, 2\omega) \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ S^*(t, 2\omega) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

这里是以两个自旋 σ_2^x, σ_3^z 的直积态为基矢的约化密度矩阵. 于是, 可得 (ii) 类两体纯态 I tangle

$$\tau_{(ii)}^G(t) = \frac{5 - |S(t, 2\omega)|^2}{4}, \quad (12)$$

可以用来定量地描述辐射场和量子比特 1 结合的子系统与剩余两量子比特之间的纠缠性质. 进一步对密度算符 $\rho_{Q_{23}}^G$ 中的量子比特 2 取迹, 即

$$\rho_{Q_3}^G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可得 (iii) 类两体纯态 I tangle

$$\tau_{(iii)}^G(t) = 1, \quad (13)$$

描述辐射场和量子比特 1, 2 结合的子系统与量子比特 3 的纠缠特性. 另外, 利用密度矩阵可以进一步讨论三量子比特间的内部纠缠, 由于混合态密度矩阵 ρ_Q^G 的秩是小于等于 2 的, 从而可得出描述量子比特 1 与 2, 3 结合的子系统的 (iv) 类混合态 I tangle^[31,38,39]

$$\tau_{(iv)}^G(t) = \frac{5 + 20|S(t, 2\omega)|^2 + 7|S(t, 2\omega)|^4}{8(1 + 3|S(t, 2\omega)|^2)}, \quad (14)$$

另一方面也可以用纠缠负值度 (Negativity)^[40] $N(t) = 2 \sum_i |\lambda_i|$ 来描述量子比特间的内部纠缠, 其中 λ_i 是密度矩阵 $\rho_Q^G(t)$ 的部分转置矩阵的负本征值, (iv) 类纠缠负值度为

$$N_{(iv)}^G(t) = \sqrt{\frac{1 + |S(t, 2\omega)|^2}{2}}. \quad (15)$$

由于 $\rho_{Q_{23}}^G$ 代表两量子比特混合态密度算符, 可以描述量子比特 2 和 3 的纠缠特性, 且属“X”型矩阵, 很容易计算出 (v) 类混合态 I tangle

$$\tau_{(v)}^G(t) = \left[2 \max \left\{ 0, \frac{|S(t, 2\omega)|^2}{4} - \frac{1}{4} \right\} \right]^2 = 0.$$

对于矩阵 $\rho_{Q_{23}}^G$ 的部分转置矩阵没有负本征值, 则两量子比特纠缠的负值度

$$N_{(v)}^G(t) = 0. \quad (16)$$

在以上分析的基础上, 可以进一步得到真正的三体纠缠, 即三体纠缠 (three-tangle)^[33]

$$\tau_{123} = \tau_{1,23} - \tau_{12} - \tau_{13}, \quad (17)$$

其中 $\tau_{1,23}$ 描述的是量子比特 1 和被认为是单一对象 23 的纠缠, τ_{12} , τ_{13} 描述的分别是 1 和 2、1 和 3 的纠缠. (v)类 *I* tangle $\tau_{(v)}^G(t) = 1$, 每对量子比特之间是经典关联并不是纠缠, 将其代入 (17) 式可得 $\tau_{123}^G(t) = \tau_{(iv)}^G(t)$, 即某个量子比特与剩余两个量子比特的纠缠与三体纠缠相等, 这一特性与初始时刻的 GHZ 态相同. 同样地, 负性平方也可以用来度量三体纠缠, 定义为 π -tangle^[35]

$$\pi_{123} = \min(N_{1,23}^2) - N_{12}^2 - N_{13}^2, \quad (18)$$

关于 π -tangle 的计算涉及到纯态纠缠的凸脊扩展, 求其最小值几乎是不可能的. 虽然在三量子比特直

积态基矢下得到的负性纠缠的平方 $(N_{iv}^G(t))^2$ 不一定是最小值, 但一定是三体纠缠的上限值. 由 (18) 式可以得到与并发度相同的结果, 即 $\pi_{123}^G(t) = (N_{(iv)}^G(t))^2$.

3.2 *W* 初态

如果假设三量子比特初始时刻处于 *W* 态

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle),$$

此态对任何一个量子比特取迹后, 剩余的两量子比特处于纠缠态. 用 *W* 态替换 GHZ 态重复上面的计算过程, 可得耦合角动量空间中的三量子比特约化密度矩阵

$$\rho_Q^W(t) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3}S(t, \omega) & -\sqrt{3}S(t, 2\omega) & -3S^*(t, 3\omega) \\ \sqrt{3}S^*(t, \omega) & 1 & -S(t, \omega) & -\sqrt{3}S(t, 2\omega) \\ -\sqrt{3}S^*(t, 2\omega) & -S^*(t, \omega) & 1 & \sqrt{3}S(t, \omega) \\ -3S^*(t, 3\omega) & -\sqrt{3}S^*(t, 2\omega) & \sqrt{3}S^*(t, \omega) & 3 \end{pmatrix},$$

进而利用 (10) 式得出表征量子比特和光场纠缠的 (i)类 *I* tangle

$$\tau_{(i)}^W(t) = \frac{22 - 7|S(t, \omega)|^2 - 6|S(t, 2\omega)|^2 - 9|S(t, 3\omega)|^2}{16}. \quad (19)$$

对量子比特 1 取迹, 在自旋 σ_2^x , σ_3^x 的直积空间中的约化密度矩阵可表示为

$$\rho_{Q_{23}}^W(t) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & S(t, \omega) & S(t, \omega) & -3S(t, 2\omega) \\ S^*(t, \omega) & 1 & 1 & S(t, \omega) \\ S^*(t, \omega) & 1 & 1 & S(t, \omega) \\ -3S^*(t, 2\omega) & S^*(t, \omega) & S^*(t, \omega) & 5 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

由 (20) 式可得 (ii)类两体纯态 *I* tangle

$$\tau_{(ii)}^W(t) = \frac{45 - 4|S(t, \omega)|^2 - 9|S(t, 2\omega)|^2}{36}. \quad (21)$$

再对 $\rho_{Q_{23}}^W(t)$ 中的量子比特 2 取迹可得单量子比特约化密度矩阵

$$\rho_{Q_3}^W = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & S(t, \omega) \\ S^*(t, \omega) & 3 \end{pmatrix},$$

得出 (iii)类两体纯态 *I* tangle 的具体表达式

$$\tau_{(iii)}^W(t) = 1 - \frac{|S(t, \omega)|^2}{9}. \quad (22)$$

与 GHZ 态相比, *W* 态为初态时系统随时间演化比较复杂, 约化密度矩阵 $\rho_Q^W(t)$ 的秩大于 2, *I* tangle 不适用于描述 (iv)类混合态纠缠, 但仍然可以通过

纠缠负值度来描述该类纠缠特性^[31]. 另外, 依据约化密度矩阵 $\rho_{Q_{23}}^W(t)$ 可得两量子比特间的纠缠负值度 $N_{(v)}^W(t)$, 进而可以利用 $\pi_{123}^W(t)$ 来表征三体纠缠特性.

4 讨论

本节将对上一节得到的一些重要结果进行分析与讨论. 图 1 给出了两种初态下三个量子比特作为整体与光场的纯态纠缠 (i)类 *I* tangle, 解析结果分别为 (11) 式和 (19) 式. 图 2 给出了光场和量子比特 1 结合的子系统与其余量子比特的纯态纠缠 (ii)类 *I* tangle, 绝热近似下的解析解与数值结果的包络相符合, 左边表示初态为 GHZ 态, 解析结果

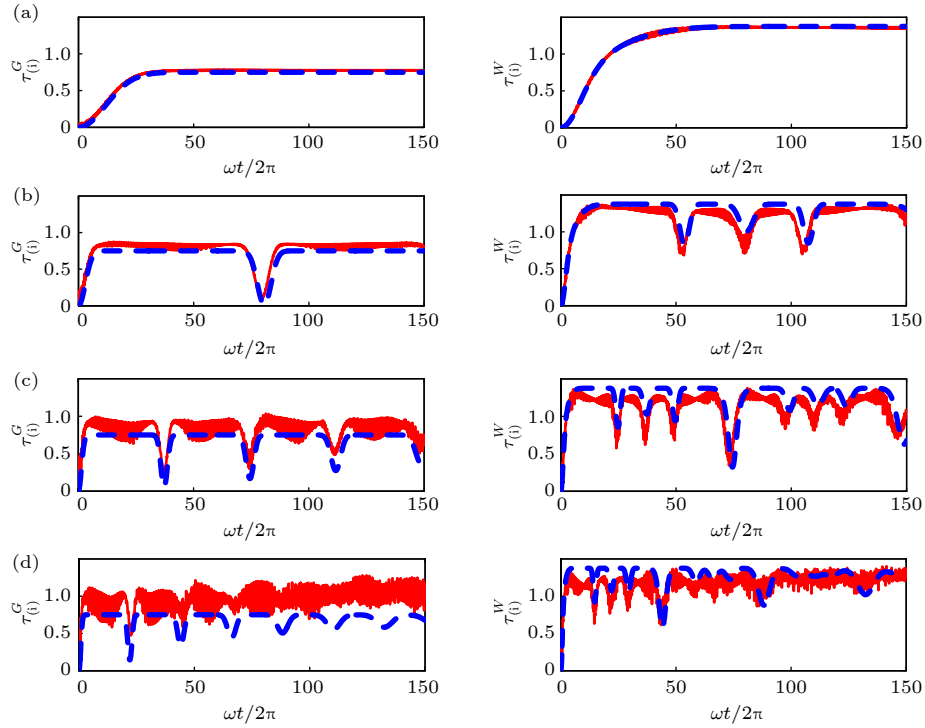


图 1 初始时刻为 GHZ 态(左)和 W 态(右)时, (i)类两体纯态纠缠 I tangle, 其中红色(实线)表示数值结果, 蓝色(虚线)表示解析结果, 系统参数为 $\omega = 0.15\omega_c$, $z = 3$, $g = 0.02\omega_c$ (a), $0.04\omega_c$ (b), $0.06\omega_c$ (c), $0.08\omega_c$ (d)

Fig. 1. Time evolution of the I tangle for the type (i) with the initial GHZ (left) and W (right) states for $\omega = 0.15\omega_c$, $z = 3$, and different coupling strengths: $g = 0.02\omega_c$ (a), $0.04\omega_c$ (b), $0.06\omega_c$ (c), $0.08\omega_c$ (d), given by the numerical method (solid red line), and the analytical approach (dashed blue line).

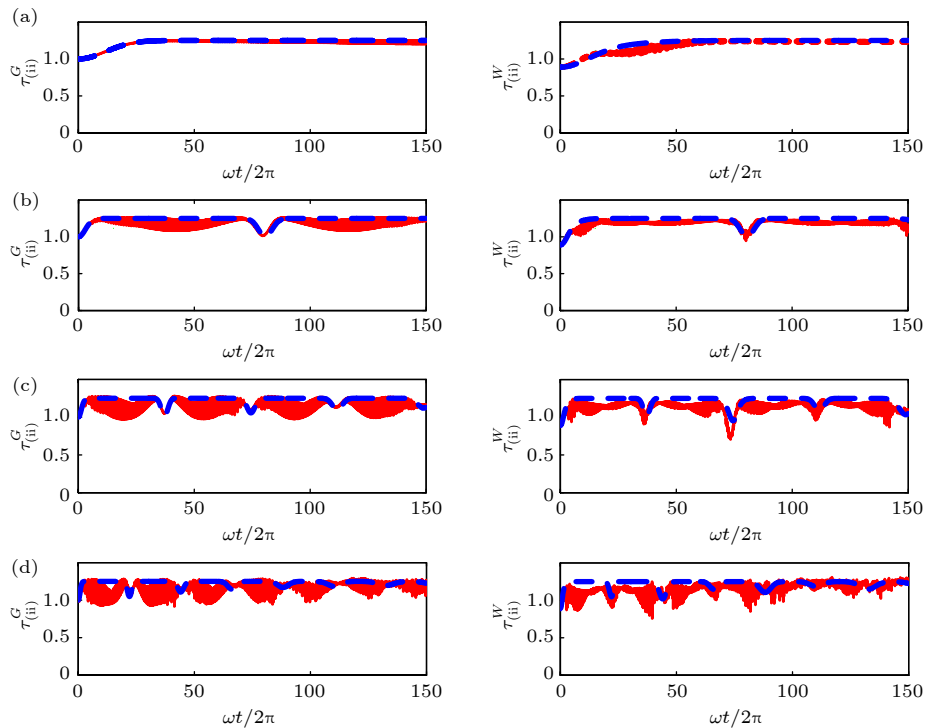


图 2 初始时刻为 GHZ 态(左)和 W 态(右)时, (ii)类两体纯态 I tangle 随时间的演化, 其中红色(实线)表示数值结果, 蓝色(虚线)表示解析结果, 系统参数与图 1 相同

Fig. 2. Time evolution of the I tangle for the type (ii) with the initial GHZ (left) and W (right) given by the numerical method (solid red line), and the analytical approach (dashed blue line). The corresponding parameters are the same as in Fig. 1.

如 (12) 式所示, 只包含单一的振荡因子 $S(t, 2\omega)$. 当初始时刻为 W 态时, 解析结果 (21) 式中包含两个振荡因子 $S(t, \omega)$ 和 $S(t, 2\omega)$, 但通过比较两个振荡因子前的系数, 发现仍然是 $S(t, 2\omega)$ 起决定作用, 因此 W 态与 GHZ 态两种情形下的 (ii) 类纠缠演化接近相同, 起初会随着时间的增加而达到峰值, 稳定一段时间后突然减小而后又有所增加并达到峰值, 且没有纠缠突然死亡的现象. 这个特性与图 1 所示的 (i) 类 I tangle 是截然不同的, 后者只在 W 初态时才能演化到峰值. (ii) 类 I tangle 整体上呈周期性振荡, 且耦合强度越大, 周期越小, 因此可以通过控制两量子比特与辐射场的耦合强度来调控 (ii) 类纠缠行为. 图 3 给出了 GHZ 态和 W 态下光场和量子比特 1, 2 结合的子系统与量子比特 3 纠缠的 (iii) 类 I tangle, 解析结果分别为 (13) 式和 (22) 式. 当耦合强度较弱时, (iii) 类 I tangle 都接近于 1, 无明显的振荡因子, 且未发现纠缠死亡现象, 是辐射场与量子比特耦合系统中的纠缠稳态.

图 4 给出了 (iv) 类纠缠负值度的平方, 即量子比特 1 和 23 的两体纠缠, 左图表示初态为 GHZ 态时该类纠缠随时间演化的最小值非零, 没有发生

突然死亡现象, 而右图中初态为 W 态时该类纠缠出现突然消失的现象. 图 5 给出了任意一对量子比特的纠缠负值度的平方, 即 (v) 类纠缠负值度, 左图中 GHZ 态约化后的两量子比特始于可分离态, 而右图中 W 态始于纠缠态, 可以发现两种初态下随时间演化的对纠缠都变得很小, 接近于零, 以至于失去了作为信息资源的能力, 这与旋波近似下的结论不同.

在分析了 (iv) 和 (v) 两类纠缠的基础上, 进一步利用 (18) 式定义的 π -tangle 讨论量子比特之间的三体纠缠. 从图 6 可以看出, 随着耦合强度的增加, 解析结果可粗略地描述量子比特间的三体纠缠, 将绝热近似下的本征解 (5) 式和 (6) 式代入约化密度矩阵中, 进而计算 π -tangle, 可以得出更准确的三体纠缠演化规律. 无论量子比特处于哪一个初态, 在强相互作用下单模辐射场和三量子比特之间会产生纠缠, 即图 1 所示的 (i) 类纠缠, 通过比较图 1 和图 6 发现, 三体纠缠随时间演化而减弱时, (i) 类纠缠就会增强, 反之亦然. 图 6 的左侧展示了初始时刻为 GHZ 态时, 三体纠缠在任何区域都没有纠缠猝死现象, 并且图 1 左侧的 (i) 类纠缠

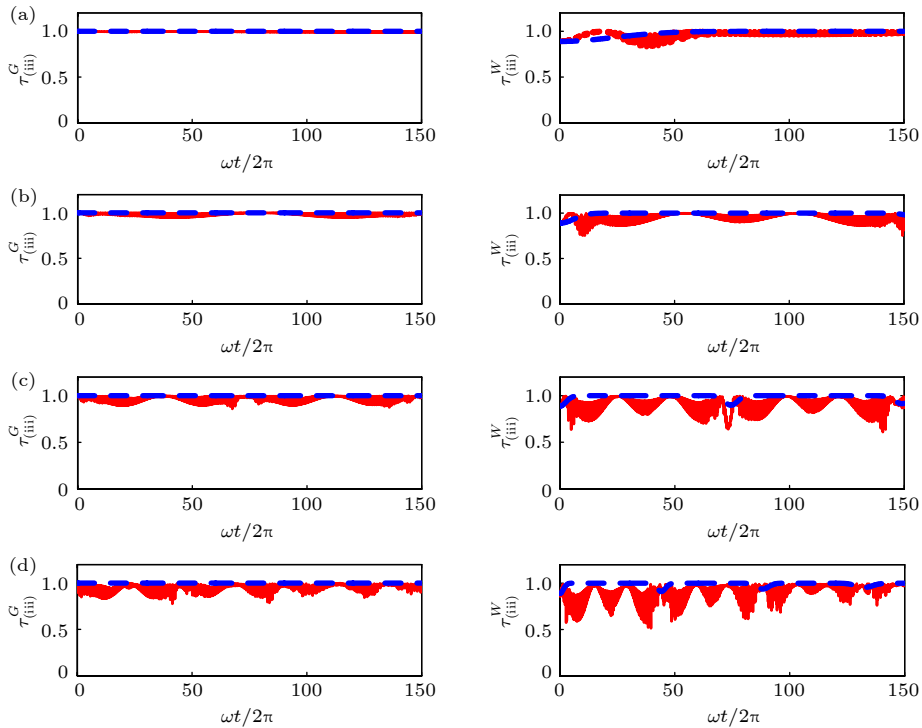


图 3 初始时刻为 GHZ 态 (左) 和 W 态 (右) 时, (iii) 类两体纯态 I tangle 随时间的演化, 其中红色 (实线) 表示数值结果, 蓝色 (虚线) 表示解析结果, 系统参数与图 1 相同

Fig. 3. Time evolution of the I tangle for the type (iii) with the initial GHZ (left) and W (right) states given by the numerical method (solid red line), and the analytical approach (dashed blue line). The corresponding parameters are the same as in Fig. 1.

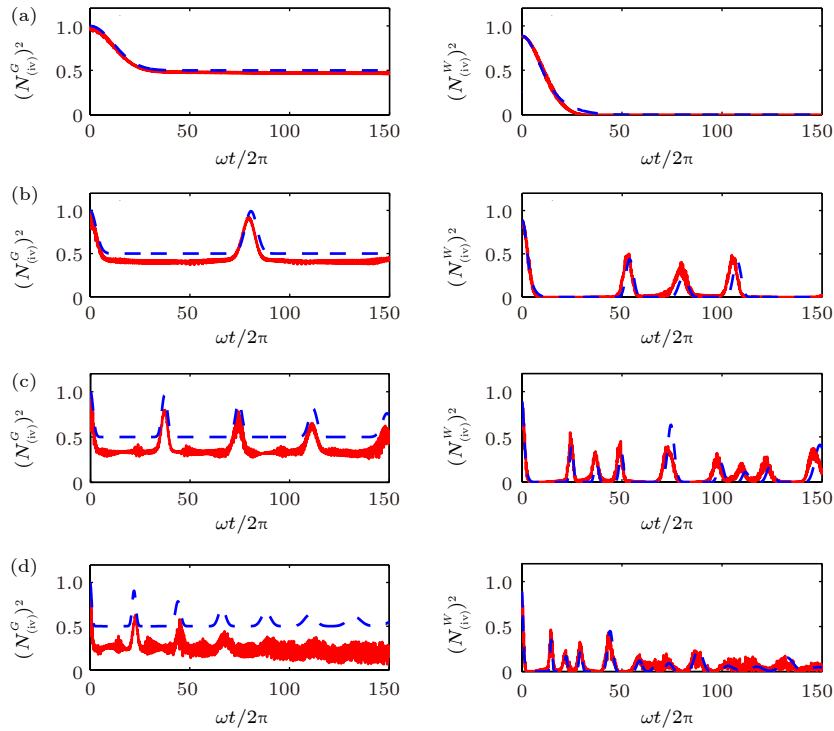


图 4 初始时刻为 GHZ(左) 态和 W (右) 态时, (iv) 类纠缠负值度的平方随时间的演化, 其中红色(实线)表示数值结果, 蓝色(虚线)表示解析结果, 系统参数与图 1 相同

Fig. 4. Time evolution of the square of the negativity for the type (iv) with the initial GHZ (left) and W (right) given by the numerical method (solid red line), and the analytical approach (dashed blue line). The corresponding parameters are the same as in Fig. 1.

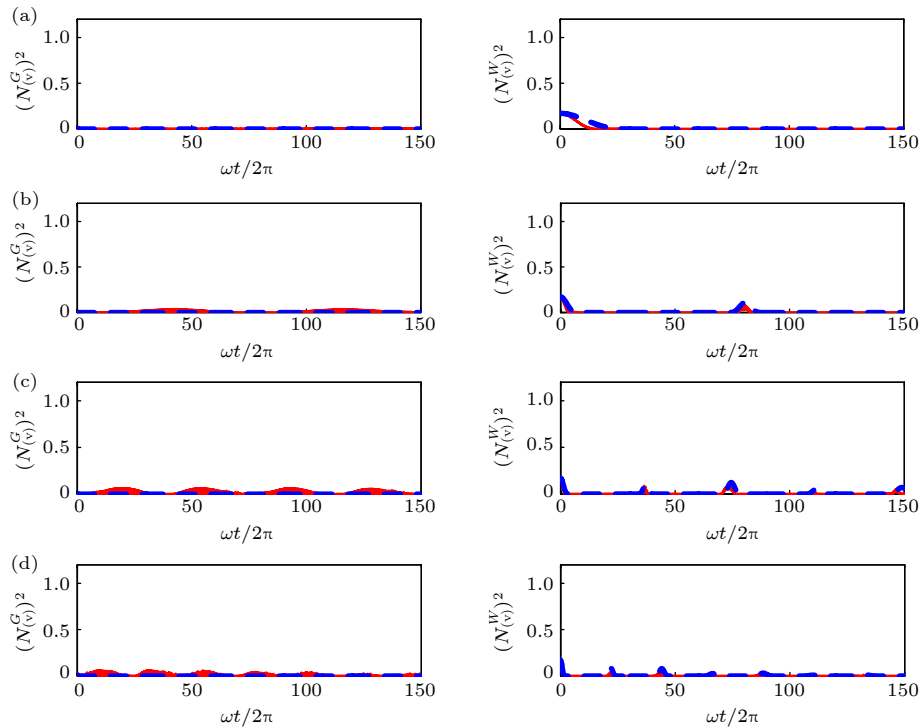


图 5 初始时刻为 GHZ(左) 态和 W (右) 态时, (v) 类对纠缠负值度的平方随时间的演化, 其中红色(实线)表示数值结果, 蓝色(虚线)表示解析结果, 系统参数与图 1 相同

Fig. 5. Time evolution of the square of the negativity for the type (v) with the initial GHZ (left) and W (right) given by the numerical method (solid red line), and the analytical approach (dashed blue line). The corresponding parameters are the same as in Fig. 1.

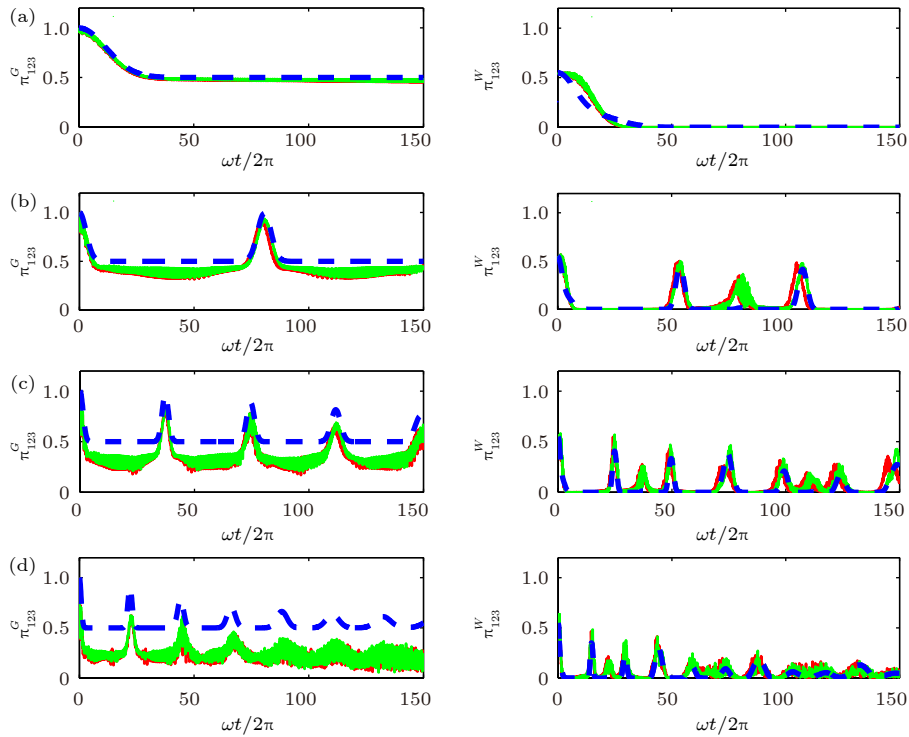


图 6 初始时刻为 GHZ(左) 态和 W (右) 态时, 真正的三体纠缠 π -tangle 随时间的演化, 其中红色 (实线) 表示数值结果, 绿色 (实线) 表示绝热近似结果, 蓝色 (虚线) 表示解析结果, 系统参数与图 1 相同

Fig. 6. Time evolution of π -tangle with the initial GHZ (left) and W (right) given by the numerical method (solid red line), the adiabatic approximation method (solid green line) and the analytical approach (dashed blue line). The corresponding parameters are the same as in Fig. 1.

I tangle 没有演化到最大值. 但是 W 态情况下 (图 6 右侧), 当三体纠缠随时间演化突然猝死时, 图 1 右侧所示的 (i) 类纠缠 I tangle 恰好达到最大值. 在不同初态的纠缠演化中, 不发生纠缠猝死的态不容易与外界系统产生纠缠, 且比发生纠缠猝死的态保持纠缠的能力更强, 即鲁棒性更强. 通过比较两种初态下的纠缠演化情况, 发现 GHZ 态维持三体纠缠的鲁棒性比 W 态强, 这与旋波近似下的结论一致. 但是无论初态是 GHZ 态还是 W 态, 随时间演化的对纠缠与三体纠缠相比均很弱, 说明系统中的强耦合通过约束对纠缠以实现对三体纠缠的支持. 纠缠态是量子信息领域的基本资源, 其鲁棒性会影响纠缠在量子信息中的应用, 该结果可应用于多量子比特信息处理.

5 结 论

利用绝热近似方法分析了三量子比特 Dicke 模型全对称空间中的纠缠演化行为. 初始制备在相干态上的辐射场与处于 GHZ 态或 W 态的三个量

子比特发生强耦合作用, 随着时间的演化不同子系统间产生纠缠, 包括量子比特和场的合作纠缠以及量子比特内的三体纠缠. 通过 I tangle 和 Negativity 来表征纠缠量, 两者在绝热近似下的解析表达式能够很好地展示不同子系统间的纠缠特性. 初态为 GHZ 态时, 三体纠缠没有发生纠缠突然死亡的现象, 量子比特和辐射场之间的纠缠随时间演化时没有达到最大值, 而 W 态恰好相反. 表明在相互作用条件下, 三量子比特 GHZ 态维持三体纠缠的能力更强, 鲁棒性更好, 这与旋波近似下的模型得出的结果相同. 与其不同的是, 不论初态是 W 态还是 GHZ 态, 随时间演化的任意两量子比特间的纠缠度都很小, 说明强耦合是通过抑制两量子比特之间的纠缠来支持三体纠缠的. 本文的研究为纠缠态的鲁棒性以及利用 Dicke 模型实现量子信息处理的工作提供理论参考.

参考文献

- [1] Forn-Díaz P, Lamata L, Rico E, Kono J, Solano E 2019 *Rev. Mod. Phys.* **91** 025005

- [2] Ciuti C, Bastard G, Carusotto I 2005 *Phys. Rev. B* **72** 115303
- [3] Wallraff A, Schuster D I, Blais A, Frunzio L, Huang R S, Majer J, Kumar S, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Nature (London)* **431** 162
- [4] Blais A, Huang R S, Wallraff A, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 062320
- [5] Gu X, Kockum A F, Miranowicz A, Liu Y X, Nori F 2017 *Phys. Rep.* **718** 1
- [6] Lv D, An S, Liu Z, Zhang J N, Pedernales J S, Lamata L, Solano E, Kim K 2018 *Phys. Rev. X* **8** 021027
- [7] Rabi I I 1936 *Phys. Rev.* **49** 324
- [8] Braak D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 100401
- [9] Liu T, Wang K L, Feng M 2009 *Europhys. Lett.* **86** 54003
- [10] Chen Q H, Liu T, Zhang Y Y, Wang K L 2011 *Europhys. Lett.* **96** 14003
- [11] He S, Wang C, Chen Q H, Ren X Z, Liu T, Wang K L 2012 *Phys. Rev. A* **86** 033837
- [12] Chen Q H, Wang C, He S, Liu T, Wang K L 2012 *Phys. Rev. A* **86** 023822
- [13] Hu B L, Zhou H L, Chen S J, Gao X L, Wang K L 2017 *J. Phys. A: Math. Theor.* **50** 074004
- [14] Xie W J, Mao B B, Li G Z, Wang W H, Sun C, Wang Y M, You W L, Liu M X 2020 *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** 095302
- [15] Li Z Q, Wang Y M 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 173201 (in Chinese) [李志强, 王月明 2019 物理学报 **68** 173201]
- [16] Dicke R H 1954 *Phys. Rev.* **93** 99
- [17] Wang Y K, Hioe F T 1973 *Phys. Rev. A* **7** 831
- [18] Emary C, Brandes T 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066203
- [19] Baumann K, Guerlin C, Brennecke F, Esslinger T 2010 *Nature* **464** 1301
- [20] Kirton P, Roses M M, Keeling J, Dalla Torre E G 2019 *Adv. Quantum Technol.* **2** 1800043
- [21] Alavirad Y, Lavasani A 2019 *Phys. Rev. A* **99** 043602
- [22] Lewis-Swan R J, Safavi-Naini A, Bollinger J J, Rey A M 2019 *Nat. Commun.* **10** 1581
- [23] Liu M X, Chesil S, Ying Z J, Chen X S, Luo H G, Lin H Q 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 220601
- [24] Cheng J, Shan C J, Liu J B, Huang Y X, Liu T K 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 110301 (in Chinese) [程景, 单传家, 刘继兵, 黄燕霞, 刘堂昆 2018 物理学报 **67** 110301]
- [25] Zuo Z C, Xia Y J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2687 (in Chinese) [左战春, 夏云杰 2003 物理学报 **52** 2687]
- [26] Guo L, Liang X T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 50 (in Chinese) [郭亮, 梁先庭 2009 物理学报 **58** 50]
- [27] Zhang G F, Bu J J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1462 (in Chinese) [张国锋, 卜晶晶 2010 物理学报 **59** 1462]
- [28] Youssef M, Metwally N, Obada A S F 2010 *J. Phys. B* **43** 095501
- [29] Zhang Y Y, Chen X Y, He S, Chen Q H 2016 *Phys. Rev. A* **94** 012317
- [30] Badshah F, Ge G Q, Paternostro M, Qamar S 2020 *J. Opt. Soc. Am. B* **37** 949
- [31] Mao L J, Liu Y X, Zhang Y B 2016 *Phys. Rev. A* **93** 052305
- [32] Roderick M, Horodecki P, Horodecki R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5239
- [33] Coffman V, Kundu J, Wootters W K 2000 *Phys. Rev. A* **61** 052306
- [34] Dür W, Vidal G, Cirac J 2000 *Phys. Rev. A* **62** 062314
- [35] Ou Y C, Fan H 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062308
- [36] Dukalski M, Blanter Y M 2013 *arXiv* 1301.4857
- [37] Agarwal S, Hashemi Rafsanjani S M, Eberly J H 2012 *Phys. Rev. A* **85** 043815
- [38] Rungta P, Bužek V, Caves C M, Hillery M, Milburn G J 2001 *Phys. Rev. A* **64** 042315
- [39] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [40] Zyczkowski K, Horodecki P, Sanpera A, Lewenstein M 1998 *Phys. Rev. A* **58** 883

The dynamics of the bipartite and tripartite entanglement in the three-qubit Dicke model*

Mao Li-Jun¹⁾ Zhang Yun-Bo^{2)†}1) (*Department of Physics, Taiyuan Normal University, Jinzhong 030619, China*)2) (*Physics Department, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

(Received 27 September 2020; revised manuscript received 13 October 2020)

Abstract

We study the entanglement dynamics of the three-qubit Dicke model by means of the adiabatic approximation and the exact diagonalization in the parameter regime where the qubit transition frequencies are far off-resonance with the radiation field and the interaction strengths reach the ultrastrong-coupling regime. The single-mode field is prepared in the coherent state and two typical states GHZ and W are chosen as the initial three-qubit states. In the process of evolution, the interaction between the quantized field and three-qubit system leads to the generation of entanglement between the field and qubits, as well as between different parties in the three-qubit system, i.e. the pairwise entanglement of two qubits and the tripartite entanglement, which are of ongoing interest in quantum information process. The generalized concurrence and negativity are adopted to quantify different kinds of entanglement. The qubit-field entanglement never reaches the maximum and no sudden death occurs in the the tripartite entanglement for GHZ state, but it is exactly the opposite for W state. This reflects that the tripartite entanglement of the GHZ state is more robust than W state, which is the same as in the rotating wave approximation. The results beyond the rotating wave approximation show that the pairwise entanglement gradually decreases and vanishes in the evolution of both initial states, with the tripartite entanglement periodically reaching relatively high level. This means that the interaction in system supports the tripartite entanglement at the cost of pairwise entanglement. The conclusions provide theoretical reference for the robustness of entanglement state and quantum information processing using Dicke model.

Keywords: three-qubit Dicke model, pairwise entanglement, tripartite entanglement, robustness

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Pq

DOI: [10.7498/aps.70.20201602](https://doi.org/10.7498/aps.70.20201602)

* Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11847111, 11674201, 12074340) and the Scientific and Technological Innovation Programs of Higher Education Institutions in Shanxi, China (Grant No. 2019L0822).

† Corresponding author. E-mail: ybzhang@zstu.edu.cn