



两体相互作用费米系统在自旋轨道耦合和塞曼场中的基态转变

陈星 薛潇博 张升康 马余全 费鹏 姜元 葛军

Ground energy level transition for two-body interacting Fermionic system with spin-orbit coupling and Zeeman interaction

Chen Xing Xue Xiao-Bo Zhang Sheng-Kang Ma Yu-Quan Fei Peng Jiang Yuan Ge Jun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 083401 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201456

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201456>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

自旋轨道耦合量子气体中的一些新进展

Some recent progresses on the study of ultracold quantum gases with spin-orbit coupling

物理学报. 2020, 69(1): 016701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191241>

一维谐振子束缚的自旋轨道耦合玻色气体

One-dimensional spin-orbit coupling Bose gases with harmonic trapping

物理学报. 2019, 68(17): 173201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190143>

Rashba自旋轨道耦合下square-octagon晶格的拓扑相变

Topological phase transitions in square-octagon lattice with Rashba spin-orbit coupling

物理学报. 2018, 67(23): 237101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180624>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

两体相互作用费米系统在自旋轨道耦合和塞曼场中的基态转变*

陈星^{1)†} 薛潇博¹⁾ 张升康¹⁾ 马余全²⁾ 费鹏¹⁾ 姜元¹⁾ 葛军^{1)‡}

1) (北京无线电计量测试研究所, 计量与校准重点实验室, 北京 100854)

2) (北京信息科技大学理学院, 北京 100192)

(2020年9月2日收到; 2021年1月22日收到修改稿)

在超冷费米系统中实现人造规范势的突破, 吸引了许多新问题的研究, 展现了许多新奇的物理现象. 本文研究了在环阱中, 具有自旋轨道耦合和塞曼作用的两体相互作用费米模型. 通过平面波展开的方法, 解析求解了两体费米系统的本征能态. 系统的总动量为守恒量, 可以在不同总动量空间中研究能谱. 研究发现: 随着塞曼相互作用增大, 在不同总动量空间, 两体费米系统的本征能量均逐渐降低, 系统基态从总动量为零空间转变到有限值空间. 从吸引到排斥相互作用, 无塞曼相互作用时, 基态总动量始终为零, 有塞曼相互作用时, 基态总动量从零转变为有限值. 通过单粒子和基态动量分布研究, 本文直观地揭示了由塞曼能级劈裂引起的基态转变.

关键词: 两体费米系统, 自旋轨道耦合, 塞曼相互作用

PACS: 34.10.+x, 34.50.-s, 03.75.Hh

DOI: 10.7498/aps.70.20201456

1 引言

自旋轨道耦合是粒子自旋内禀自由度和轨道自由度之间的相互作用, 在原子分子物理、量子光学和凝聚态物理中诱导产生了许多重要的物理现象^[1-3]. 冷原子系统可以实现原子及其相互作用的精确操控, 是研究凝聚态系统及复杂物理系统的理想平台. 虽然原子是中性的且没有电极和磁极, 但仍可利用激光与原子的相互作用, 在超冷原子中实现人造自旋轨道耦合, 最早美国国家标准与技术研究院 Speilman 研究组^[4] 在超冷玻色气体中实现了一维自旋轨道耦合, 山西大学 Zhang 研究组^[5] 和美国麻省理工学院 Zwierlein 研究组^[6] 均实现了一维自旋轨道耦合费米气体, 山西大学 Zhang 研究

组^[7] 进一步实现了二维自旋轨道耦合费米气体, 中国科学技术大学的研究组^[8] 在超冷玻色气体中实现了二维自旋轨道耦合, 这些突破为研究自旋轨道耦合系统提供了新的思路.

自旋轨道耦合系统的研究展现了许多新的物理现象^[9-33]. 研究发现, 自旋轨道耦合费米系统有很多新奇的量子态, 例如拓扑超流态、Fulde-Ferrell (FF) 态等^[9-16]. 考虑塞曼场时, 自旋轨道耦合和塞曼场共同作用诱导产生了非平庸的拓扑相^[17-22]. 少体系统的研究为多体系统探索提供了直观的物理图像^[23-33]. 二维自旋轨道耦合两体系统研究预示了多体系统可能出现 FF 配对态^[23]. Rashba 自旋轨道耦合两体精确解揭示了一种新的束缚态 Rashbon, 在弱相互作用下仍能诱导粒子从弱配对态到玻色爱因斯坦凝聚态转变^[24,25]. 在强相互作用

* 国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 11704037) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chenxing08@mails.ucas.ac.cn

‡ 通信作者. E-mail: 13466728668@163.com

下, 谐振子阱中自旋轨道耦合两体精确解发现反宇称态是玻色系统基态的重要组成部分^[26]等. 该类研究为进一步探索多体系统物理现象奠定了基础.

本文研究了在一维环阱中, 具有自旋轨道耦合和塞曼场的两体相互作用费米模型. 在冷原子系统中, 通过激光耦合¹⁷³Yb原子的两个超精细基态, 实现了有效的一维自旋轨道耦合和塞曼相互作用的两分量费米系统^[34]. 同时, 通过在另外两个方向上施加强势阱囚禁可以得到有效的一维原子相互作用^[35]. 对于两体问题, 通常可以将两原子坐标转换为质心和相对坐标. 质心运动不依赖于粒子间相互作用, 质心动量为守恒量, 可以在不同质心动量空间分析能谱. 通过将质心和相对运动分开, 许多两体系统能够被约化为单体问题^[36].

本文研究的两体费米系统, 由于相对运动与质心运动耦合使得精确求解更为困难. 本文利用平面波展开法, 获得了解析的本征能量和本征态, 实现了两体费米系统随着自旋轨道耦合、塞曼相互作用和接触相互作用系数变化时物理性质的精确研究.

2 费米子模型

在环阱中, 考虑一个具有自旋轨道耦合、塞曼相互作用和粒子间接触相互作用的费米系统, 哈密顿量表示为

$$\hat{H} = \int dx \hat{a}_x^\dagger \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \hat{\sigma}^x \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) + \beta \hat{\sigma}^z \right] \hat{a}_x + g \int \hat{a}_{x\uparrow}^\dagger \hat{a}_{x\downarrow}^\dagger \hat{a}_{x\downarrow} \hat{a}_{x\uparrow} dx, \quad (1)$$

其中, $\hat{a}_x = (\hat{a}_{x\uparrow}, \hat{a}_{x\downarrow})^T$ 是两分量的场算符, 在环阱中, 算符需满足 $\hat{a}_x = \hat{a}_{x+L}$, 其中 L 是环阱周长; 第一项表示单粒子哈密顿量, 其中 m 为粒子质量, $\hat{\sigma}^j$ 为泡利矩阵算符, α 为自旋轨道耦合系数, β 为塞曼相互作用系数; 第二项表示粒子间的接触相互作用, g 为相互作用系数.

两体费米系统的波函数表示为

$$\Psi(x_1, x_2) = \int [\psi_{\uparrow\uparrow}(x_1, x_2) a_{x_1\uparrow}^\dagger a_{x_2\uparrow}^\dagger + \psi_{\uparrow\downarrow}(x_1, x_2) a_{x_1\uparrow}^\dagger a_{x_2\downarrow}^\dagger + \psi_{\downarrow\uparrow}(x_1, x_2) a_{x_1\downarrow}^\dagger a_{x_2\uparrow}^\dagger + \psi_{\downarrow\downarrow}(x_1, x_2) a_{x_1\downarrow}^\dagger a_{x_2\downarrow}^\dagger] \times dx_1 dx_2 |0\rangle. \quad (2)$$

将哈密顿量(1)和波函数(2)代入薛定谔方程

$\hat{H}\Psi(x_1, x_2) = E\Psi(x_1, x_2)$, 两体费米系统的方程约化为 $H\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$, 其中,

$$H = \left(\sum_{i=1,2} -\frac{\hbar^2}{2m_i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - i\alpha\sigma_i^x \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta\sigma_i^z \right) + g\delta(x_1 - x_2)\delta_{\sigma\bar{\sigma}}, \quad (3)$$

其中, σ 和 $\bar{\sigma}$ 表示自旋 \uparrow 或 \downarrow 且 $\bar{\sigma} \neq \sigma$; $\psi(x_1, x_2) = (\psi_{\uparrow\uparrow}(x_1, x_2), \psi_{\uparrow\downarrow}(x_1, x_2), \psi_{\downarrow\uparrow}(x_1, x_2), \psi_{\downarrow\downarrow}(x_1, x_2))^T$.

在环阱中, 两体费米系统的波函数需满足周期性边界条件, 表示为

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1 + L, x_2) = \psi(x_1, x_2 + L). \quad (4)$$

由于自旋轨道耦合和塞曼相互作用, 自旋分量不再是好量子数, 不能在某一个自旋分量空间仅求解波函数的坐标部分, 而需要同时考虑自旋分量与坐标之间的耦合, 考虑所有自旋态时的本征波函数.

3 质心和相对坐标空间

引入质心坐标 $X = (x_1 + x_2)/2$ 和相对坐标 $x = x_1 - x_2$, 哈密顿量(3)重新表示为

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - i\alpha\sigma^X \frac{\partial}{\partial X} - i\alpha \frac{\sigma_1^x - \sigma_2^x}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \beta\sigma^Z + g\delta(x)\delta_{\sigma\bar{\sigma}}, \quad (5)$$

其中 $\sigma^X = \sigma_1^x + \sigma_2^x$ 和 $\sigma^Z = \sigma_1^z + \sigma_2^z$. 在质心及相对坐标空间, 两体费米模型仍满足周期性边界条件, 该条件限定了波函数中动量的取值范围. 由(5)式的哈密顿量表达式可以看出, 自旋轨道耦合项与质心坐标和相对坐标都有关系, 而粒子间接触相互作用仅与相对运动有关, 与质心运动无关. 质心动量 $\hat{K} = -i\frac{\partial}{\partial X}$ 为两费米子的总动量, 与哈密顿量对易, 是好量子数, 两费米子系统的本征能谱能够在不同总动量空间中求解.

将本征波函数用平面波展开, 表示为

$$\psi(X, x) = A \sum_k e^{iKX + ikx} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow\uparrow}(K, k) \\ \psi_{\uparrow\downarrow}(K, k) \\ \psi_{\downarrow\uparrow}(K, k) \\ \psi_{\downarrow\downarrow}(K, k) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中 A 是归一化系数, K 为总动量, k 是相对动量的平面波分量. 取 σ 和 σ' 表示自旋 \uparrow 或 \downarrow , 波函数每一个分量 $\psi_{\sigma\sigma'}(K, k)$ 表示不同自旋态时平面波的展开系数. 通过求解薛定谔方程, 获得 $\psi_{\sigma\sigma'}(K, k)$ 的

解析表达式, 以下将 $\psi_{\sigma\sigma'}$ (K, k) 简写为 $\psi_{\sigma\sigma'}$.

求解波函数之前, 首先通过周期性边界条件获得波函数中 K 和 k 的范围. 将 $\psi(X, x)$ 中的 X 和 x 变换到 x_1, x_2 , 获得波函数 $\psi(x_1, x_2)$ 表达式, 依据周期性边界条件 (4) 式, 总动量 K 和相对动量分量 k 需满足

$$K_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad (7a)$$

$$k_n^{n'} = \begin{cases} \frac{2n'\pi}{L}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{(2n'+1)\pi}{L}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (7b)$$

(6) 式中的 K 和 k 分别用 K_n 和 $k_n^{n'}$ 表示, 其中 n 和 n' 是整数, n 表示了总动量的量子数, 而 n' 描述了相对动量分量的量子数. 从 (7b) 式得出, $k_n^{n'}$ 与总动量子数 n 的奇偶有关, 是一系列离散的数值. 对于给定的 n , 即给定总动量 K_n , 相应的本征能量 E 表示为 E_n .

为了解析求解系统的本征波函数, 引入接触势 $\delta(x) = \frac{1}{L} \sum_{n'} e^{ik_n^{n'} x}$, 将波函数 (6) 式代入薛定谔方程 $\mathbf{H}\psi(X, x) = E_n\psi(X, x)$, 展开为

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{n,n'}^0 + 2\beta) \psi_{\uparrow\uparrow} \\ & = \alpha \left(\frac{K_n}{2} - k_n^{n'} \right) \psi_{\uparrow\downarrow} + \alpha \left(\frac{K_n}{2} + k_n^{n'} \right) \psi_{\downarrow\uparrow}, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_{n,n'}^0 - 2\beta) \psi_{\downarrow\downarrow} \\ & = \alpha \left(\frac{K_n}{2} + k_n^{n'} \right) \psi_{\uparrow\downarrow} + \alpha \left(\frac{K_n}{2} - k_n^{n'} \right) \psi_{\downarrow\uparrow}, \end{aligned} \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,n'}^0 \psi_{\uparrow\downarrow} & = \alpha \left(\frac{K_n}{2} + k_n^{n'} \right) \psi_{\uparrow\uparrow} + \frac{g}{2L} \sum_{n'} (\psi_{\uparrow\downarrow} - \psi_{\downarrow\uparrow}) \\ & + \alpha \left(\frac{K_n}{2} - k_n^{n'} \right) \psi_{\downarrow\downarrow}, \end{aligned} \quad (8c)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,n'}^0 \psi_{\downarrow\uparrow} & = \alpha \left(\frac{K_n}{2} - k_n^{n'} \right) \psi_{\uparrow\uparrow} - \frac{g}{2L} \sum_{n'} (\psi_{\uparrow\downarrow} - \psi_{\downarrow\uparrow}) \\ & + \alpha \left(\frac{K_n}{2} + k_n^{n'} \right) \psi_{\downarrow\downarrow}, \end{aligned} \quad (8d)$$

$$\text{其中 } \varepsilon_{n,n'}^0 = E_n - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{K_n^2}{2} + 2(k_n^{n'})^2 \right].$$

引入 $\psi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\uparrow\downarrow} - \psi_{\downarrow\uparrow})$ 和 $\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{\uparrow\downarrow} + \psi_{\downarrow\uparrow})$, 综合方程 (8a)–(8d), 可以得到 ψ_s 和 ψ_a 的表达式,

$$\psi_s =$$

$$\frac{g \sum_{n'} \psi_s}{L \left(\varepsilon_{n,n'}^0 - 2\varepsilon_{n,n'}^+ (\alpha k_n^{n'})^2 - \frac{(\alpha^2 K_n k_n^{n'} \varepsilon_{n,n'}^-)^2}{\varepsilon_{n,n'}^0 - \frac{1}{2} \varepsilon_{n,n'}^+ (\alpha K_n)^2} \right)}, \quad (9a)$$

$$\psi_a = -\frac{\alpha^2 K_n k_n^{n'} \varepsilon_{n,n'}^- \psi_s}{\varepsilon_{n,n'}^0 - \frac{1}{2} (\alpha K_n)^2 \varepsilon_{n,n'}^+}, \quad (9b)$$

其中

$$\varepsilon_{n,n'}^\pm = \frac{1}{\varepsilon_{n,n'}^0 - 2\beta} \pm \frac{1}{\varepsilon_{n,n'}^0 + 2\beta}. \quad (10)$$

从 ψ_s 的方程式 (9a) 推得本征能量的自治方程, 表示为

$$\frac{L}{g} = \sum_{n'} \frac{1}{\varepsilon_{n,n'}^0 - 2\varepsilon_{n,n'}^+ (\alpha k_n^{n'})^2 - \frac{(\alpha^2 K_n k_n^{n'} \varepsilon_{n,n'}^-)^2}{\varepsilon_{n,n'}^0 - \frac{1}{2} \varepsilon_{n,n'}^+ (\alpha K_n)^2}}. \quad (11)$$

通过数值求解 (11) 式的自治方程, 获得了两体费米模型精确的本征能量 E_n . 由方程 (11) 可得出, 本征能量关于 $\pm K_n$ 是简并的, 以下分析以 $K_n > 0$ 为代表. 将解出的本征能量代入方程 (9a) 和方程 (9b) 中, 获得精确的 ψ_s 和 ψ_a . 同时, $\psi_{\uparrow\downarrow}$ 和 $\psi_{\downarrow\uparrow}$ 通过 ψ_s 和 ψ_a 推出, 另外两个分量 $\psi_{\uparrow\uparrow}$ 和 $\psi_{\downarrow\downarrow}$ 通过 $\psi_{\uparrow\downarrow}$ 和 $\psi_{\downarrow\uparrow}$ 获得, 归一化后得到精确的波函数. 通过精确的本征能量和波函数, 实现了两体费米系统物理特性的精确研究.

4 结果与讨论

针对不同的自旋轨道耦合、塞曼相互作用和接触相互作用系数, 本文分析了两体费米系统的基态能谱和动量分布. 取 $\hbar = 1$, $m = 1$ 和 $L = 1$. 总动量 K_n 是好量子数, 可以用 n 表征. 当 $n = 0$ 和 $n = 1$, 总动量分别为 $K_0 = 0$ 和 $K_1 = 2\pi$.

首先, 考虑仅有接触相互作用的费米系统, 即当 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 0$ 时, 本征能量的自治方程 (11) 式约化为

$$\frac{1}{g} = \sum_{n'} \frac{1}{E_n - \frac{1}{2} \left[\frac{K_n^2}{2} + 2(k_n^{n'})^2 \right]}. \quad (12)$$

通过简化得到

$$\frac{1}{g} = \begin{cases} \cot\left(\sqrt{E_n - \frac{K_n^2}{4}} \frac{1}{2}\right) / \left(2\sqrt{E_n - \frac{K_n^2}{4}}\right), & n \text{ 为偶数,} \\ -\tan\left(\sqrt{E_n - \frac{K_n^2}{4}} \frac{1}{2}\right) / \left(2\sqrt{E_n - \frac{K_n^2}{4}}\right), & n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

根据该式可得

$$\begin{aligned} k' &= (2I-1)\pi - 2\arctan(k'/c'), & n \text{ 为偶数,} \\ k' &= 2I\pi - 2\arctan(k'/c'), & n \text{ 为奇数,} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $k' = \sqrt{E_n - K_n^2/4}$, $c' = g/2$. 当 I 为整数时, (13) 式与两体杂核系统精确解 [33] 中的 (12) 式结果一致.

考虑仅具有自旋轨道耦合的费米相互作用系统. 即当 $\beta = 0$, 本征能量的自洽方程 (11) 式约化为 $1/g =$

$$\sum_{n'} \frac{1}{E_n - \frac{1}{2} \left[\frac{K_n^2}{2} + 2(k_n')^2 \right] - \frac{4\alpha^2 (k_n')^2}{E_n - \frac{1}{2} \left[\frac{K_n^2}{2} + 2(k_n')^2 \right]}}. \quad (14)$$

由 (14) 式可得, 当 $g \rightarrow 0$, 本征能量 $E_n \rightarrow K_n^2/4 + (k_n')^2 \pm 2\alpha k_n'$, 约化为单粒子的本征能量. 给定 $g = 1$, 图 1 给出了当 $n = 0$ 时, 在总动量 $K_0 = 0$ 空间, 最低能量 E_0 随着自旋轨道耦合系数 α 变化的图像. 随着 α 的增大, 本征能量逐渐变小. 图 1 中的插图给出了能量 $E_0 + \alpha^2$ 随着 α 增加而周期性的变化. 在无塞曼相互作用情况下, 研究发现自旋轨道耦合项通过么正变换, 能够变换到周期性边界条件中, 展现出周期性地依赖于自旋轨道耦合系数 [37].

考虑具有自旋轨道耦合和塞曼相互作用的费米系统, 对于不同的 K_n , 本征能量 E_n 通过数值求解自洽方程 (11) 式获得. 特别地, 对于 $K_0 = 0$, 本征能量的自洽方程 (11) 式可以约化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} &= \sum_{n'} \frac{1}{2(\beta^2 + \alpha^2 k_n'^2)} \left[\frac{2\beta^2}{E_n - k_n'^2} \right. \\ &+ \frac{\alpha^2 k_n'^2}{E_n - k_n'^2 - 2\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 k_n'^2}} \\ &\left. + \frac{\alpha^2 k_n'^2}{E_n - k_n'^2 + 2\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 k_n'^2}} \right], \end{aligned}$$

从该式可得, 当相互作用 $g \rightarrow 0$ 时, 本征能量趋于 $k_n'^2$ 和 $k_n'^2 \pm 2\sqrt{\beta^2 + \alpha^2 k_n'^2}$.

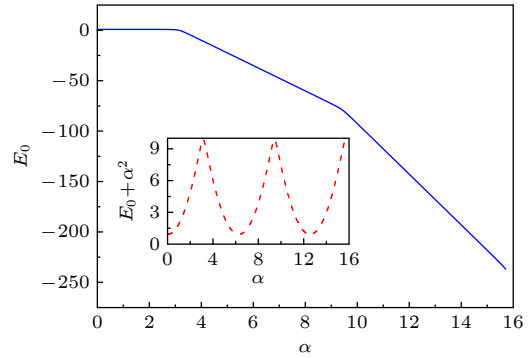


图 1 最低能量 E_0 随着自旋轨道耦合参数 α 的变化. 插图为 $E_0 + \alpha^2$ 随 α 的变化, $n = 0, g = 1, \beta = 0$
Fig. 1. The lowest energy E_0 versus spin-orbit coupling parameter α . Insert is $E_0 + \alpha^2$ versus α . $n = 0, g = 1, \beta = 0$.

图 2 给出了在较弱相互作用 $g = 1$ 和 $\alpha = 1.2\pi$ 条件下, 随着塞曼相互作用系数 β 变化, 在不同总动量 K_n 空间中最低能量 E_n 变化的图像. 如图 2 所示, 随着塞曼相互作用 β 增大, 能量 E_n 逐渐减小, 在两个总动量空间的最低能级间发生了能级交叉. 当 β 较小时, $E_0 < E_1$, 如取 $\beta = \pi$ 时, 两体费米系统基态能量为 E_0 , 基态的总动量为 K_0 . 当 β 足够大时, 相反地, $E_1 < E_0$, 如取 $\beta = 2\pi$ 时, $E_1 < E_0$, 两体费米系统基态能量为 E_1 , 基态的总动量为 K_1 . 综上所述, 随着 β 的增加, 两体费米系统的基态从 K_0 转移至 K_1 空间. 通过增加塞曼相互作用强度, 系统基态从质心静止转移到了质心运动的状态.

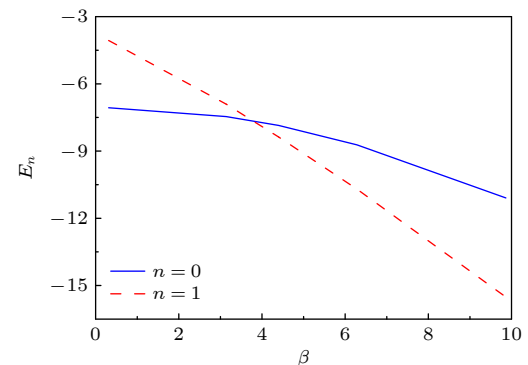


图 2 在弱相互作用条件下最低能量 E_0 和 E_1 随塞曼系数 β 的变化, $g = 1, \alpha = 1.2\pi$
Fig. 2. The lowest energies E_0 and E_1 versus Zeeman interaction parameter β in the weak interaction condition. $g = 1, \alpha = 1.2\pi$.

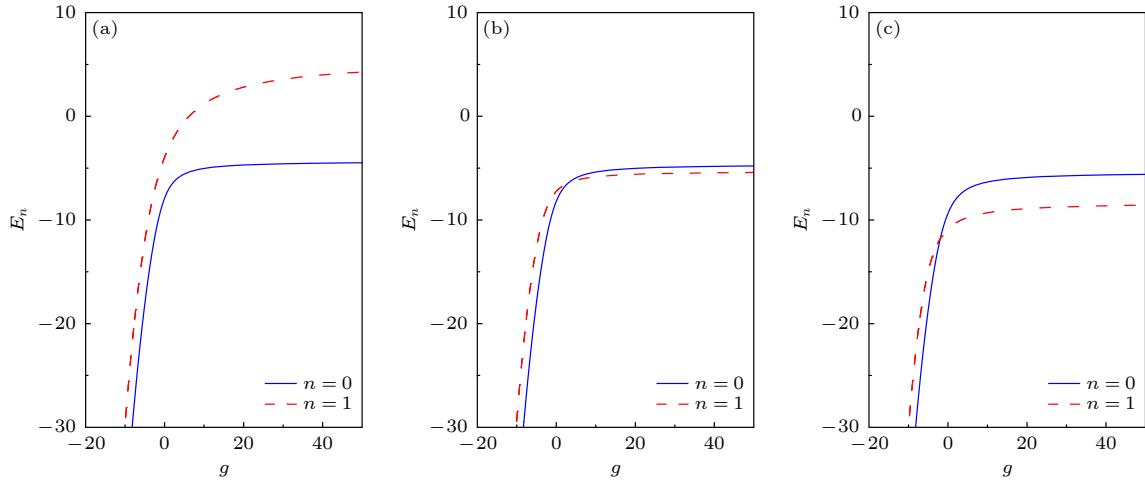

 图 3 能量 E_0 和 E_1 随着接触相互作用 g 的变化, $\alpha = 1.2\pi$ (a) $\beta = 0$; (b) $\beta = \pi$; (c) $\beta = 2\pi$

 Fig. 3. The energies E_0 and E_1 versus contact interaction parameter g , $\alpha = 1.2\pi$: (a) $\beta = 0$; (b) $\beta = \pi$; (c) $\beta = 2\pi$.

图 3 给出了在任意相互作用强度 g 下本征能量 E_n 的变化. 横坐标表示费米子间的相互作用系数, 从负到正表示从吸引相互作用到排斥相互作用. 给定自旋轨道耦合系数 $\alpha = 1.2\pi$, 图 3(a)—图 3(c) 对比了不同塞曼相互作用强度 β 时, 能量 E_n 随粒子间相互作用系数 g 的变化. 图 3(a) 呈现了在无塞曼相互作用 ($\beta = 0$) 情况下, 能量 E_0 总是小于 E_1 , 即基态的总动量始终为零. 考虑塞曼相互作用时, 图 3(b) 和图 3(c) 均呈现了能级交叉现象. 在图 3(b) 中, 当塞曼相互作用系数 $\beta = \pi$ 时, 在强吸引相互作用下基态能量为 E_0 , 强排斥下为 E_1 , 而在图 2 中, 相同 β 时在弱排斥作用下基态能量为 E_0 , 与强排斥下不同. 类似地, 图 3(c) 呈现了 $\beta = 2\pi$ 时本征能量的图像, 强吸引下基态能量为 E_0 , 强排斥下为 E_1 , 对比图 2 中在弱排斥作用下基态能量仍为 E_1 . 综上所述, 具有塞曼相互作用时, 两体费米系统能够在强相互作用下呈现和弱相互作用下不同的基态特性. 随着相互作用从吸引到排斥转变, 具有塞曼相互作用的费米系统基态能量从 E_0 转变到 E_1 , 基态总动量从零变到有限值.

为了直观理解基态的性质, 我们讨论了无接触相互作用 ($g = 0$) 时, 单费米子的本征能量和本征态. 单粒子哈密顿量为 $H_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha \sigma^x \times \left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) + \beta \sigma^z$. 不考虑自旋轨道耦合和塞曼相互作用 ($\alpha = 0, \beta = 0$) 时, 单费米子能谱不依赖于自旋, 基态动量 $p_0 = 0$. 两个费米子分别占据不同自旋态的最低能级, 此时总动量为零.

仅有自旋轨道耦合 ($\beta = 0$) 系统, 单粒子本征

能量为 $e_{p_0}^{\pm} = p_0^2/2 \pm \alpha p_0$, 自旋轨道耦合项是动量 p_0 的线性项, \leftarrow 和 \rightarrow 代表 σ_x 的自旋态. 在自由空间时, 单粒子基态从 $p_0 = 0$ 转变到有限动量值 $p_{0,\pm} = \pm\alpha$, 符号取决于自旋分量. 同时改变动量和自旋 ($p_0 \rightarrow -p_0$ 和 $\sigma_x \rightarrow -\sigma_x$), 哈密顿量保持不变, 系统具有 Z_2 对称性, 此时系统基态为两个简并态, 动量值相等但符号相反. 因此, 当自旋轨道耦合占主导时, 两费米子占据两个简并基态, 总动量为零. 在周期性边界条件下, 动量为一系列离散值 $p_0 = 2\pi n_0$, n_0 为整数, 此时基态动量取与 $\pm\alpha$ 最相近的值, 即 $|p_0 \pm \alpha|$ 最小. 当 $-\pi + 2\pi n_0 < \alpha < \pi + 2\pi n_0$, 基态相应的动量为 $p_{0,\pm} = \pm 2\pi n_0$. 当 $\alpha = 0.2\pi$, 则有 $n_0 = 0$, 基态为 $p_0 = 0$. 当 $\alpha = 1.2\pi$, 则有 $n_0 = 1$, 基态为 $p_{0,\pm} = \pm 2\pi$.

最后, 考虑具有塞曼相互作用和自旋轨道耦合的费米子系统. 仅考虑塞曼相互作用 ($\alpha = 0$) 时, 自旋向上和自旋向下的单粒子能谱发生劈裂, 产生能隙, 且能隙的大小与塞曼相互作用的系数 β 有关. 当 β 为正时, 自旋向下的费米子能级降低, 且最低能级仍处于 $p_0 = 0$, 而自旋向上的能级升高, 多体费米系统将先填充自旋向下的费米子能级, 再填充自旋向上的能级, 因此多体费米系统基态的总动量由所填充的能级决定. 考虑两费米子基态, 一个费米子将填充最低能级 $p_0 = 0$, 另一个填充 $p_0 \neq 0$ 的态, 此时总动量为有限值. 当塞曼效应占主导时, 两费米子的总动量为有限值. 考虑塞曼相互作用和自旋轨道耦合作用, 单粒子本征能量为 $e_{p_0}^+ = \frac{p_0^2}{2} + \sqrt{\alpha^2 p_0^2 + \beta^2}$, $e_{p_0}^- = \frac{p_0^2}{2} - \sqrt{\alpha^2 p_0^2 + \beta^2}$.

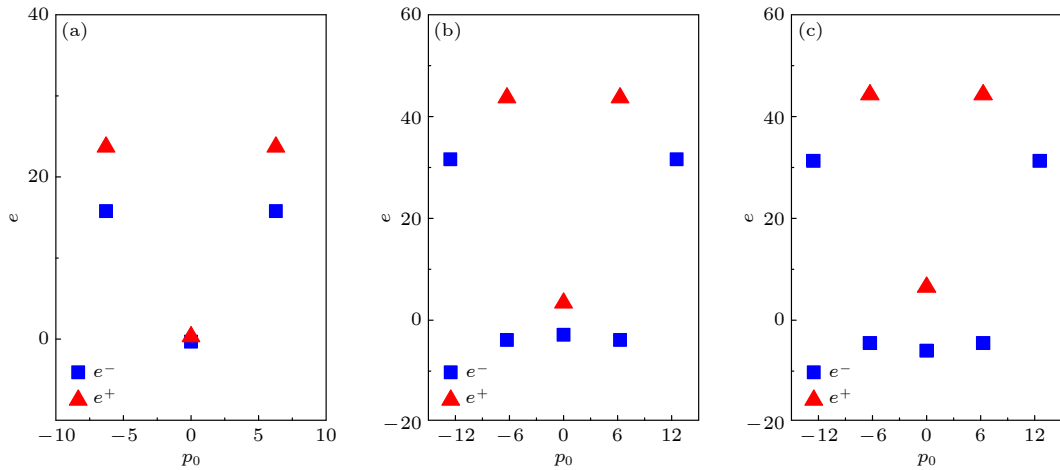


图 4 单粒子能级 e^- 和 e^+ (a) $\alpha = 0.2\pi$, $\beta = 0.1\pi$; (b) $\alpha = 1.2\pi$, $\beta = \pi$; (c) $\alpha = 1.2\pi$, $\beta = 2\pi$

Fig. 4. The single particle eigenenergies with two branches e^- and e^+ : (a) $\alpha = 0.2\pi$, $\beta = 0.1\pi$; (b) $\alpha = 1.2\pi$, $\beta = \pi$; (c) $\alpha = 1.2\pi$, $\beta = 2\pi$.

在自由空间时, 当 $\alpha^2 > \beta$ 时, 自旋轨道耦合效应占主导作用时, 单粒子基态是简并的, 相应的动量为 $p_{0,\pm} = \pm\alpha\sqrt{1 - (\beta^2/\alpha^4)}$, 能量为 $e_{p_{0,\pm}}^- = -(1/2)[\alpha^2 + (\beta/\alpha)^2]$. 随着 β 的增大, 两个极小值 $p_{0,\pm}$ 逐渐靠近, 当 $\beta = \alpha^2$ 时, 这两个极小值融合为单个最小值 $p_0 = 0$. 当 $\beta > \alpha^2$ 时, 塞曼相互作用占主导作用, 基态 $p_0 = 0$, 相应的基态能量为 $e_0^- = -\beta$. 在周期性边界条件下, 类似地, 动量仅能取离散值 $p_0 = 2\pi n_0$. 当自旋轨道耦合占主导作用时, 需满足 $e_{n_0 \neq 0}^- < e_0^-$ 条件, 两体费米子能够处于简并基态, 此时基态对应的动量为 $p_{0,\pm} = \pm 2\pi n_0$. 当塞曼相互作用占主导时, 则有 $e_0^- < e_{n_0 \neq 0}^-$, 基态动量为 $p_0 = 0$, 次低能级的动量 $p_0' \neq 0$. 例如, 当 $n_0 = 1$ 时, 依据 $e_0^- < e_{2\pi}^-$ 推出 $\beta > \alpha^2 - \pi^2$, 令 $\beta_c = \alpha^2 - \pi^2$. 当 $\beta < \beta_c$, 自旋轨道耦合为主导作用, 两体费米子占据两个简并基态, 总动量为零. 当 $\beta > \beta_c$, 塞曼相互作用为主导作用, 两体费米子依次填充最低能级、零动量和有限动量的能级, 总动量为有限值.

图 4 给出了不同自旋轨道耦合和塞曼相互作用参量时的单粒子能级结构. 图 4(a) 是自旋轨道耦合和塞曼相互作用参量较小 ($\alpha = 0.2\pi$ 和 $\beta = 0.1\pi$) 时的能级结构图. 可以看出, 能谱上下分支 $e_{p_0}^\pm$ 最低能级均为 $p_0 = 0$, 两体无相互作用费米子占据这两个态. 考虑 $\alpha = 1.2\pi$, 则有 $n_0 = 1$, 此时 $\beta_c = 0.44\pi^2 \approx 4.34$. 图 4(b) 是自旋轨道耦合和塞曼相互作用参量较大时 ($\alpha = 1.2\pi$ 和 $\beta = \pi < \beta_c$) 的能级图, 两体无相互作用费米子占据 $e_{p_0}^-$ 的两个简并基态, 两个动量取 $p_{0\pm} = \pm 2\pi$, 对应的总动量

仍为零. 图 4(c) 是塞曼相互作用更大时 ($\alpha = 1.2\pi$ 和 $\beta = 2\pi > \beta_c$) 的能级图, 两体无相互作用费米子占据 $e_{p_0}^-$ 的两个最低能级, 基态动量为 $p_0 = 0$, 次之为 $p_0' \neq 0$, 对应的总动量为有限值. 当塞曼相互作用增大时, 总动量从零转变到有限值, 单粒子分析很好地解释了图 2 中弱排斥相互作用时基态转变特性.

两体费米系统的动量分布可以表示为

$$n(p_1) = \int \psi^\dagger(p_1, p_2) \psi(p_1, p_2) dp_2, \quad (15a)$$

$$n(p_2) = \int \psi^\dagger(p_1, p_2) \psi(p_1, p_2) dp_1, \quad (15b)$$

其中, $\psi(p_1, p_2)$ 由 $\psi(x_1, x_2)$ 的傅里叶变换而来. 图 5 给出了在较弱相互作用时对于不同自旋轨道耦合 α 和塞曼相互作用 β 下基态的动量分布, 且自旋轨道耦合与塞曼相互作用系数取值与图 4 中一致. 因为

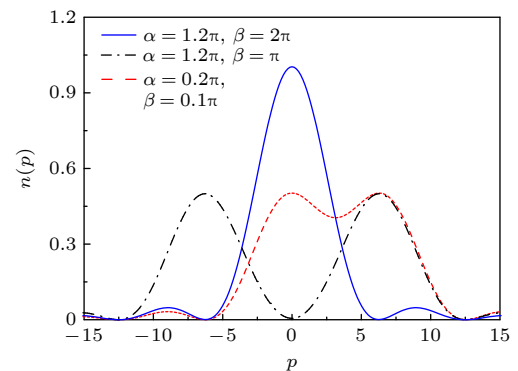


图 5 对于不同的 α 和 β , 基态的动量分布, $g = 1$

Fig. 5. The momentum distributions of ground states for different α and β , $g = 1$.

$n(p_1) = n(p_2)$, 这里以 $n(p_1)$ 作为代表. 当 $\alpha = 0.2\pi$ 和 $\beta = 0.1\pi$ 时, 粒子动量分布集中于 $p = 0$. 当 $\alpha = 1.2\pi$ 和 $\beta = \pi$ 时, 动量分布出现两个峰, 为 $p = \pm 2\pi$. 当 $\alpha = 1.2\pi$ 和 $\beta = 2\pi$ 时, 动量分布出现两个峰, 为 $p = 0$ 和 $p = 2\pi$. 图 5 是在弱排斥作用情况下的基态动量分布, 与图 4 中无相互作用情况下, 两费米子动量分布的分析一致. 通过单粒子能谱分析和动量分布研究, 直观地理解了随着塞曼相互作用变化, 费米子系统基态的转变过程, 为理解多体系统的物理现象提供了基础.

5 结 论

本文解析求解了环阱中具有自旋轨道耦合、塞曼作用和接触相互作用的两体费米系统. 研究发现: 首先, 仅考虑自旋轨道耦合作用时, 随着自旋轨道耦合系数增加, 本征能量将降低, 主要依赖于与自旋轨道耦合相关的常数项. 同时, 不考虑上述常数项时, 本征能量周期性地依赖于自旋轨道耦合系数. 进一步地, 考虑自旋轨道耦合和塞曼场作用, 随着塞曼相互作用增大, 不同总动量空间的最低能量均有降低, 并且在这些最低能级间发生了能级交叉, 基态从零转变到有限值动量空间. 最后, 随着两体接触相互作用从吸引到排斥的变化, 无塞曼作用时基态总动量始终为零, 考虑塞曼作用时, 基态总动量从零转变为有限值. 通过单粒子能谱分析, 发现在塞曼相互作用为主导时, 塞曼能级劈裂引起了基态的这种转变. 两体费米系统的解析解展现了丰富的物理现象, 是研究多体系统的基础. 在本研究基础上, 未来可以进一步研究多体相互作用费米系统、杂核系统、光晶格势阱系统、多旋量费米系统的物理图像.

参考文献

- [1] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
 [2] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045

- [3] Shi T T, Wang L J, Wang J K, Zhang W 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 016701 (in Chinese) [施婷婷, 汪六九, 王璟琨, 张威 2020 物理学报 **69** 016701]
 [4] Lin Y J, Garcis K J, Spielman I B 2011 *Nature* **83** 471
 [5] Wang P J, Yu Z Q, Fu Z K, Miao J, Huang L H, Chai S J, Zhai H, Zhang J 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095301
 [6] Cheuk L W, Sommer A T, Hadzibabic Z, Yefsah T, Bakr W S, Zwierlein M W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 095302
 [7] Huang L H, Meng Z M, Wang P J, Peng P, Zhang S L, Chen L C, Li D H, Zhou Q, Zhang J 2016 *Nat. Phys.* **12** 540
 [8] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
 [9] Zhou J, Zhang W, Yi W 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063603
 [10] Chen J, Hu H, Gao X L 2014 *Phys. Rev. A* **90** 023619
 [11] Meng Z, Huang L, Peng P, Li D, Chen L, Xu Y, Zhang C, Wang P, Zhang J 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 235304
 [12] Dong L, Jiang L, Pu H 2013 *New J. Phys.* **15** 075014
 [13] Chen C 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 235302
 [14] Qu C L, Zheng Z, Gong M, Xu Y, Mao L, Zou X B, Guo C C, Zhang C W 2013 *Nat. Commun.* **4** 2710
 [15] Zhang W, Yi W 2013 *Nat. Commun.* **4** 2711
 [16] Valdés-Curiel A, Trypogeorgos D, Liang Q Y, Anderson R P, Spielman I B arXiv: 1907.08637
 [17] Liu X J, Hu H, Pu H 2015 *Chin. Phys. B* **24** 050502
 [18] Cao Y, Liu X J, He L Y, Long G L, Hu H 2015 *Phys. Rev. A* **91** 023609
 [19] Devreese J P A, Tempere J, Sá de Melo C A R 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 165304
 [20] Luo X B, Zhou K Z, Liu W M, Liang Z X, Zhang Z D 2014 *Phys. Rev. A* **89** 043612
 [21] Xu Y, Zhang C W 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 110401
 [22] Zhou K Z, Zhang Z D 2019 *J. Phys. Chem. Solids* **128** 207
 [23] Yang S, Wu F, Yi W, Zhang P 2019 *Phys. Rev. A* **100** 043601
 [24] Yu Z Q, Zhai H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195305
 [25] Vyasanakere J P, Shenoy V B 2012 *New J. Phys.* **14** 043041
 [26] Usui A, Fogarty T, Campbell S, Gardiner S A, Busch T 2020 *New J. Phys.* **22** 013050
 [27] Li Q M, Callaway J 1991 *Phys. Rev. B* **43** 3278
 [28] Cui X L, Yi W 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031026
 [29] Wang J K, Yi W, Zhang W 2016 *Front. Phys.* **11** 118102
 [30] Peng S G, Zhang C X, Tan S, Jiang K J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 060408
 [31] Cui X L 2017 *Phys. Rev. A* **95** 030701
 [32] Gong B H, Li S, Zhang X H 2019 *Phys. Rev. A* **99** 012703
 [33] Chen X, Guan L M, Chen S 2011 *Eur. Phys. J. D* **64** 459
 [34] Song B, He C D, Zhang S C, Hajiyev E, Huang W, Liu X J, Jo G B 2016 *Phys. Rev. A* **94** 061604
 [35] Olshanii M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 938
 [36] Busch T, Englert B G, Rzazewski K, Wilkens M 2001 *J. Phys. B* **34** 4571
 [37] Chen X, Hu H P, Jiang Y Z, Chen S 2013 *Eur. Phys. J. D* **67** 166

Ground energy level transition for two-body interacting Fermionic system with spin-orbit coupling and Zeeman interaction*

Chen Xing^{1)†} Xue Xiao-Bo¹⁾ Zhang Sheng-Kang¹⁾ Ma Yu-Quan²⁾
Fei Peng¹⁾ Jiang Yuan¹⁾ Ge Jun^{1)‡}

1) (*Science and Technology on Metrology and Calibration Laboratory, Beijing Institute of Radio Metrology and Measurement, Beijing 100854, China*)

2) (*Department of Science, Beijing Information Science & Technology University, Beijing 100192, China*)

(Received 2 September 2020; revised manuscript received 22 January 2021)

Abstract

Experimental realization of artificial gauge field has made it possible to simulate important models with electromagnetic field or spin-orbit interaction in condensed matter physics, which opens a new avenue to engineer novel quantum states and phenomena. The spin-orbit coupled system reveals many significant phenomena in condensed matter physics, such as quantum spin Hall effect, topological insulator and topological superconductor. The combined effect of Zeeman interaction and spin-orbit coupling leads to a nontrivial topological phase. The analytic solution of few-body system provides an in-depth insight into the physical phenomena, which has been studied extensively. Through the analytic study of two-body physics, we show new quantum phenomena for various gauge field parameters. We investigate the two-body interacting fermionic gas with spin-orbit coupling and Zeeman interaction in a ring trap. Through the plane wave expansion method, two-body fermionic system is solved analytically. In the absence of Zeeman interaction, the total momentum of the ground state is zero. With the increase of Zeeman interaction, an energy level crossing occurs between the lowest energy levels for different total momentum spaces and the ground state changes from zero total momentum space to non-zero total momentum space. Considering the Zeeman interaction, the total momentum of the ground state changes from zero to finite value. The single particle analysis shows that the ground energy level transition is induced by Zeeman energy level splitting. The momentum distributions of the ground state are given to provide an intuitive physical picture. This work can be further extended to the exploration of the heteroatom system, lattice system and higher spin system.

Keywords: two-body Fermionic system, spin-orbit coupling, Zeeman interaction

PACS: 34.10.+x, 34.50.-s, 03.75.Hh

DOI: 10.7498/aps.70.20201456

* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11704037).

† Corresponding author. E-mail: chenxing08@mails.ucas.ac.cn

‡ Corresponding author. E-mail: 13466728668@163.com